数 学 年 刊
3 (6) 1982

多重 de la Vallée Poussin 方形余项的估计

王 昆 扬
(北京师范大学)

§1. 引 言

设 E_N 为 N 维欧氏空间，其中的点记为 $\bar{x}=(x_1, \cdots, x_N)$. 用 Q_N 表示 E_N 中的基本方体: $Q_N=\{\bar{x}\in E_N \mid x_k\in[-\pi, \pi),\ k=1, 2, \cdots, N\}$. 用 $L(Q_N)$ 表示在 Q_N 可和，对每个变元都以 2π 为周期的 N 元函数在平均范数下所成的线性赋范空间；用 $C(Q_N)$ 表示 $L(Q_N)$ 中全体连续函数在一致范数下所成的线性赋范空间. 一般地，用 $X(Q_N)$ 代表 $L(Q_N)$ 和 $C(Q_N)$.

全体非负整数的集合记为 Z_+. N 重脚标记作 $\bar{\nu}=(\nu_1, \cdots, \nu_N)$, $(\nu_i\in Z_+, i=1, \cdots, N)$. 如果 $\nu_1=\nu_2=\cdots=\nu_N=\nu$, 则把 $\bar{\nu}$ 简写作 ν.

设 $f(\bar{x})\in X(Q_N)$, $S_{\bar{n}}(f;\ \bar{x})$ 为其 Fourier 部分和, $E_{\bar{n}}(f)_X$ 为 f 在 X 度量下的 $\bar{n}$ 阶最佳三角多项式逼近. 对于任意的 n, $l\in Z_+$, 如果脚标 $\bar{n}=(n, \cdots, n)$, $\overline{n+l}=(n+l, \cdots, n+l)$, 则把如下 de la Vallée Poussin 和

$$\frac{1}{(l+1)^N}\sum_{\bar{\nu}=\bar{n}}^{\overline{n+l}} S_{\bar{\nu}}(f;\ \bar{x})=\frac{1}{\pi^N}\int_{Q_N} f(\bar{x}+\bar{t})\left\{\frac{1}{(l+1)^N}\prod_{i=1}^{N}\left(\sum_{\nu_i=n}^{n+l} D_{\nu_i}(t_i)\right)\right\}d\bar{t}$$

叫做方形的，阶数是 $(n, n+l)$, 并记之为 $V_n^{n+l}(f;\ \bar{x})$. $\left(\text{式中 } D_k(t)=\dfrac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin t/2}\text{ 是 Dirichlet 核}\right)$. 差 $R_{n,l}(f;\ \bar{x})=f(\bar{x})-V_n^{n+l}(f;\ \bar{x})$ 叫做 f 的 de la Vallée Poussin 方形 $(n, n+l)$ 阶余项. 显然，当 $l=0$ 时，$V_n^n(f;\ \bar{x})$ 就是 Fourier 方形部分和 $S_n(f;\ \bar{x})$, 相应的方形余项 $R_{n,0}(f, \bar{x})$ 简记作 $R_n(f;\ \bar{x})$.

本文的目的是在一元函数已有的结果的基础上，求出当 $N>1$ 时 $\|R_{n,l}(f)\|_X$ 用方形最佳逼近数列 $\{E_\nu(f)\}_{\nu=0}^{\infty}$ 来表示的阶的估计式. 由于 $l=0$ 的情形是本质的，所以我们着重对 Fourier 方形余项的估计做详细的讨论，然后，只须做些细节的改动，就可推广到一般的 de la Vallée Poussin 的情形.

当 $N=1$ 时，对于 Fourier 余项的估计，Осколков, К. И.[1,2] 已得到完善的结果，孙永生[3] 也进行了研究. Стечкин, С. Б.[4]、Dahmen, W.[5] 和 Байбородов, С. П.[6] 完成了向 de la Vallée Poussin 情形的推广. 他们的结果总括起来可写成

定理 A 设 $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是单调下降到零的数列，函数类

$$X(\varepsilon)=\{f\in X(Q_1) \mid E_\nu(f)_X\leqslant\varepsilon_\nu,\ \nu\in Z_+\},$$

本文 1980 年 9 月 9 日收到.

则存在常数 $C_1>C_1'>0$, 使对一切 n, $l\in Z_+$ 有

$$C_1\sum_{\nu=0}^{n+l}\frac{\varepsilon_{n+\nu}}{\nu+l+1}\geqslant\sup_{f\in X(\varepsilon)}\|R_{n,l}(f)\|_X\geqslant C_1'\sum_{\nu=0}^{n+1}\frac{\varepsilon_{n+\nu}}{\nu+l+1}. \tag{1}$$

Стечкин[7] 还对于 $n=0$, 即 Fejér 余项的情形, 当 $X=C$ 时得到了使(1)式右半式成立而与 l 无关的极值函数.

对于 $N=2$, $X=C$, $l=0$ 的情形, 孙永生[8]证明了

定理 B　有绝对常数 $C_2>0$, 使对于 $f\in C(Q_2)$ 有

$$\|R_n(f;\ x,\ y)\|_C\leqslant C_2\ln n\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{E_\nu(f)_C}{\nu-n+1}\quad(n=2,\ 3,\ \cdots). \tag{2}$$

定理 C　对于相应于任意的单调趋于零的非负数列 $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的函数类

$$C(\varepsilon)=\{f\in C(Q_2)\,|\,E_n(f)_C\leqslant\varepsilon_n,\ n\in Z_+\},$$

存在绝对常数 $C_2'>0$, 使

$$\sup_{f\in C(\varepsilon)}\|R_n(f)\|_C\geqslant C_2'\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{\varepsilon_\nu\ln(\nu-n+2)}{\nu-n+1}\quad(n\in Z_+). \tag{3}$$

[8]中预料(2)能改进成

$$\|R_n(f;\ x,\ y)\|_C\leqslant C_2\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{E_\nu(f)_C\ln(\nu-n+2)}{\nu-n+1}\quad(n\in Z_+). \tag{4}$$

本文的结果证实了这个推测. 本文的结果是

定理　存在只与维数 N 有关的常数 $C_N>C_N'>0$, 使对于一切 n, $l\in Z_+$ 和相应于任意的单调趋于零的非负数列 $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的函数类 $X(\varepsilon)=\{f\in X(Q_N)\,|\,E_\nu(f)_X\leqslant\varepsilon_\nu, \nu\in Z_+\}$, 成立着

$$\begin{aligned}C_N'\sum_{\nu=0}^{n+l}\frac{\varepsilon_{n+\nu}}{\nu+l+1}\ln^{N-1}\Big(3+\frac{\nu}{l+1}\Big)&\leqslant\sup_{f\in X(\varepsilon)}\|R_{n,l}(f)\|_X\\&\leqslant C_N\sum_{\nu=0}^{n+l}\frac{\varepsilon_{n+\nu}}{\nu+l+1}\ln^{N-1}\Big(3+\frac{\nu}{l+1}\Big).\end{aligned} \tag{5}$$

§ 2. Fourier 方形余项的上方估计

(5)式的右半式当 $l=0$ 时可等价地表述为

定理 1　存在只与维数 N 有关的常数 $C_N>0$, 使对一切 $f\in X(Q_N)$, 有

$$\|R_n(f)\|_X\leqslant C_N\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{E_\nu(f)_X\ln^{N-1}(\nu-n+3)}{\nu-n+1}\quad(n\in Z_+). \tag{6}$$

证　对维数 N 用数学归纳法.

当 $N=1$ 时, (6)是定理 A 的结果, 设 $N=k$ 时(6)成立. 下面设 $N=k+1$. 记 $\bar{x}'=(x_1,\ \cdots,\ x_k)$. 那么

$$S_n(f;\ \bar{x}')=S_n(S_n(f;\ x_{k+1});\ \bar{x}')=S_n(g;\ \bar{x}').$$

记 $g(\bar{x}')=S_n(f;\ x_{k+1})$, 是 $f(\bar{x})$ 关于变元 x_{k+1} 的一元 n 阶 Fourier 部分和, 而 $S_n(g;\ \bar{x}')$ 是 $g(\bar{x})$ 关于变元 $\bar{x}'$ 的 Fourier 方形 n 阶部分和. 用 $E_\nu^{(\bar{x}')}(g)$ 表示 $_Xg(\bar{x})$ 关于变元 $\bar{x}'$ 的方形 ν 阶偏最佳逼近(见[10] 42—44 页), 则由归纳假设

$$\|S_n(g;\ \bar{x}')-g(\bar{x}')\|_X\leqslant C_k\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{E_\nu^{(\bar{x}')}(g)_X}{\nu-n+1}\ln^{k-1}(\nu-n+3). \tag{7}$$

设 $T_\nu^*(\bar{x})$ 是 $f(\bar{x})$ 的方形 ν 阶最佳逼近三角多项式. 置

$$T_\nu(\bar{x}', x_{k+1})=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_\nu^*(\bar{x}', x_{k+1}+t)(D_n(t)-D_\nu(t))dt+T_\nu^*(\bar{x}).$$

由偏最佳逼近的定义可知 $E_\nu^{(\bar{x}')}(g)_X\leqslant\|g-T_\nu\|_X$. 所以

$$E_\nu^{(\bar{x}')}(g)_X\leqslant\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\bar{x}', x_{k+1}+t)(D_n(t)-D_\nu(t))dt+S_\nu(f;\ x_{k+1})-T_\nu\right\|_X$$

$$\leqslant E_\nu(f)_X\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)-D_\nu(t)|dt+\|S_\nu(f;\ x_{k+1})-f\|_X+E_\nu(f)_X. \tag{8}$$

对(8)式右端第二项用一元已有结果, 得

$$\|S_\nu(f;\ x_{k+1})-f\|_X\leqslant C_1\sum_{j=\nu}^{2\nu}\frac{E_j^{(x_{k+1})}(f)_X}{j-\nu+1}\leqslant C_1\sum_{j=\nu}^{2\nu}\frac{E_j(f)_X}{j-\nu+1}. \tag{9}$$

(式中 $E_j^{(x_{k+1})}(f)_X$ 表示 f 关于变元 x_{k+1} 的偏最佳逼近). 而

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)-D_\nu(t)|dt\leqslant4(1+\ln^+|n-\nu|),$$

所以

$$E_\nu^{(\bar{x}')}(g)_X\leqslant E_\nu(f)_X\cdot5(1+\ln^+|n-\nu|)+C_1\sum_{j=\nu}^{2\nu}\frac{E_j(f)_X}{j-\nu+1}. \tag{10}$$

将此代入(7), 得

$$\|S_n(g;\ \bar{x}')-g(\bar{x})\|_X\leqslant C_{k+1}\left\{\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{\ln^k(\nu-n+3)}{\nu-n+1}E_\nu(f)_X+\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{\ln^{k-1}(\nu-n+3)}{\nu-n+1}\sum_{j=\nu}^{2\nu}\frac{E_j(f)_X}{j-\nu+1}\right\}.$$

由于

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{\ln^{k-1}(\nu-n+3)}{\nu-n+1}\sum_{j=\nu}^{2\nu}\frac{E_j(f)_X}{j-\nu+1}&\leqslant\sum_{\nu=n}^{4n}\sum_{j=\nu}^{4n}\frac{\ln^{k-1}(\nu-n+3)}{\nu-n+1}\frac{E_j(f)_X}{j-\nu+1}\\&=\sum_{j=n}^{4n}\sum_{\nu=n}^{j}\frac{\ln^{k-1}(\nu-n+3)}{(\nu-n+1)(j-\nu+1)}E_j(f)_X\\&=\sum_{j=n}^{4n}\frac{E_j(f)_X}{j-n+2}\sum_{\nu=n}^{j}\ln^{k-1}(\nu-n+3)\left(\frac{1}{\nu-n+1}+\frac{1}{j-\nu+1}\right)\\&\leqslant C\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{E_\nu(f)_X\ln^k(\nu-n+3)}{\nu-n+1},\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $C>0$ 为绝对常数, 所以

$$\|S_n(g;\ \bar{x}')-g(\bar{x})\|_X\leqslant C_{k+1}\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{E_\nu(f)_X\ln^k(\nu-n+3)}{\nu-n+1}. \tag{12}$$

再于(9)中代入 $\nu=n$, 得到

$$\|g-f\|_X\leqslant C_1\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{E_\nu(f)_X}{\nu-n+1}. \tag{13}$$

(12)、(13)合起来给出

$$\|S_n(f)-f\|_X\leqslant C_{k+1}\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{E_\nu(f)_X\ln^k(\nu-n+3)}{\nu-n+1}. \tag{14}$$

证毕.

§3. 关于数列的一个命题

为了做出方形余项的下方估计, 需要引入一个关于数列的命题.

取定自然数 n, 把一切形如 $\{u_0, u_1, \cdots, u_n, 0, \cdots\}$, 且满足 $\Delta u_k=u_k-u_{k+1}\geqslant 0(k=0, 1, 2, \cdots)$的数列的集合记作 U_n, 用 $\bar{u}$ 表示数列 $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, 并记 $\Delta\bar{u}=\{\Delta u_k\}_{k=0}^{\infty}$.

U_n 中两个数列 $\bar{a}=\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ 和 $\bar{b}=\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, 说 $\bar{a}$ 不超过 $\bar{b}$, 是指 $a_k\leqslant b_k$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$, 记作 $\bar{a}\leqslant\bar{b}$. 对于 $\bar{a}\in U_n$, 说 $\bar{a}^*=\{a_k^*\}_{k=0}^{\infty}$ 是不超过 $\bar{a}$ 的最大凸序列, 是指 $\bar{a}^*$ 有如下性质:

(a) $\bar{a}^*\in U_n$ 且 $\bar{a}^*\leqslant\bar{a}$;

(b) $\Delta\bar{a}^*\in U_n$, 即 $\Delta^2 a_k^*\geqslant 0(k=0, 1, 2, \cdots)$;

并且 $\bar{a}^*$ 是具有这两条性质的序列中的最大者.

Осколков[2] 指出了构作 $\bar{a}^*$ 的具体办法, 从而也证实了 $\bar{a}^*$ 的存在性和唯一性, $\bar{a}^*$ 具有如下结构: 存在数组

$$k_0=0<k_1<\cdots<k_\nu<k_{\nu+1}=n+1 \quad (0\leqslant\nu\leqslant n), \tag{15}$$

使 $a_{k_i}^*=a_{k_i}(i=0, 1, \cdots, \nu+1)$, 而且当 $k_i\leqslant k\leqslant k_{i+1}$ 时, $\{a_k^*\}$ 是线性的, 即

$$a_k^*=\frac{k_{i+1}-k}{k_{i+1}-k_i}a_{k_i}+\frac{k-k_i}{k_{i+1}-k_i}a_{k_{i+1}} \quad (k_i\leqslant k\leqslant k_{i+1}), \tag{16}$$

由此推出 $\bar{a}^*$ 具有重要性质:

(c) $\bar{a}^*\cdot\bar{u}\geqslant C\bar{a}\cdot\bar{u}$, $\forall\bar{u}\in U_n$,

其中 $C>0$ 是与 $\bar{a}$、$\bar{u}$ 以及 n 无关的常数. 运算"$\cdot$"表示内积, 即

$$\bar{a}\cdot\bar{u}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k u_k.$$

我们的目的是拓广上述结果, 证明

命题 $\forall\bar{a}\in U_n$, $\forall$ 自然数 m, $\exists\bar{a}^*\in U_n$, 使

(a) $\bar{a}^*\leqslant\bar{a}$;

(b) $\Delta\bar{a}^*$, $\Delta^2\bar{a}^*$, $\cdots$, $\Delta^m\bar{a}^*$ 都属于 U_n, 即

$$\Delta^2 a_k\geqslant 0,\ \Delta^3 a_n\geqslant 0,\ \cdots,\ \Delta^{m+1}a_k\geqslant 0 \quad (k=0, 1, 2, \cdots);$$

(c) $\forall\bar{u}\in U_n$, 有 $\bar{a}^*\cdot\bar{u}\geqslant C_m\bar{a}\cdot\bar{u}$ 成立, 其中 C_m 是只与 m 有关的正数.

先证明一个辅助命题.

辅助命题 若 $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是单调增的正数列, 满足条件

$$a_{2k}\leqslant\lambda a_k \quad (k=0, 1, 2, \cdots)(\lambda>1), \tag{17}$$

则存在绝对常数 $\alpha>0$, 使对一切整数 $0\leqslant p\leqslant q$ 有

$$\sum_{k=p}^{q-1}\frac{q-k}{q-p}a_k\geqslant(\alpha\lambda)^{-1}\sum_{k=p}^{q-1}a_k. \tag{18}$$

证 当 $q-p\leqslant 24$ 时, 取 $\alpha=24$, 不等式成立.

设 $q-p>24$, 令 $r=\left[\frac{q-p}{4}\right]\geqslant 6$. 当 $q-r\leqslant k\leqslant q-1$ 时, 记 $\nu_k=\left[\frac{k+1}{2}\right]$. 显然 $2\nu_k\geqslant k$. 由条件(17)及 $\{a_k\}$ 单调增, 得

$$a_k\leqslant a_{2\nu_k}\leqslant\lambda a_{\nu_k} \quad (q-r\leqslant k\leqslant q-1), \tag{19}$$

$$\sum_{k=q-r}^{q-1}a_k\leqslant\lambda\sum_{k=q-r}^{q-1}a_{\nu_k}. \tag{20}$$

又由于 $\nu_k\leqslant\nu_{q-1}=\left[\frac{q}{2}\right]\leqslant\frac{q+p}{2}=q-\frac{q-p}{2}\leqslant q-2r$, 所以

$$\sum_{k=q-r}^{q-1} a_{\nu_k} \leqslant r a_{q-2r} \leqslant \sum_{k=q-2r}^{q-r-1} a_k \leqslant \sum_{k=p}^{q-r-1} a_k = \frac{q-p}{r+1} \sum_{k=p}^{q-r-1} \frac{r+1}{q-p} a_k$$
$$\leqslant \frac{q-p}{r+1} \sum_{k=p}^{q-r-1} \frac{q-k}{q-p} a_k. \tag{21}$$

将 $r+1>\frac{q-p}{4}$ 代入(21)，与(20)合并，得

$$\sum_{k=q-r}^{q-1} a_k \leqslant 4\lambda \sum_{k=p}^{q-1} \frac{q-k}{q-p} a_k. \tag{22}$$

另一方面，$r>\frac{q-p}{4}-1$, $5r>q-p-4+r>q-p$, 因此

$$5 \sum_{k=q-r}^{q-1} a_k \geqslant \sum_{k=p}^{q-1} a_k. \tag{23}$$

(22)和(23)合起来就得到

$$\sum_{k=p}^{q-1} \frac{q-k}{q-p} a_k \geqslant (24\lambda)^{-1} \sum_{k=p}^{q-1} a_k.$$

辅助命题证毕.

为证命题，定义数列 $\{S_k^{(m)}\}_{k=1}^{\infty}$ $(m=0, 1, 2, \cdots)$

$$S_k^{(0)} \equiv 1, \quad S_k^{(m)} = C_{k+m-1}^{m} = \frac{k\cdot(k+1)\cdots(k+m-1)}{m!} \quad (m>0), \ (k=1, 2, \cdots) \tag{24}$$

易见，当 $m>0$ 时，$S_k^{(m)} = \sum_{j=1}^{k} S_j^{(m-1)}$, 并且

$$\frac{S_{2k}^{(m)}}{S_k^{(m)}} = \frac{(2k)(2k+1)\cdots(2k+m-1)}{k(k+1)\cdots(k+m-1)} \leqslant 2^m \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{25}$$

由此，根据辅助命题推出，对于一切整数 k, p, q, 只要满足 $0\leqslant k\leqslant p<q$, 就有

$$\sum_{j=p}^{q-1} \frac{q-j}{q-p} S_{j-k+1}^{(m)} \geqslant (24\times 2^m)^{-1} \sum_{j=p}^{q-1} S_{j-k+1}^{(m)} \quad (m=0, 1, 2, \cdots). \tag{26}$$

命题的证明　对 m 作归纳法.

当 $m=1$ 时，取 $\bar{a}^*$ 为不超过 $\bar{a}$ 的最大下凸数列即可．此时使(c)成立的常数 C_1 可取 $\frac{1}{2}$(见[2]).

若对自然数 m 命题已证，就是说对于任意取定的 $\bar{a}\in U_n$, $\exists \bar{b}\in U_n$, 满足

(a) $\bar{b}\leqslant\bar{a}$;

(b) $\Delta^r b_k\geqslant 0$,　$(r=1, 2, \cdots, m+1, k=0, 1, 2, \cdots)$;

(c) $\bar{b}\cdot\bar{u}\geqslant C_m\bar{a}\cdot\bar{u}$　$\forall \bar{u}\in U_n$,

那么 $\Delta^m\bar{b}\in U_n$. 作不超过 $\Delta^m\bar{b}$ 的最大凸数列，记为 $\bar{\delta}=\{\delta_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\bar{\delta}$ 具有(15)和(16)表出的结构．即有一组号码 $k_0=0<k_1<\cdots<k_\nu<k_{\nu+1}=n+1$, $(0\leqslant\nu\leqslant n)$, 使

$$\delta_k = \frac{k_{i+1}-k}{k_{i+1}-k_i} \Delta^m b_{k_i} + \frac{k-k_i}{k_{i+1}-k_i} \Delta^m b_{k_{i+1}} \quad (k_i\leqslant k\leqslant k_{i+1}) \tag{27}$$

构作数列 $\bar{a}^*=\{a_k^*\}_{k=0}^{\infty}$ 如下：当 $k>n$ 时 $a_k^*=0$; 当 $k\leqslant n$ 时

$$a_k^* = \sum_{j=k}^{n} S_{j-k+1}^{(m-1)} \delta_j. \tag{28}$$

由(24)及 $\bar{\delta}\leqslant\Delta^m\bar{b}$, 当 $k\leqslant n$ 时

$$a_k^*=\sum_{j=k}^{n}C_{j-k+m-1}^{m-1}\delta_j\leqslant\sum_{j=k}^{n}C_{j-k+m-1}^{m-1}\Delta^m b_j=\sum_{j=k}^{n}C_{j-k+m-2}^{m-2}\Delta^{m-1}b_j=\sum_{j=k}^{n}C_{j-k}^{0}\Delta b_j=b_k.$$

由此得知 $\bar{a}^*\leqslant\bar{b}\leqslant\bar{a}$, $\bar{a}^*$ 具有性质(a).

从(28)逐次作差, 当 $k\leqslant n$ 时求得

$$\Delta a_k^*=\sum_{j=k}^{n}C_{j-k+m-1}^{m-1}\delta_j-\sum_{j=k+1}^{n}C_{j-k+m-2}^{m-1}\delta_j=\delta_k+\sum_{j=k+1}^{n}(C_{j-k+m-1}^{m-1}-C_{j-k+m-2}^{m-1})\delta_j$$
$$=\sum_{j=k}^{n}C_{j-k+m-2}^{m-2}\delta_j\geqslant 0,$$

....

$$\Delta^{m-1}a_k^*=\sum_{j=k}^{n}\delta_j\geqslant 0,$$
$$\Delta^m a_k^*=\delta_k\geqslant 0,\quad \Delta^{m+1}a_k^*=\Delta\delta_k\geqslant 0,$$
$$\Delta^{m+2}a_k^*=\Delta^2\delta_k\geqslant 0.$$

这就是说, $\bar{a}^*$ 具有性质(b)(关于 $m+1$).

现在验证 $\bar{a}^*$ 具有性质(c). 设 $k_i\leqslant k<k_{i+1}(i=0,1,\cdots,\nu)$, 由(28), 有

$$a_k^*=\sum_{j=k}^{k_{i+1}-1}S_{j-k+1}^{(m-1)}\delta_j+\sum_{\mu=i+1}^{\nu}\sum_{j=k_\mu}^{k_{\mu+1}-1}S_{j-k+1}^{(m-1)}\delta_j. \tag{29}$$

由(27), 根据(26)及 $\Delta^m\bar{b}\in U_n$, 知

$$\sum_{j=k_\mu}^{k_{\mu+1}-1}S_{j-k+1}^{(m-1)}\delta_j\geqslant\sum_{j=k_\mu}^{k_{\mu+1}-1}\frac{k_{\mu+1}-j}{k_{\mu+1}-k_\mu}S_{j-k+1}^{(m-1)}\Delta^m b_{k_\mu}\geqslant(24\times 2^m)^{-1}\sum_{j=k_\mu}^{k_{\mu+1}-1}S_{j-k+1}^{(m-1)}\Delta^m b_{k_\mu}$$
$$\geqslant(24\times 2^m)^{-1}\sum_{j=k_\mu}^{k_{\mu+1}-1}S_{j-k+1}^{(m-1)}\Delta^m b_j\quad(\mu=i+1,\cdots,\nu) \tag{30}$$

以及

$$\sum_{j=k}^{k_{i+1}-1}S_{j-k+1}^{(m-1)}\delta_j\geqslant\sum_{j=k}^{k_{i+1}-1}\frac{k_{i+1}-j}{k_{i+1}-k_i}S_{j-k+1}^{(m-1)}\Delta^m b_{k_i}=\frac{k_{i+1}-k}{k_{i+1}-k_i}\sum_{j=k}^{k_{i+1}-1}\frac{k_{i+1}-j}{k_{i+1}-k}S_{j-k+1}^{(m-1)}\Delta^m b_{k_i}$$
$$\geqslant\frac{k_{i+1}-k}{k_{i+1}-k_i}(24\times 2^m)^{-1}\sum_{j=k}^{k_{i+1}-1}S_{j-k+1}^{(m-1)}\Delta^m b_j. \tag{31}$$

将(30)、(31)代入(29), 得

$$a_k^*\geqslant\frac{k_{i+1}-k}{k_{i+1}-k_i}(24\times 2^m)^{-1}\sum_{j=k}^{n}S_{j-k+1}^{(m-1)}\Delta^m b_j$$
$$=(24\times 2^m)^{-1}\frac{k_{i+1}-k}{k_{i+1}-k_i}b_k\quad(k_i\leqslant k<k_{i+1}). \tag{32}$$

$\forall\bar{u}\in U_n$, 作内积, 用(32)式, 得

$$\bar{a}^*\cdot\bar{u}=\sum_{\mu=0}^{\nu}\sum_{k=k_\mu}^{k_{\mu+1}-1}a_k^*\cdot u_k\geqslant(24\times 2^m)^{-1}\sum_{\mu=0}^{\nu}\sum_{k=k_\mu}^{k_{\mu+1}-1}\frac{k_{\mu+1}-k}{k_{\mu+1}-k_\mu}b_k u_k. \tag{33}$$

置 $\nu_\mu=\left[\dfrac{k_\mu+k_{\mu+1}}{2}\right]$, 则

$$\sum_{k=k_\mu}^{k_{\mu+1}-1}\frac{k_{\mu+1}-k}{k_{\mu+1}-k_\mu}b_k\cdot u_k\geqslant\sum_{k=k_\mu}^{\nu_\mu}\frac{k_{\mu+1}-k}{k_{\mu+1}-k_\mu}b_k u_k\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=k_\mu}^{\nu_\mu}b_k u_k\geqslant\frac{1}{4}\sum_{k=k_\mu}^{k_{\mu+1}-1}b_k u_k. \tag{34}$$

由(34)和(33), 得

$$\bar{a}^*\cdot\bar{u}\geqslant(24\times 2^{m+2})^{-1}\sum_{k=0}^{n}b_k u_k. \tag{35}$$

由归纳假设, $\bar{b}\cdot\bar{u}\geqslant C_m\bar{a}\cdot\bar{u}$. 于是

$$\bar{a}^*\cdot\bar{u}\geqslant C_{m+1}\bar{a}\cdot\bar{u}. \tag{36}$$

归纳法完成，命题证毕.

注　由(35)可知(36)中的 C_{m+1} 可取 $2^{-(m+8)^2}$.

§4. Fourier 方形余项在类 $X(\varepsilon)$ 上的极值的下方估计

现把(5)式的左半式当 $l=0$ 时重写作

定理 2　存在只与 N 有关的常数 $C'_N>0$，使得对于一切 $n\in Z_+$ 和相应于任意单调趋于零的非负数列 $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的函数类 $X(\varepsilon)=\{f\in X(Q_N)\mid E_\nu(f)_X\leqslant\varepsilon_\nu,\ \nu\in Z_+\}$，成立着

$$\sup_{f\in X(\varepsilon)}\|R_n(f)\|_X\geqslant C'_N\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{\varepsilon_\nu\ln^{N-1}(\nu-n+3)}{\nu-n+1}. \tag{37}$$

证　分别对于 $X=L$ 和 $X=C$ 的情形进行证明.

1° $L(Q_N)$ 的情形.

为了避免冗繁，下面仅对维数 $N=2$ 的情形写出证明，对于一般情形证法完全适用.

设 $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是单调趋于零的非负数列，$L(\varepsilon)=\{f:f(x,y)\in L(Q_2)$，方形逼近 $E_k(f)_L\leqslant\varepsilon_k(k=0,1,2,\cdots)\}$. n 是任取的非负整数. 我们证明存在 $g_n(x,y)\in L(\varepsilon)$，使

$$\|R_n(g_n;\ x,y)\|_L\geqslant C'_2\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{\varepsilon_\nu\ln(\nu-n+3)}{\nu-n+1}. \tag{38}$$

首先，当 $n=0$ 时，取 $g_0=\frac{\varepsilon_0}{8\pi}\cos x$，则 $g_0\in L(\varepsilon)$，且有 $R_0(g_0)=g_0$，$\|R_0(g_0)\|_L=\varepsilon_0$，取 $C'_2\leqslant\frac{1}{\ln 3}$，就有(38).

设 $n>0$. 由 §3 的命题，对于数列 $\bar{\varepsilon}(n)=\{\varepsilon_n,\cdots,\varepsilon_{2n},0\cdots\}$，存在数列 $\bar{\eta}=\{\eta_k\}_{k=0}^{\infty}\in U_n$，使

(a) $\eta_k\leqslant\varepsilon_{k+n}\quad(k=0,1,\cdots)$;

(b) $\Delta^r\eta_k\geqslant0\quad(r=1,2,3,4,\ k=0,1,\cdots)$;

(c) $\bar{\eta}\cdot\bar{u}\geqslant C\bar{\varepsilon}(n)\cdot\bar{u}\quad\forall\bar{u}\in U_n\quad(C>0$ 为常数).

作函数 $f(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\lambda_{i,j}\cdot\eta_{i,j}\cos ix\cdot\cos jy$，其中 $\lambda_{0,0}=\frac{1}{4}$，$\lambda_{0,j}=\lambda_{i,0}=\frac{1}{2}$，$\lambda_{i,j}=1(i,j=1,2,\cdots)$；$\eta_{i,j}=\eta_{i+j}$. 则

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\Delta^{2,2}\eta_{i,j}\sigma_i(x)\cdot\sigma_j(y),$$

其中 $\sigma_i(t)=(i+1)F_i(t)=\dfrac{\sin^2\frac{i+1}{2}t}{2\sin^2 t/2}$，($F_i(t)$表示 Féjer 核). 估计 f 的方形 ν 阶 L 最佳逼近.

设 $\nu<n$，令

$$f_1(x,y)=\sum_{i=\nu+1}^{n}\sum_{j=0}^{\nu}\Delta^{2,2}\eta_{i,j}\sigma_i(x)\cdot\sigma_j(y),$$

$$f_2(x,y)=\sum_{i=0}^{\nu}\sum_{j=\nu+1}^{n}\Delta^{2,2}\eta_{i,j}\sigma_i(x)\cdot\sigma_j(y),$$

$$f_3(x,y)=\sum_{i=\nu+1}^{n}\sum_{j=\nu+1}^{n}\Delta^{2,2}\eta_{i,j}\sigma_i(x)\cdot\sigma_j(y).$$

由于 $f-(f_1+f_2+f_3)$ 是 ν 阶三角多项式，所以

$$E_\nu(f)_L\leqslant E_\nu(f_1)_L+E_\nu(f_2)_L+E_\nu(f_3)_L. \tag{39}$$

设 $T_\nu^{(i)}(x)$ 是 $\sigma_i(x)$ 的一元 L 最佳逼近三角多项式（ν 阶），那么（见[9]），

$$\int_0^{2\pi}|\sigma_i(x)-T_\nu^i(x)|dx\leqslant 2\pi(i-\nu)\quad(i>\nu). \tag{40}$$

于是

$$\begin{aligned}E_\nu(f_1)_L&\leqslant\sum_{i=\nu+1}^{n}\sum_{j=0}^{\nu}\Delta^{2,2}\eta_{i,j}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sigma_i(x)-T_\nu^{(i)}(x)|\sigma_j(y)dx\,dy\\&\leqslant 2\pi^2\sum_{i=\nu+1}^{n}\sum_{j=0}^{\nu}\Delta^{2,2}\eta_{i,j}(i-\nu)(j+1)\leqslant 2\pi^2\sum_{i=\nu+1}^{n}\Delta^{2,0}\eta_{i,0}(i-\nu)\\&=2\pi^2\eta_{\nu+1,0}=2\pi^2\eta_{\nu+1}\leqslant 2\pi^2\varepsilon_{\nu+1+n}.\end{aligned} \tag{41}$$

同理

$$E_\nu(f_2)_L\leqslant 2\pi^2\varepsilon_{\nu+1+n}. \tag{42}$$

当 $i,\ j\geqslant\nu$ 时，方形最佳逼近

$$\begin{aligned}E_\nu(\sigma_i(x)\cdot\sigma_j(y))_L&\leqslant\|\sigma_i(x)[\sigma_j(y)-T_\nu^{(j)}(y)]\|_L+\|[\sigma_i(x)-T_\nu^{(i)}(x)]T_\nu^{(j)}(y)\|_L\\&\leqslant\pi(i+1)2\pi(j-\nu)+2\pi(i-\nu)[\pi(j+1)+2\pi(j-\nu)]\\&\leqslant 4\pi^2[(i+1)(j-\nu)+(i-\nu)(j+1)].\end{aligned}$$

注意到 i、j 和 x、y 的对称性，求得

$$\begin{aligned}E_\nu(f_3)_L&\leqslant\sum_{i=\nu+1}^{n}\sum_{j=\nu+1}^{n}\Delta^{2,2}\eta_{i,j}E_\nu(\sigma_i(x)\cdot\sigma_j(y))_L\\&\leqslant 8\pi^2\sum_{i=\nu+1}^{n}\sum_{j=\nu+1}^{n}\Delta^{2,2}\eta_{i,j}(i+1)(j-\nu)=8\pi^2\sum_{i=\nu+1}^{n}\Delta^{2,0}\eta_{i,\nu+1}(i+1)\\&=8\pi^2\Big[\sum_{i=\nu+1}^{n}\Delta^{1,0}\eta_{i,\nu+1}+(\nu+1)\Delta^{1,0}\eta_{\nu+1,\nu+1}\Big]\\&\leqslant 8\pi^2(\eta_{\nu+1,\nu+1}+\eta_{0,\nu+1})\leqslant 16\pi^2\eta_{\nu+1}\leqslant 16\pi^2\varepsilon_{\nu+1+n}.\end{aligned} \tag{43}$$

(41)、(42)、(43)及(39)给出

$$E_\nu(f)_L\leqslant 20\pi^2\varepsilon_{\nu+1+n}\quad(\nu<n). \tag{44}$$

置 $g_n(x,\ y)=\dfrac{1}{20\pi^2}\cos(n+1)x\cdot\cos(n+1)y\cdot f(x,\ y)$，则当 $\nu\leqslant n$ 时方形逼近

$$E_\nu(g_n)_L\leqslant\|g_n\|_L\leqslant\frac{1}{20\pi^2}\|f\|_L=\frac{1}{20}\eta_{0,0}\leqslant\varepsilon_n\leqslant\varepsilon_\nu.$$

当 $\nu>2n$ 时，由于 g_n 是 $2n+1$ 阶三角多项式，显然 $E_\nu(g_n)_L=0$. 当 $n<\nu\leqslant 2n$ 时，设 $T^*_{\nu-n-1}(x,\ y)$ 是 f 的方形 $\nu-(n+1)$ 阶最佳逼近三角多项式，令

$$\tau_\nu(x,\ y)=\frac{1}{20\pi^2}\cos(n+1)x\cos(n+1)y\cdot T^*_{\nu-(n+1)}(x,\ y),$$

则 τ_ν 是 ν 阶三角多项式. 于是

$$E_\nu(g_n)_L\leqslant\|g_n-\tau_n\|_L\leqslant\frac{1}{20\pi^2}E_{\nu-n-1}(f)_L.$$

根据(44)，得 $E_\nu(g_n)_L\leqslant\varepsilon_\nu$　$(n<\nu\leqslant 2n)$.

证得 $g_n\in L(\varepsilon)$.

估计 $\|R_n(g_n)\|_L$. 先写出 g_n 的表达式.

$$g_n(x,\ y)=\frac{1}{80\pi^2}\eta_{0,0}\cos(n+1)x\cdot\cos(n+1)y$$
$$+\frac{1}{80\pi^2}\cos(n+1)x\cdot\sum_{j=1}^{n}\eta_{0,j}[\cos(n+1-j)y+\cos(n+1+j)y]$$
$$+\frac{1}{80\pi^2}\cos(n+1)y\sum_{i=1}^{n}\eta_{i,0}[\cos(n+1-i)x+\cos(n+1+i)x]$$
$$+\frac{1}{80\pi^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\eta_{i,j}\{[\cos(n+1-i)x+\cos(n+1+i)x]$$
$$+[\cos(n+1-j)y+\cos(n+1+j)y]\}.$$

顺次记右边四项为 $h_1(x,\ y)$、$h_2(x,\ y)$、$h_3(x,\ y)$、$h_4(x,\ y)$. 易见

$$R_n(g_n)=h_1+h_2+h_3+R_n(h_4).$$

设 $\psi(x,\ y)=\sin(n+1)x\cdot\sin(n+1)y\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin ix\cdot\sin jy}{i\cdot j}$, 展开之

$$\psi(x,\ y)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{i\cdot j}\{[\cos(n+1-i)x-\cos(n+1+i)x]$$
$$+[\cos(n+1-j)y-\cos(n+1+j)y]\}.$$

根据三角函数系的正交性, 得到

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}R_n(g_n)\psi\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}R_n(h_4)\psi\,dx\,dy=\frac{-1}{320\pi^2}\cdot\pi^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\eta_{i,j}}{i\cdot j}. \tag{45}$$

取 $\varphi(x,\ y)=\cos(n+1)x\cdot\cos(n+1)y-\psi(x,\ y)$. 由于(见[11], 第二章)

$$\sup_m\left\|\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}\right\|_C=\varkappa<+\infty, \tag{46}$$

可见有常数 $C>0$, 使 $\|\varphi(x,\ y)\|_C\leqslant C$. 从而

$$\|R_n(g_n)\|_L\geqslant\frac{1}{C}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}R_n(g_n)\varphi\,dx\,dy=\frac{1}{C}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[h_1\varphi-R_n(g_n)\psi]dx\,dy.$$

代入 $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}h_1\varphi\,dx\,dy=\frac{1}{80}\eta_{0,0}$ 及(45), 得

$$\|R_n(g_n)\|_L\geqslant\frac{1}{320C}\left[4\eta_{0,0}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\eta_{i,j}}{i\cdot j}\right]=\frac{1}{320C}\left[4\eta_0+\sum_{\nu=2}^{n+1}\sum_{k=1}^{\nu-1}\frac{\eta_\nu}{k(\nu-k)}\right]$$
$$=\frac{1}{320C}\left[4\eta_0+\sum_{\nu=2}^{n+1}\frac{\eta_\nu}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{\nu-k}\right)\right]$$
$$\geqslant\frac{1}{160C}\left(2\eta_0+\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\eta_\nu\ln\nu}{\nu}\right).$$

最后和式中缺少 $\nu=1$ 的项, 但显然可用第一项($\nu=0$)来弥补, 从而取适当的常数 $C'>0$, 得有

$$\|R_n(g_n)\|_L\geqslant C'\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{\eta_\nu\ln(\nu-n+3)}{\nu-n+1}.$$

由于$\left\{\frac{\ln 3}{1},\ \frac{\ln 4}{2},\ \cdots\ \frac{\ln(n+3)}{n+1},\ 0,\ \cdots\right\}\in U_n$, 所以根据 $\bar\eta$ 的性质(c)得到(38).

2° $C(Q_N)$的情形

也以 $N=2$ 为例写出证明, 一般的情形, 证法完全适用.

同 $L(\varepsilon)$的情形一样, 只须考虑 n 为自然数的情形. 取数列

$$\bar\varepsilon(n)=\{\varepsilon_n,\ \varepsilon_{n+1},\ \cdots,\ \varepsilon_{2n},\ 0,\ \cdots\},$$

用§3的命题,存在$\bar{\eta}=\{\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_n, 0, \cdots\}\in U_n$,满足

(a) $\eta_k\leqslant\varepsilon_{k+n}\quad(k=0, 1, 2, \cdots)$;

(b) $\Delta\eta_k\geqslant 0,\ \Delta^2\eta_k\geqslant 0,\quad(k=0, 1, 2, \cdots)$;

(c) $\bar{\eta}\cdot\bar{u}\geqslant C_2\bar{\varepsilon}(n)\cdot\bar{u}\quad\forall\bar{u}\in U_n\quad(C_2>0$ 为常数)

置$\eta_{i,j}=\eta_{i+j-2}$,取$f(x, y)=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n+1}\eta_{i,j}\dfrac{\sin ix}{i}\cdot\dfrac{\sin jy}{j}$. 显然,

$$f(x, y)=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\Delta^{1,1}\eta_{i,j}S_i(x)\cdot S_j(y),$$

其中$S_\nu(t)=\sum\limits_{k=1}^{\nu}\dfrac{\sin kt}{k}\quad(\nu=1, 2, \cdots)$. 根据(46)

$$\|f\|_C\leqslant\varkappa^2\eta_{1,1}=\varkappa^2\eta_0\leqslant\varkappa^2\varepsilon_n. \tag{47}$$

当$0<\nu\leqslant n$时,设

$$f_1=\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=\nu+1}^{n+1}\Delta^{1,1}\eta_{i,j}S_i(x)S_j(y),$$

$$f_2=\sum_{i=\nu+1}^{n+1}\sum_{j=1}^{\nu}\Delta^{1,1}\eta_{i,j}S_i(x)S_j(y),$$

$$f_3=\sum_{i=\nu+1}^{n+1}\sum_{j=\nu+1}^{n+1}\Delta^{1,1}\eta_{i,j}S_i(x)S_j(y).$$

由于$f-(f_1+f_2+f_3)$是ν阶三角多项式,所以方形最佳逼近

$$E_\nu(f)_C\leqslant\|f_1\|_C+\|f_2\|_C+\|f_3\|_C\leqslant\varkappa^2(\eta_{1,\nu+1}+\eta_{\nu+1,1}+\eta_{\nu+1,\nu+1})\leqslant 3\varkappa^2\eta_\nu\leqslant 3\varkappa^2\varepsilon_{\nu+n}, \tag{48}$$

取$g_n(x, y)=\dfrac{1}{3\varkappa^2}\sin nx\cdot\sin ny\cdot f(x, y)$,是$2n+1$阶三角多项式. 当$\nu>2n$时,$E_\nu(g_n)_C=0$;而当$\nu<n$时,由(47) $E_\nu(g_n)_C\leqslant\dfrac{1}{3\varkappa^2}\|f\|_C\leqslant\varepsilon_n\leqslant\varepsilon_\nu$;当$n<\nu\leqslant 2n$时,取$T^*_{\nu-n}(x, y)$为$f$的方形$\nu-n$阶最佳逼近三角多项式,由(48)得

$$E_\nu(g_n)_C\leqslant\left\|g_n(x, y)-\frac{1}{3\varkappa^2}\sin nx\cdot\sin ny\cdot T^*_{\nu-n}(x, y)\right\|_C$$

$$\leqslant\frac{1}{3\varkappa^2}E_{\nu-n}(f)_C\leqslant\varepsilon_\nu.$$

总之,$g_n\in C(\varepsilon)$.

估计$R_n(g_n)$在原点的值,得

$$\|R_n(g_n)\|_C\geqslant|R_n(g_n;\ 0,\ 0)|=\left|\frac{1}{12\varkappa^2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\eta_{i,j}}{i\cdot j}(-1)\right|$$

$$=\frac{1}{12\varkappa^2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\eta_{i+j-2}}{i\cdot j}\geqslant\frac{1}{6\varkappa^2}\sum_{\nu=2}^{n+2}\frac{\eta_{\nu-2}}{\nu}\ln\nu\geqslant\frac{1}{24\varkappa^2}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\eta_\nu\ln(\nu+3)}{\nu+1}.$$

根据$\bar{\eta}$的性质(c)得到

$$\|R_n(g_n)\|_C\geqslant C_2'\sum_{\nu=n}^{2n}\frac{\varepsilon_\nu\ln(\nu-n+3)}{\nu-n+1}. \tag{49}$$

证毕.

注 在定理2的证明中,求得的极值元$g_n(\bar{x})$是与n有关的. 仿照[8]. 可以把那里的定理3拓广,求得$f_0(\bar{x})\in X(Q_N)$,满足

(i) $f_0\in X(\varepsilon)$, $\tilde{f}_0\in X(\varepsilon)$;

(ii) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\|R_n(f_0)\|_X}{K_n(\varepsilon)}\geqslant\gamma_N$,　$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\|R_n(\bar{f}_0)\|_X}{K_n(\varepsilon)}\geqslant\gamma_N$,

其中 $K_n(\varepsilon)=\sum\limits_{\nu=n}^{2n}\dfrac{\varepsilon_\nu\ln^{N-1}(\nu-n+3)}{\nu-n+1}$, $\gamma_N>0$ 是只与 N 有关的常数.

§5. de la Vallée Poussin 方形余项的估计

完全类似于定理 1, 可对维数 N 用归纳法证得

$$\|R_{n,l}(f)\|_X\leqslant C_N\sum_{\nu=0}^{n+l}\frac{E_\nu(f)_X\ln^{N-1}\left(\dfrac{\nu}{l+1}+3\right)}{\nu+l+1}. \tag{50}$$

证明的步骤同定理 1, 只须把其中的 $T_\nu(\bar{x})$ 换为

$$T_\nu(\bar{x})=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T^*_\nu(\bar{x}',\ x_{k+1}+t)W^l_{n,\nu}(t)dt+T^*_\nu(\bar{x}),$$

式中代替 $D_n(t)-D_\nu(t)$ 的是 $W^l_{n,\nu}(t)=\dfrac{1}{l+1}\sum\limits_{\mu=\nu}^{\nu+l}[D_{n+\mu-\nu}(t)-D_\mu(t)]$, 把 S_n 换成 V^{n+l}_n, 并注意到 $\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|W^l_{n,\nu}(t)|dt\leqslant4\left(1+\ln^{-1}\dfrac{|n-\nu|}{l+1}\right)$. (50) 与 (5) 的右半式是等价的.

(5) 式的左半式的证明, 分两种情形.

1° $X=C$ 的情形.

引入 Стечкин[7] 给出的一元极值函数

$$f_0(x_1)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_{\nu-1}\cos\nu x_1.$$

对于 $n,\ l\in Z_+$, 有(见[7])

$$\|R_{n,l}(f_0)\|_X=f_0(0)-V^{n+l}_n(f;\ 0)=\frac{1}{l+1}\sum_{\nu=n}^{n+l}\varepsilon_\nu. \tag{51}$$

由此可知当 $n=0$ 时 (5) 的左半式成立.

设 $n>0$. 据 §3 的命题, 对于数列 $\{\varepsilon_n,\ \varepsilon_{n+1},\ \cdots,\ \varepsilon_{2n+l},\ 0\cdots\}$ 存在

$$\{\eta_k\}_{k=0}^{\infty}=\{\eta_0,\ \eta_1,\ \cdots,\ \eta_{n+l},\ 0,\ \cdots\}$$

具有下列性质:

(a) $\eta_k\leqslant\varepsilon_{n+k}$　$(k\in Z_+)$;

(b) $\Delta^r\eta_k\geqslant0$　$(r=1,\ 2,\ \cdots,\ N,\ k\in Z_+)$;

(c) 对于任意的单调降非负数列 $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$\sum_{\nu=0}^{n+l}\eta_\nu\cdot u_\nu\geqslant\alpha_N\sum_{\nu=0}^{n+l}\varepsilon_{\nu+n}\cdot u_\nu,$$

其中 $\alpha_N>0$ 只与 N 有关。

令 $\eta_{\bar{\nu}}=\eta_{\nu_1,\cdots,\nu_N}=\eta_{\nu_1+\cdots+\nu_N-N}$, 作函数

$$f_n(\bar{x})=\beta_N\left(\prod_{i=1}^{N}\sin nx_i\right)\sum_{\bar{\nu}=\bar{1}}^{\overline{2n}}\eta_{\bar{\nu}}\prod_{i=1}^{N}\frac{\sin\nu_ix_i}{\nu_i},$$

其中 $\overline{2n}=(2n,\ \cdots,\ 2n)$, $\bar{1}=(1,\ \cdots,\ 1)$, 求和是 N 重的, $\beta_N>0$ 是只与 N 有关的适当的常数, 使得 $f_n\in C(\varepsilon)$——这是做得到的, 参见定理 2 的证明. f_n 展开为

$$f_n(\bar{x})=\frac{1}{2^N}\beta_N\sum_{\bar{\nu}=\bar{1}}^{\overline{2n}}\eta_{\bar{\nu}}\prod_{i=1}^{N}\frac{\cos(n-\nu_i)x_i-\cos(n+\nu_i)x_i}{\nu_i}.$$

可见

$$V_n^{n+l}(f_n;\ \bar{x})=\frac{1}{2^N}\beta_N\sum_{\bar{\nu}=\bar{1}}^{\overline{2n}}\eta_{\bar{\nu}}\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\nu_i}\left[\cos(n-\nu_i)x_i+\left(1-\frac{\tilde{\nu}_i}{l+1}\right)\cos(n+\nu_i)x_i\right]$$
$$=\frac{\beta_N}{2^N}\sum_{\bar{\nu}=\bar{1}}^{\overline{2n}}\eta_{\bar{\nu}}\prod_{i=1}^{N}\left\{\frac{\cos(n-\nu_i)x_i-\cos(n+\nu_i)x_i}{\nu_i}+\frac{\tilde{\nu}_i}{\nu_i(l+1)}\cos(n+\nu_i)x_i\right\}. \tag{52}$$

式中

$$\tilde{\nu}_i=\begin{cases}\nu_i, & \text{当 } \nu_i\leqslant l \text{ 时},\\ l+1, & \text{当 } \nu_i>l \text{ 时}.\end{cases} \tag{53}$$

于是

$$\|R_{n,l}(f_n)\|_C\geqslant V_n^{n+l}(f_n;\ \bar{0})-f_n(\bar{0})=\frac{\beta_N}{2^N}\sum_{\bar{\nu}=\bar{1}}^{\overline{2n}}\eta_{\bar{\nu}}\prod_{i=1}^{N}\frac{\tilde{\nu}_i}{\nu_i(l+1)}$$
$$\geqslant\frac{\beta_N}{2^N}\sum_{\bar{\nu}=\bar{1}}^{\overline{2n}}\eta_{\bar{\nu}}\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\nu_i+l+1}. \tag{54}$$

由于

$$\sum_{\bar{\nu}=\bar{1}}^{\overline{2n}}\eta_{\bar{\nu}}\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\nu_i+l+1}\geqslant\sum_{\nu_1=N}^{2n+N-1}\sum_{\nu_2=N-1}^{\nu_1-1}\cdots\sum_{\nu_N=1}^{\nu_{N-1}-1}\eta_{\nu_1-N}\frac{1}{\nu_1-\nu_2+l+1}\cdots\frac{1}{\nu_{N-1}-\nu_N+l+1}$$
$$\cdot\frac{1}{\nu_N+l+1}\geqslant C_N\sum_{\nu=0}^{2n-1}\eta_\nu\frac{\ln^{N-1}\left(1+\frac{\nu+1}{l+1}\right)}{\nu+l+1}, \tag{55}$$

其中 $C_N>0$ 只与 N 有关，所以，存在常数 $\beta'_N>0$ 使

$$V_n^{n+l}(f_n;\ \bar{0})-f_n(\bar{0})\geqslant\beta'_N\sum_{\nu=0}^{2n-1}\eta_\nu\frac{\ln^{N-1}\left(1+\frac{\nu+1}{l+1}\right)}{\nu+l+1}. \tag{56}$$

取 $f^*(\bar{x})=\frac{1}{2}(f_0(x_1)-f_n(\bar{x}))$，则 $f^*\in C(\varepsilon)$，且由(51)和(56)得

$$\|R_{n,l}(f^*)\|_C\geqslant f^*(0)-V_n^{n+l}(f^*;\bar{0})$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{l+1}\sum_{\nu=0}^{l}\varepsilon_{\nu+n}+\beta'_N\sum_{\nu=0}^{2n-1}\frac{\eta_\nu\ln^{N-1}\left(1+\frac{\nu+1}{l+1}\right)}{\nu+l+1}\right\}. \tag{57}$$

由此，兼顾 $l<n$ 和 $l\geqslant n$ 两种情形并利用 $\{\eta_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的性质(c)，适当取 $C'_N>0$，得到

$$\|R_{n,l}(f^*)\|_C\geqslant C'_N\sum_{\nu=0}^{n+l}\frac{\varepsilon_{\nu+n}}{\nu+l+1}\left(1+\ln\frac{\nu+l+1}{l+1}\right)^{N-1}. \tag{58}$$

显然，因子$\left(1+\ln\frac{\nu+l+1}{l+1}\right)^{N-1}$可以换为 $\ln^{N-1}\left(3+\frac{\nu}{l+1}\right)$.

从证明可见，所取的极值元 f^* 只与 n 有关而与 l 无关。这是由于 f_0 与 l 无关，它控制了 $n\leqslant l$ 的情形.

2° $X=L$ 的情形.

若 $l\geqslant n$，利用 Байбородов, С. П.[6] 关于一元函数的结果，知 N 元时有

$$\sup_{f\in L(\varepsilon)}\|f-V_n^{n+l}(f)\|_L\geqslant C'_1\sum_{\nu=0}^{n+l}\frac{\varepsilon_{\nu+n}}{\nu+l+1}$$
$$\geqslant\frac{C'_1}{(1+\ln 3)^{N-1}}\sum_{\nu=0}^{n+l}\frac{\varepsilon_{\nu+n}}{\nu+l+1}\left(1+\ln\frac{\nu+l+1}{l+1}\right)^{N-1}\quad(l\geqslant n). \tag{59}$$

设 $l<n$. 同 1° 一样选一个 $\{\eta_k\}_{k=0}^{\infty}$, 其满足的条件(b)加强到 $r=1, 2, \cdots, 2N$. 然后令 $\eta_{\bar{\nu}}=\eta_{\nu_1+\cdots+\nu_N}$. 作函数(与 n 有关)

$$g_N(\bar{x})=\frac{\beta_N}{\pi^N}\left(\prod_{i=1}^{N}\cos(n+1)x_i\right)\sum_{\bar{\nu}=\bar{0}}^{\overline{2n}}\lambda_{\bar{\nu}}\eta_{\bar{\nu}}\prod_{i=1}^{N}\cos\nu_i x_i,$$

式中 $\lambda_{\bar{\nu}}=2^{-\theta}$, θ 是 $\bar{\nu}$ 的零分量的个数.

易见(参见 § 4), $\beta_N>0$ 取得适当时, $g_N\in L(\varepsilon)$. 显然

$$V_n^{n+l}(g_N;\ \bar{x})=\frac{\beta_N}{(2\pi)^N}\sum_{\bar{\nu}=\bar{0}}^{\overline{2n}}\lambda_{\bar{\nu}}\cdot\eta_{\bar{\nu}}\prod_{i=1}^{N}\left\{\left(1-\frac{\tilde{\nu}_i}{l+1}\right)\cos(n+1-\nu_i)x_i+\left(1-\frac{\tilde{\tilde{\nu}}_i+1}{l+1}\right)\cos(n+1+\nu_i)x_i\right\},$$

其中

$$\tilde{\nu}_i=\begin{cases}0, & \text{当 } \nu_i=0 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } \nu_i>0 \text{ 时},\end{cases}\qquad \tilde{\tilde{\nu}}_i=\begin{cases}\nu_i, & \text{当 } \nu_i<l \text{ 时},\\ l, & \text{当 } \nu_i\geqslant l \text{ 时}.\end{cases}$$

再取

$$\varphi_N(\bar{x})=\frac{1}{\varkappa^N}\left(\prod_{i=1}^{N}\sin(n+1)x_i\right)\sum_{\bar{\nu}=\bar{1}}^{\overline{2n}}\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{\sin\nu_i x_i}{\nu_i}\right),$$

那么, $\|\varphi_N\|_C\leqslant 1$. 于是

$$\|R_{n,l}(g_N)\|_L\geqslant\int_{Q_N}\{g_N(\bar{x})-V_n^{n+l}(g_N;\ \bar{x})\}\varphi_N(\bar{x})d\bar{x}=-\int_{Q_N}V_n^{n+l}(g_N;\ \bar{x})\cdot\varphi_N(\bar{x})d\bar{x}$$
$$=\frac{\beta_N}{(4\pi\varkappa)^N}\sum_{\bar{\nu}=\bar{1}}^{\overline{2n}}\eta_{\bar{\nu}}\prod_{i=1}^{N}\frac{\tilde{\tilde{\nu}}_i+1}{l+1}\cdot\frac{\pi}{\nu_i}\geqslant\frac{\beta_N}{(4\varkappa)^N}\sum_{\bar{\nu}=\bar{1}}^{\overline{2n}}\eta_{\bar{\nu}}\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\nu_i+l+1}.$$

利用(55)得知有常数 $\gamma_N>0$ 使

$$\int_{Q_N}R_{n,l}(g_N)\varphi_N d\bar{x}\geqslant\gamma_N\sum_{\nu=0}^{2n-1}\frac{\eta_{\nu+N}\ln^{N-1}\left(1+\dfrac{\nu+1}{l+1}\right)}{\nu+l+1}. \tag{60}$$

取 $g^*(\bar{x})=\frac{1}{2}(g_1(x_1)+g_N(\bar{x}))$, $\varphi(\bar{x})=\frac{1}{3}\{\cos(n+1)x_1+\varphi_1(x_1)+\varphi_N(\bar{x})\}$, 那么 $g^*\in L(\varepsilon)$, $\|\varphi\|_C\leqslant 1$. 利用(60)得

$$\|R_{n,l}(g^*)\|_L\geqslant\int_{Q_N}R_{n,l}(g^*)\varphi d\bar{x}\geqslant\frac{\beta_1}{12(l+1)}(2\pi)^{N-1}\eta_0$$
$$+\frac{\gamma_1}{6}(2\pi)^{N-1}\sum_{\nu=0}^{2n-1}\frac{\eta_{\nu+1}}{\nu+l+1}+\frac{\gamma_N}{6}\sum_{\nu=0}^{2n-1}\frac{\eta_{\nu+N}\ln^{N-1}\left(1+\dfrac{\nu+1}{l+1}\right)}{\nu+l+1}. \tag{61}$$

注意到 $l<n$, 使用 $\{\eta_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的性质(c), 知只有与 N 有关的常数 $C'_N>0$, 使

$$\|R_{n,l}(g^*)\|_L\geqslant C'_N\sum_{\nu=0}^{n+l}\frac{\varepsilon_{\nu+n}}{\nu+l+1}\left(1+\ln\frac{\nu+l+1}{l+1}\right)^{N-1}. \tag{62}$$

由(50)、(58)、(59)和(62)证得 § 1 的定理, 即(5).

本文是在孙永生老师指导下完成的, 谨表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Осколков, К. И., К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры, *Матем. заметки*, **18**: 4(1975), 515—526.

[2] Осколков, К. И., К неравенству Лебега в среднем, *Матем. заметки*, **25**: 4(1979), 551—555.

[3] 孙永生，周期函数用其付立叶部分和的平均逼近，数学年刊，**1**: 2(1980), 181—190.

[4] Stečkin, S. B., On the approximation of periodic functions by de la Vallée Poussin sums, *Analysis mathematica*, **4**(1978), 61—74.

[5] Дамен, В., О наилучшем приближении и суммах Валле Пуссена, *Матем. заметки*, **23**: 5(1978), 671—683.

[6] Байбородов, С. П., Приближение функций суммами Валле Пуссена, *Матем. заметки*, **27**: 1(1980), 33—48.

[7] Стечкин, С. Б. О приближении периодических фунский суммами Фейера, *Тр. матем ин-та имени В. А. Стеклова, АН СССР*, **62**(1961), 48—60.

[8] 孙永生，二元周期连续函数用它的方形付立叶部分和的一致逼近，北京师范大学学报(自然科学版)，**3**(1979), 16—35.

[9] 孙永生，关于一个周期函数类用三角多项式近迫问题的一点注记，北京师范大学学报(自然科学版)，**2**(1959), 36—45.

[10] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, Москва, 1960.

[11] Zygmund, A. Trigonometric series, Volume I, Cambridge, 1959.

THE ESTIMATION FOR THE MULTIPLE DE LA VALLÉE POUSSIN SQUARE REMAINDERS

WANG KUNYANG

(*Beijing Normal University*)

ABSTRACT

Let $Q_N=\{\bar{x}=(x_1, \cdots, x_N)\mid -\pi\leqslant x_i<\pi,\ i=1, \cdots, N\}$ and $X(Q_N)$ denote $L(Q_N)$ and $C(Q_N)$. The square de la Vallée Poussin sums of $f\in X(Q_N)$ are defined by

$$V_n^{n+l}(f;\bar{x})=\frac{1}{\pi^N}\int_{Q_N} f(\bar{x}+\bar{t})\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{l+1}\sum_{\nu=n}^{n+l} D_\nu(t_i)\right)d\bar{t}\quad (n,\ l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

where $D_\nu(t)=\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\Big/2\sin t/2$. The differences $R_{n,l}(f;\bar{x})=f(\bar{x})-V_n^{n+l}(f;\bar{x})$ are called square remainders. We denote by $E_k(f)_X$ the best approximation of the function $f\in X(Q_N)$ by N-multiple trigonometric polynomials of order K.

Theorem Let $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ be a sequence such that $\varepsilon_n\downarrow 0\ (n\to\infty)$, the class $X(\varepsilon)=\{f\in X(Q_N)\mid E_k(f)_X\leqslant\varepsilon_k,\ k=0, 1, 2, \cdots\}$. Then

$$C'_N\sum_{\nu=0}^{n+l}\frac{\varepsilon_{\nu+n}\ln^{N-1}\left(3+\frac{\nu}{l+1}\right)}{\nu+l+1}\leqslant\sup_{f\in X(\varepsilon)}\|R_{n,l}(f)\|_X\leqslant C_N\sum_{\nu=0}^{n+l}\frac{\varepsilon_{\nu+n}\ln^{N-1}\left(3+\frac{\nu}{l+1}\right)}{\nu+l+1},$$

where $C_N>C'_N>0$ are constants depending only on N.