数 学 年 刊
3 (6) 1982

二阶微分算符在 R^n 上生成的最小马氏过程

龚 光 鲁
(北京大学)

在 R^n 全空间以算符

$$\Omega u=\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_i b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u$$

为无穷小特征构造马氏过程的问题由来已久．在 $c(x)\equiv 0$ 时可以用随机微分方程构造局部扩散再一片片地接起来．Nelson[8] 在同样情形下用半群构造局部扩散再用扩张测度的办法也得到了最小扩散过程．这个方法应用于 $c(x)\neq 0$ 时有困难，因为它的基点是在 $t>0$ 轨道连续，而此时过程恰恰是中断的，在灭绝时刻就不连续．在 $c(x)\neq 0$ 时 Дынкин 的书中[5] 构造的扩散过程要求系数的有界性，这个要求太强．用 Fukushima[7], Silverstein[9] 的方法可在对称条件下（即要求 $(b_1(x), \cdots, b_n(x))(a_{ij}(x))^{-1}\begin{pmatrix} dx_1\\ \vdots\\ dx_n\end{pmatrix}$ 为全微分的条件下）构造一个马氏过程．对非对称情形，钱敏[4] 讨论了最小半群及其遍历性，系数条件较宽，对 C^∞ 系数、非退化椭圆型、$c(x)\leqslant 0$ 及 $\operatorname{div}\boldsymbol{b}(x)$ 有下界$\left(\boldsymbol{b}(x)=\begin{pmatrix} b_1(x)\\ \vdots\\ b_n(x)\end{pmatrix}\right)$条件下证明了最小半群有一个积分表示，得到了一个 pp 地满足 Колмогоров 方程的"迁移函数"．但是用[4]中的共轭半群方法证明这个迁移函数点点地满足 Колмогоров 方程有困难，因而不能得到马氏过程并研究其轨道．本文除了去除不必要的 $\operatorname{div}\boldsymbol{b}(x)$ 有下界条件外，引用[4]中的其它条件．这里，我们直接用转移函数来扩张，获得了以 Ω 为无穷小特征的转移函数（点点满足 K 氏方程），由此构造了一个马氏过程，它是连续轨道的标准过程[10]，称为最小（扩散）过程，本文还讨论了这个最小过程在相空间的某个可测变换群下的不变性．我们的基本假定是：

1° $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)\in C^\infty$,

2° 存在 $\gamma(x)>0$, 使

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\gamma(x)\sum_{i=1}^n\xi_i^2,$$

3° 吸收系数 $c(x)\leqslant 0$.

令 G_m 为 R^n 中原点为中心 m 为半径的开球，Γ_m 为 G_m 的边界，$C^\circ(\overline{G}_m)=\{f\colon f$ 在 $\overline{G}_m$ 连续，$f|_{\Gamma_m}=0\}$，$D_0^\infty(G_m)=\{f\colon f\in C^\infty$, f 支集紧且 $\subset G_m\}$.

本文 1980 年 9 月 12 日收到．

由[4]可知：对 $f\in C^\circ(\overline{G}_m)$，方程

$$\begin{cases}(\lambda-\Omega)u=f \quad (\lambda>0),\\ u|_{\Gamma_m}=0\end{cases}$$

有解．记这个解在 $\overline{G}_m$ 上的限制为 $S_\lambda^{(m)}f(x)$．显然 $S_\lambda^{(m)}$ 是线性的，而且由 Ω 的椭圆性利用极大原理可知 $S_\lambda^{(m)}$ 是正的（$f\geqslant 0\Rightarrow S_\lambda^{(m)}f\geqslant 0$）及收缩的（$\|\lambda S_\lambda^{(m)}\|_{C^\circ(\overline{G}_m)}\leqslant 1$）与[1]类似地可证 $\{S_\lambda^{(m)},\ \lambda>0\}$ 是一个豫解式．

另一方面 $D_0^\infty(G_m)\subset S_\lambda^{(m)}D_0^\infty(G_m)\subset S_\lambda^{(m)}C^\circ(\overline{G}_m)$，因此 $S_\lambda^{(m)}C^\circ(\overline{G}_m)$ 在 $C^\circ(\overline{G}_m)$ 稠．与[1]类似地用 Yosida 反演公式就得到 $C^\circ(\overline{G}_m)$ 上一个以 $S_\lambda^{(m)}$ 为豫解式的强连续收缩正半群 $T_t^{(m)}$．

$C^\circ(\overline{G}_m)$ 实际上就是[5]中的 $\hat{C}(G_m)$．因此存在一个马氏过程以 $T_t^{(m)}$ 为 $\hat{C}(G_m)$ 半群，记这个过程的转移函数为 $P^{(m)}(t,\ x,\ \Gamma)$ $(x\in G_m,\ \Gamma\in\mathscr{B}(G_m))$，$P^{(m)}(t,\ x,\ \Gamma)$ 是以 $\Omega|_{D_0^\infty(G_m)}$ 的某个扩张为生成元的转移函数中的最小者．

自然地可以认为 $C^\circ(\overline{G}_m)\subset C^\circ(\overline{G}_{m+1})$．用 Ω 的极大原则由[4]可得：对 $f\geqslant 0$，$f\in C^\circ(\overline{G}_m)$ 及 $x\in G_m$ 有 $S_\lambda^{(m)}f(x)\leqslant S_\lambda^{(m+1)}f(x)$．因此对 $x\in G_m$ 及 $\Gamma\in\mathscr{B}(G_m)$ 有

$$P^{(m)}(t,\ x,\ \Gamma)\leqslant P^{(m+1)}(t,\ x,\ \Gamma).$$

对于 $\Gamma\in\mathscr{B}(R^n)$，令

$$\hat{P}^{(m)}(t,\ x,\ \Gamma)=\begin{cases}P^{(m)}(t,\ x,\ \Gamma\cap G_m), & x\in G_m,\\ 0, & x\overline{\in} G_m,\end{cases}$$

那末

$$\hat{P}^{(m)}(t,\ x,\ \Gamma)\leqslant\hat{P}^{(m+1)}(t,\ x,\ \Gamma)\quad(\leqslant 1).$$

所以当 t, x 固定时，极限 $\lim\limits_{m\to\infty}\hat{P}^{(m)}(t,\ x,\ \Gamma)$ 存在，我们记它为 $P(t,\ x,\ \Gamma)$．显然

$$P(t,\ x,\ R^n)\leqslant 1.$$

引理 1 $P(t,\ x,\ \Gamma)$ 满足 Колмогоров 方程（因而是转移函数），它生成的半群 T_t 在 $\hat{C}(R^n)$ 强连续，对 $f\in\hat{C}(R^n)$，T_tf 的 Laplace 变换为 $S_\lambda f$，此处的 $S_\lambda f$ 是指[4]中方程 $(\lambda-\Omega)u=f$ 在 R^n 的最小解．T_t 的生成元 A 是 $\Omega|_{C_2^0}$ 的某个扩张（C_2^0 为具紧支集的二阶连续可微函数类）．

证 对 $x\in G_m$，$\Gamma\in\mathscr{B}(R^n)$ 有

$$\begin{aligned}\hat{P}^{(m)}(t+s,\ x,\ \Gamma)&=P^{(m)}(t+s,\ x,\ \Gamma\cap G_m)=\int_{G_m}P^{(m)}(t,\ x,\ dz)P^{(m)}(s,\ z,\ \Gamma\cap G_m)\\&=\int_{R^n}\hat{P}^{(m)}(t,\ x,\ dz)\hat{P}^{(m)}(s,\ z,\ \Gamma).\end{aligned}\tag{1}$$

差项

$$\begin{aligned}&\left|\int\hat{P}^{(m)}(t,\ x,\ dz)\hat{P}^{(m)}(s,\ z,\ \Gamma)-\int P(t,\ x,\ dz)P(s,\ z,\ \Gamma)\right|\\&=\int P(t,\ x,\ dz)[P(s,\ z,\ \Gamma)-\hat{P}^{(m)}(s,\ z,\ \Gamma)]\\&\quad+\left(\int P(t,\ x,\ dz)\hat{P}^{(m)}(s,\ z,\ \Gamma)-\int\hat{P}^{(m)}(t,\ x,\ dz)\hat{P}^{(m)}(s,\ z,\ \Gamma)\right)\end{aligned}$$

中的第一项由有界收敛趋于 $0\ (m\to\infty)$，第二项为

$$\int \hat{P}^{(m)}(s,z,\Gamma)(P(t,x,dz)-\hat{P}^{(m)}(t,x,dz)).$$

由于 $P(t,x,\Gamma)-\hat{P}^{(m)}(t,x,\Gamma)$ 是非负测度及 $\hat{P}^{(m)}(s,z,\Gamma)\leqslant 1$，因此上式不大于

$$\int P(t,x,dz)-\hat{P}^{(m)}(t,x,dz)$$

$$=P(t,x,R^n)-\hat{P}^{(m)}(t,x,R^n)\to 0(m\to\infty),$$

在(1)中令 $m\to\infty$，即得 $P(t,x,\Gamma)$ 的 Колмогоров 方程.

在[4]中证明了 $(\lambda-\Omega)u=f$ 的最小解 $S_\lambda f$ 是 $C(R^n)$ 上豫解式且在含 $\hat{C}(R^n)$ 的某闭子空间上生成一个强连续半群 $\hat{T}_t$(在[4]中记成 T_tf，本文为了区别改记 $\hat{T}_tf$). 对 $f\in C_2^0$ 必存在一个 m，使 $f\in C^0(\overline{G}_m)$. 由[4]知 $S_\lambda^{(m)}f(x)\to S_\lambda f(x)$ 但其左方是

$$\int f(y)\hat{P}^{(m)}(t,x,dy)$$

的 Laplace 变换，由

$$\int f(y)\hat{P}^{(m)}(t,x,dy)\to\int f(y)P(t,x,dy)=T_tf(x)$$

及单调收敛性立知 $S_\lambda f(x)$ 是 T_tf 的 Laplace 变换. 因此

$$T_tf=\hat{T}_tf.$$

于是 T_tf 在 $f\in C_2^0$ 时也强连续，从而在 C_2^0 的闭线性包 $\hat{C}(R^n)$ 上强连续. 再利用有界收敛性可得：对 $f\in\hat{C}(R^n)$，$S_\lambda f(x)$ 是 $T_tf(x)$ 的 Laplace 变换. 由强连续性知 $S_\lambda f$ 是 T_tf 的 Laplace 变换($f\in\hat{C}(R^n)$).

若 $f\in C_2^0$，则 $g\equiv(\lambda-\Omega)f\in\hat{C}(R^n)$ 且有紧支集. 对 m 充分大，有 $f,\ g\in C^0(\overline{G}_m)$，于是 $f=S_\lambda^{(m)}g$. 令 $m\to\infty$ 得 $f=S_\lambda g$. 因此

$$(\lambda-\Omega)S_\lambda g=g=(\lambda-A)S_\lambda g.$$

从而有

$$\Omega f=\Omega S_\lambda g=AS_\lambda g=Af.$$

证毕.

引理 2　若把对应于 $c(x)\equiv 0$ 时由前面所定义的转移函数记为 $\widetilde{P}(t,x,\Gamma)$，那末

$$P(t,x,\Gamma)\leqslant\widetilde{P}(t,x,\Gamma)$$

而且它们都是满足[6]中 $N(K)$ 条件的正规转移函数(K 为 R^n 的任一紧集，$N(K)$ 在[6]中写成 $N(\Gamma)$).

证　在 $c(x)\equiv 0$ 时，取 m 充分大，使 $K\subset G_m$，对 $x\in K$，$\varepsilon>0$ 可取 $\eta(\varepsilon)>0$ 及 $f_\varepsilon\in D_0^\infty(G_m)$ 使

$$f_\varepsilon\leqslant 1,\ f_\varepsilon|_{u_{\eta(\varepsilon)}(x)}\equiv 1,\quad 0\leqslant\sup_{y\in u_\eta(x)}f_\varepsilon(y)=\beta<1 \tag{2}$$

($u_\eta(x)$ 表示 x 的 η 邻域).

先证($\widetilde{P}^{(m)}$ 对应于 $\widetilde{P}$ 恰如 $P^{(m)}$ 之对应于 P 一样)

$$\sup_{x\in k}(1-\widetilde{P}^{(m)}(t,x,u_\varepsilon(x)))=0(t)\quad(t\downarrow 0). \tag{3}$$

用反证法. 如果(3)不成立，那末存在 $\alpha>0$，$t_k\to 0$，$x_k\to x\in k$，使

$$1-\widetilde{P}^{(m)}(t_k,x_k,u_\varepsilon(x_k))\geqslant\alpha t_k.$$

由 k 充分大时有 $u_{\varepsilon/2}(x)\subset u_\varepsilon(x_k)$，所以

$$1-\widetilde{P}^{(m)}(t_k,x_k,u_{\varepsilon/2}(x))\geqslant\alpha t_k.$$

记 $\widetilde{P}^{(m)}(t, x, \Gamma)$ 对应的半群为 $\widetilde{T}_t^{(m)}$，生成元为 $\widetilde{A}^{(m)}$，那末 $f_{s/2}\in D_0^\infty(G_m)\subset\mathscr{D}(\widetilde{A}^{(m)})$. 当 k 充分大时又有 $x_k\in u_{\eta(s/2)}(x)$，因而 $f_{s/2}$ 在 x_k 附近为 1. 再由 $C(x)\equiv 0$ 得

$$\widetilde{A}^{(m)}f_{s/2}(x_k)=\Omega f_{s/2}(x_k)=0.$$

于是

$$\frac{1-\widetilde{T}_{t_k}^{(m)}f_{s/2}(x_k)}{t_k}\to 0\quad(k\to\infty). \tag{4}$$

但另一方面我们有

$$\begin{aligned}1-\widetilde{T}_{t_k}^{(m)}f_{s/2}(x_k)&\geqslant 1-\widetilde{P}^{(m)}(t_k, x_k, u_{s/2}(x))-\beta\widetilde{P}^{(m)}(t_k, x_k, (u_{s/2}(x))^c)\\&\geqslant(1-\beta)(1-\widetilde{P}^{(m)}(t_k, x_k, u_{s/2}(x)))\geqslant(1-\beta)\alpha t_k.\end{aligned}$$

($(u_{s/2}(x))^c$ 表示 $u_{s/2}(x)$ 在 G_m 的补集)这是与(4)矛盾的，因此(3)必须成立. 于是

$$\begin{aligned}\sup_{x\in k}\widetilde{P}(t, x, (u_s(x))^c)&\leqslant\sup_{x\in k}(1-\widetilde{P}(t, x, u_s(x)))\leqslant\sup_{x\in k}(1-\hat{P}^{(m)}(t, x, u_s(x)))\\&=\sup_{x\in k}(1-\widetilde{P}^{(m)}(t, x, u_s(x)))=0(t).\end{aligned}$$

因而 $\widetilde{P}(t, x, \Gamma)$ 满足 $N(k)$ 条件，现在设 $c(x)\not\equiv 0$.

取 $f\in C_2^0$ 且 $f\geqslant 0$. 令 m 充分大使 $\operatorname{supp}f\subset G_m$. 记

$$w_t=\widetilde{T}_t^{(m)}-T_t^{(m)}f\quad(T_t^{(m)}\text{ 为 }P^{(m)}(t, x, \Gamma)\text{ 之半群}).$$

于是

$$\frac{dw_t}{dt}=(\Omega-c(x))\widetilde{T}_t^{(m)}f-\Omega T_t^{(m)}f=\Omega(\widetilde{T}_t^{(m)}f-T_t^{(m)}f)-c(x)\widetilde{T}_t^{(m)}f\geqslant\Omega w_t. \tag{5}$$

同时

$$\lim_{t\downarrow 0}w_t=f(x)-f(x)=0, \tag{6}$$

$$\varliminf_{x\to\Gamma_m}\inf_{0\leqslant t\leqslant s}w_t(x)\geqslant\varliminf_{x\to\Gamma_m}[\inf_{0\leqslant t\leqslant s}\widetilde{T}_t^{(m)}f(x)-\sup_{0\leqslant t\leqslant s}T_t^{(m)}f(x)]=I_1+I_2,$$

而

$$|I_1|\leqslant\varlimsup_{x\to\Gamma_m}\sup_{0\leqslant t\leqslant s}\widetilde{T}_t^{(m)}f(x).$$

由[5](定理 3.7)上述右方的项及 I_2 都为 0. 因此

$$\varliminf_{x\to\Gamma_m}\inf_{0\leqslant t\leqslant s}w_t(x)\geqslant 0. \tag{7}$$

由(5)、(6)、(7)可知在 $0\leqslant t\leqslant s$ 有 $w_t(t)\geqslant 0$. 因为如果相反，那末 $w_t(x)$ 必在 G_m 中某点及某个 t 处取负值，因而必在某点 (t_0, x_0) 处取负极小. 由极大原则可知

$$\Omega w_{t_0}(x_0)>0. \tag{8}$$

另一方面，既然 w_t 在 (t_0, x_0) 取极值，就应有

$$\left.\frac{dw_t}{dt}\right|_{(t_0, x_0)}=0. \tag{9}$$

这样得到的(8)，(9)是与(5)矛盾的. 因此必须有 $w_t(x)\geqslant 0\,(0\leqslant t\leqslant s)$. 又由 s 的任意性知 $w_t(x)\geqslant 0\,(t\geqslant 0,\ x\in\overline{G}_m)$，此即 $\widetilde{T}_t^{(m)}f(x)\geqslant T_t^{(m)}f(x)$，从而对 $x\in G_m$ 有 $\widetilde{P}^{(m)}(t, x, \Gamma)\geqslant P^{(m)}(t, x, \Gamma)$，于是对 $x\in R^n$ 有

$$\widetilde{P}(t, x, \Gamma)\geqslant P(t, x, \Gamma).$$

由 $\widetilde{P}(t, x, \Gamma)$ 满足 $N(k)$ 条件知 $P(t, x, \Gamma)$ 满足 $N(k)$ 条件. 又由 $P^{(m)}(t, x, \Gamma)$ 的正规性知 $P(t, x, \Gamma)$ 是正规的. 证毕.

改记 $c(x)\equiv 0$ 时的 $\hat{P}^{(m)}(t, x, \Gamma)$ 为 $\widetilde{P}^{(m)}(t, x, \Gamma)$，又记[8]中构造的马氏转移函数为 $P_0(t, x, \Gamma)$，那末有

$$\widetilde{P}^{(m)}(t,x,\Gamma)\leqslant P_0(t,x,\Gamma).$$

因而由引理 2 得

$$P(t,x,\Gamma)\leqslant\widetilde{P}(t,x,\Gamma)=\lim_{m\to\infty}\widetilde{P}^{(m)}(t,x,\Gamma)\leqslant P_0(t,x,\Gamma).$$

从[8]中构造 $P_0(t, x, \Gamma)$ 的方法可知在那里所对应的取值于 R^n 的马氏过程(记为 $Y=(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, y_t, \theta_t, P^x)$)是轨道连续的标准过程(其中 $\mathscr{F}$ 是 $\sigma(y_t, t\geqslant 0)$ 关于一切弱分布 P^μ 的完备化, $\mathscr{F}_t$ 是 $\sigma(y_u, u\leqslant s)$ 在 $\mathscr{F}$ 中对一切 P^μ 的完备化关于 $s>t$ 的交).

引理 3 存在一个轨道连续的标准过程, 它以 $P(t, x, \Gamma)$ 为转移函数.

证 因为正规转移函数 $P(t,x,\Gamma)\leqslant P_0(t,x,\Gamma)$ 以及 Y 是标准过程, 由[10]可知存在 Y 的一个右连续可乘泛函 M_t, 使 $P(t, x, \Gamma)$ 由 M_t 生成. 另一方面因为 $P(t, x, \Gamma)$ 的正规性有 $P(0, x, R^n)=1(\forall x\in R^n)$, 所以 $M_0=\mathbf{1}_{R^n}(y_0)=1$. $p.p.$ $P^x(\forall x\in R^n)$(这里 $\mathbf{1}_A$ 表示集 A 的示性函数), 于是 R^n 的一切点都是 M_t 的持久点, 因此 M_t 是正则的, 从而也是 Y 的强可乘泛函. 于是标准过程 Y 的由 M_t 构造的规范子过程[10]

$$\hat{Y}=(\hat{\Omega}, \hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{F}}_t, \hat{y}_t, \hat{\theta}_t, \hat{P}^x)$$

也是标准过程, 而且由其构造方法可知其转移函数恰是 $P(t, x, \Gamma)$. 由引理 2 可知[10]中命题(9.10)条件满足, 因而 $\hat{y}_t$ 是轨道连续的(事实上由 y_t 轨道连续及 $\hat{y}_t$ 的构造法也可直接看出). 证毕.

综合引理 1 至 3, 我们得到:

定理 1 存在一个轨道连续的标准过程(称为最小(扩散)过程), 它的转移函数生成的半群在 $\hat{C}(R^n)$ 上强连续, 它的豫解式 S_λ 作用在 $\hat{C}(R^n)$ 的元 f 上是方程 $(\lambda-\Omega)u=f$ 的最小解, 并且这个半群的生成元是 $\Omega|_{C_2^0}$ 的扩张.

注 对 $f\in C$ 一般地有

$$\mathrm{Lap}(T_t f(x))\geqslant S_\lambda f(x),$$

这是因为由[4]知存在 f_m, 它是支集在 G_m 内的紧支连续函数, 且 $f_m\uparrow f$, $S_\lambda^{(m)}f_m\uparrow S_\lambda f$. 由于

$$T_t^{(m)}f_m\leqslant T_t f_m\uparrow T_t f \quad (m\to\infty),$$

故

$$S_\lambda^{(m)}f_m(x)<\mathrm{Lap}\, T_t(x);$$

令 $m\to\infty$ 即得所要证的不等式.

下面讨论最小过程在相空间的某个可测变换群 G 下的不变性[5]. 因为可以用零概率轨道来扩大概率空间, 所以马氏过程在 G 下的不变性可以归结为其转移函数对 G 的不变性

$$P(t,x,\Gamma)=P(t,Tx,T\Gamma) \quad (\forall T\in G). \tag{10}$$

由[5]知(10)成立的必要条件为 $\forall T\in G$, $f\in\mathscr{D}(A)$ 当且仅当 $\check{f}^*\in\mathscr{D}(A)$, 而且恒有

$$(Af)(x)=(A\check{f})(Tx), \tag{11}$$

这里 A 是 $P(t, x, \Gamma)$ 的半群的生成元, 而

$$\check{f}(x)\equiv f(T^{-1}x) \quad (\text{即 } f(x)=\check{f}(Tx)),$$

(注意 $\check{f}$ 与 T 有关, 实际上是 $\check{f}_T$ 的省略写法).

当 $C_2^0\subset\mathscr{D}(A)$ 时, (11)显然也是(10)成立的充分条件.

对于最小过程, 我们有

定理 2 若 G 中的 T 都把紧集变成紧集且 Tx 二次连续可微, 则定理 1 中的 $P(t, x, \Gamma)$ 满足(10)的充要条件为 $\forall f\in C^2$ 及 $T\in G$ 有

$$(\Omega f)(x)=(\Omega \check{f})(Tx). \tag{12}$$

证 必要性 若(10)成立，由于 $C_2^0\subset\mathscr{D}(A)$，由(11)可知(12)对 C_2^0 函数正确．但 Ω 是局部的，对任意 $f\in C^2$ 及 $x\in R^n$ 存在一个 C_2^0 函数 f_1 与 f 在 x 附近相等(造一个在 x 附近取1且在 ∞ 邻域取0的 C^∞ 函数 φ，令 $f_1=f\varphi$ 即可)，于是

$$(\Omega f)(x)=(\Omega f_1)(x)=(\Omega\check{f}_1)(Tx)=(\Omega\check{f})(Tx),$$

因而(12)对 $f\in C^2$ 成立．

充分性分几步证明．

1° 证明对 $g\in C(R^n)$(有界连续类)算符 S_λ 与"∨"是交换的(其中 $S_\lambda g$ 含义如[4]，当 $g\in\hat{C}(R^n)$ 时它是 $P(t,x,\Gamma)$ 的半群 T_tg 之 Laplace 变换)．

不妨设 $g\geqslant 0$．于是 $u_0\equiv S_\lambda g$ 是 $(\lambda-\Omega)u=g$ 的最小解[4]．由(12)上式可写成

$$\lambda\check{u}_0(Tx)-(\Omega\check{u}_0)(Tx)=\check{g}(Tx),$$

即 $\check{u}_0$ 是 $(\lambda-\Omega)v=\check{g}$ 的解．我们进一步证明 $\check{u}_0$ 就是最小解．这是因为对于上述方程的任意一个解 v，可取 $w(x)=v(Tx)$，于是 $\check{w}(x)=v(x)$．再用(12)得

$$(\lambda-\Omega)w=\lambda\check{w}(Tx)-(\Omega\check{w})(Tx)=\lambda v(Tx)-(\Omega v)(Tx)=\check{g}(Tx)=g(x),$$

即 w 是 $(\lambda-\Omega)u=g$ 的解．由 u_0 的最小性应有 $u_0\leqslant w$ (即 $S_\lambda g\leqslant w$)，所以 $\check{u}_0(x)\leqslant\check{w}(x)=v(x)$．这说明 $\check{u}_0$ 是 $(\lambda-\Omega)v=\check{g}$ 的最小解，也就是

$$(S_\lambda^\vee g)=\check{u}_0=S_\lambda\check{g}.$$

2° 若 $S_\lambda^m=S_\lambda S_\lambda^{m-1}=\underbrace{S_\lambda\cdots S_\lambda}_{m\text{ 次}}$，则对 $g\in C(R^n)$ 有

$$(S_\lambda^{\check{m}}g)=S_\lambda^m\check{g}.$$

3° 记

$$\hat{\hat{C}}=\overline{\bigcap_m S_\lambda^m C(R^n)},$$

则运算"∨"保持 $\hat{\hat{C}}$ 不变：$\hat{\hat{C}}\xrightarrow{\text{"}\vee\text{"}}\hat{\hat{C}}$．

这是因为2°及运算"∨"与一致收敛闭包运算可交换之故．

4° 若 $\hat{T}_t$ 为[4]中的半群，$g\in\hat{\hat{C}}$，则有

$$(\hat{T}_t^\vee g)=\hat{T}_t\check{g}. \tag{14}$$

这是因为在 $\hat{\hat{C}}$ 上 $\hat{T}_t$ 是由 S_λ 经 Yosida 反演公式

$$\hat{T}_tg=(C(R^n))\lim_{\lambda\to\infty}e^{-\lambda t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^m}{m!}(\lambda S_\lambda)^m g.$$

(极限是在空间 $C(R^n)$ 意义下取的，即一致极限)表示的以及一致极限与"∨"运算交换的结果．

5° 对 $g\in\hat{C}(R^n)$ 有

$$(\hat{T}_t^\vee g)=T_t\check{g}. \tag{15}$$

这是因为由[4]知 $\hat{C}(R^n)\subset\hat{\hat{C}}$ 以及 $\check{g}\in\hat{C}(R^n)$，并且在 $\hat{C}(R^n)$ 上 T_t 与 $\hat{T}_t$ 是一样的(见定理1)

6° 由(15)利用典型逼近知 $P(t,x,\Gamma)$ 在 T 下之不变性．

推论 在定理2条件下，Ω 生成的最小(扩散)过程为 G 不变的充要条件为：$\forall f\in C^2$，$T\in G$ 有

$$(\Omega f)(x)=(\Omega\check{f})(Tx).$$

注　如果一个转移函数 $P(t, x, \Gamma)$ 是由 Ω 导出的，但未必是最小马氏过程的转移函数，则(12)未必是 $P(t, x, \Gamma)$ 在 G 下不变的充分条件．例如在一维情况($n=1$ 时)，而 $P(t, x, \Gamma)$ 是由一个非局部的 Feller 边界条件的豫解式所导出的转移函数，此时即使 Ω 满足(12)，$P(t, Tx, T\Gamma)$ 却并不等于 $P(t, x, \Gamma)$.

现在讨论一些特殊的 G.

设 G 是运动群的某个子群．G 中元素 T 的一般形式写成

$$Tx=Ox+\alpha\quad(O'O=\text{单位阵 } I),$$

此时

$$\check{f}(x)=f(O^{-1}(x-\alpha)),$$

$$(\Omega\check{f})(Tx)=(\Omega[f(O^{-1}(x'-\alpha))])\big|_{x'=Tx}.$$

令

$$\mathbf{1}_i=\begin{pmatrix}\delta_{i1}\\ \vdots\\ \delta_{in}\end{pmatrix},\quad \left(\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\right).$$

我们有

$$(\nabla\check{f}(x'))\big|_{Tx}\equiv\left(\left(\frac{\partial\check{f}}{\partial x_1}\right)(Tx),\ \cdots,\ \left(\frac{\partial\check{f}}{\partial x_n}\right)(Tx)\right)=(\nabla[f(O^{-1}(x'-\alpha))])_{Tx}$$

$$=[(\nabla f)(O^{-1}(x'-\alpha))O^{-1}]_{Tx}=(\nabla f)(x)O^{-1}.\tag{16}$$

由(16)可得

$$\frac{\partial^2\check{f}}{\partial x_i\partial x_j}\bigg|_{Tx}=\left(\nabla\frac{\partial\check{f}}{\partial x_i}\right)_{Tx}\mathbf{1}_j=[\nabla(\nabla[f(O^{-1}(x-\alpha))]\mathbf{1}_i)]_{Tx}\mathbf{1}_j$$

$$=(\nabla[(\nabla f)(O^{-1}(x-\alpha))O^{-1}\mathbf{1}_i])_{Tx}\mathbf{1}_j$$

$$=(\nabla[((\nabla f)O^{-1}\mathbf{1}_i)(O^{-1}(x-\alpha))]_{Tx}\mathbf{1}_j=\nabla(\nabla f(x)O^{-1}\mathbf{1}_i)O^{-1}\mathbf{1}_j$$

$$=(O^{-1}\mathbf{1}_i)'H_f(x)O^{-1}\mathbf{1}_j=\mathbf{1}_i'OH_f(x)O^{-1}\mathbf{1}_j,$$

其中( )′指转置．$H_f(x)$是 f 的 Hasse 矩阵 $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right)$，并且使用了公式

$$\nabla(\nabla f\cdot\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}'H_f.$$

因此

$$H_{\check{f}}(Tx)=OH_f(x)O^{-1}.\tag{17}$$

令

$$b_i^*(x)=b_i(x)+\sum_{j=1}^n\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j},\quad \boldsymbol{b}(x)=\begin{pmatrix}b_1(x)\\ \vdots\\ b_n(x)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}^*(x)=\begin{pmatrix}b_1^*(x)\\ \vdots\\ b_n^*(x)\end{pmatrix}.$$

条件(16)可改写成

$$\mathrm{tr}(a_{ij}(x)H_f(x))+\nabla f(x)\cdot\boldsymbol{b}^*(x)+C(x)f(x)$$

$$=\mathrm{tr}[(a_{ij}(Tx))H_{\check{f}}(Tx)]+(\nabla\check{f})(Tx)\cdot\boldsymbol{b}^*(Tx)+C(Tx)\check{f}(Tx).$$

右边的项等于

$$\mathrm{tr}(O^{-1}(a_{ij}(Tx))OH_f(x))+\nabla f(x)\cdot O^{-1}\boldsymbol{b}^*(Tx)+C(Tx)f(x).$$

比较系数，得

$$\begin{cases}(a_{ij}(x))=O^{-1}(a_{ij}(Tx))O,\\ \boldsymbol{b}^*(x)=O^{-1}\boldsymbol{b}^*(Tx),\\ C(x)=C(Tx).\end{cases}$$

令

$$O^{-1}=(\gamma_{ij}),$$

那末

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}=\sum_{k,l,j=1}^{n}\gamma_{ik}\frac{\partial a_{kl}(Tx)}{\partial x_j}\gamma_{jl}=\sum_{k,l,j,\mu=1}^{n}\gamma_{ik}\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_\mu}\right)(Tx)\gamma_{j\mu}\gamma_{jl}$$

$$=\sum_{k,l=1}^{n}\gamma_{ik}\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_l}\right)(Tx).$$

所以

$$\begin{pmatrix}\sum_j\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\\ \vdots\\ \sum_j\frac{\partial a_{nj}}{\partial x_j}\end{pmatrix}_x=O^{-1}\begin{pmatrix}\sum_l\frac{\partial a_{1l}}{\partial x_l}\\ \vdots\\ \sum_l\frac{\partial a_{nl}}{\partial x_l}\end{pmatrix}_{Tx}.$$

因此

$$\boldsymbol{b}(x)=O^{-1}\boldsymbol{b}(Tx).$$

于是(12)等价于

$$\begin{cases}(a_{ij}(Tx))=O(a_{ij}(x))O^{-1},\\ \boldsymbol{b}(Tx)=O\boldsymbol{b}(x),\\ C(Tx)=C(x).\end{cases}\tag{18}$$

归纳起来成为

定理 3 若 G 是运动群的一个子群，则最小过程为 G 不变的充要条件为：对 $\forall T\in G$(设 $Tx=Ox+\alpha$) Ω 的系数满足条件(18).

推论 1 若 G 是平移群的一个子群，则最小过程为 G 不变的充要条件为 $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ 均为 G 不变(f 称为 G 不变，若 $\forall T\in G$, $f(x)=f(Tx)$).

(这时候系数呈现出周期性).

推论 2 最小过程对平移群不变的充要条件是 $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ 均为不依赖 x 的常数.

推论 3 若 $n=1$, G 为一维群 $\{I, -I\}$ (I 为恒等变换)，则最小过程为 G 不变的充要条件为 $a(-x)=a(x)$, $b(-x)=-b(x)$, $c(-x)=c(x)$.

下面讨论更特殊的情况：G 为行列式为 1 的正交群 $O^+(n)$.

由(18)可知 $c(x)$ 在 $O^+(n)$ 下不变，因而它只可能是向径 $r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ 的函数，即

$$c(x)=\widetilde{C}(r).$$

又

$$(a_{ij}(Ox))=O(a_{ij}(x))O^{-1},\quad \forall O\in O^+(n),$$

这说明 $(a_{ij}(x))$ 的特征值是 $O^+(n)$ 不变的，因而也只能是 r 的函数

$$0<\lambda_1(r)\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n(r).$$

由 $a_{ij}(x)$ 在 $x=0$ 的连续性，我们有

$$(a_{ij}(0))=\lim_{\substack{Ox\ \text{沿方向}\\ Ox\ \text{趋于}\ 0}}(a_{ij}(Ox))=O\lim_{\substack{x\ \text{沿方向}\\ \alpha\ \text{趋于}\ 0}}(a_{ij}(x))O^{-1}=O(a_{ij}(0))O^{-1}.$$

所以存在正常数 λ 使

$$(a_{ij}(0))=\lambda I.$$

给定方向余弦 $l_0=(\cos\langle l_0, Ox_1\rangle, \cdots, \cos\langle l_0, Ox_n\rangle)$ 后记 O_{l_0} 为把 l_0 变为 $(1, 0, \cdots, 0)$ 且行列式为 1 的正交阵．于是，对 $x\neq0$, $O_{\frac{x}{r}}$ 是把 x 变为 $(r, 0, \cdots, 0)$ 的正交阵．所以

$(a_{ij}(O_{\frac{x}{r}}x)$ 只依赖于 r，因而可写成

$$(a_{ij}(O_{\frac{x}{r}}x))=T(r)^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1(r) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(r)\end{pmatrix}T(r),$$

其中 $T(r)$ 是分量为 r 的 C^∞ 函数的正交阵，这样一来

$$(a_{ij}(x))=\begin{cases} O_{\frac{x}{r}}^{-1}T(r)^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1(r) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(r)\end{pmatrix}T(r)O_{\frac{x}{r}} & (x\neq0), \\ \lambda I, & (x=0), \end{cases} \tag{19}$$

其中 $\lambda_i(r)$，$T(r)\in C^\infty$，$\lambda_i(0)=\lambda$，$\lambda_i(r)>0$，$O_{\frac{x}{\sigma}}$ 与 r 无关，$T(x)$ 是正交阵。

类似地 $\boldsymbol{b}(O_{\frac{x}{r}}x)$ 只依赖于 r，可记为 $\tilde{\boldsymbol{b}}(r)$。于是

$$\boldsymbol{b}(x)=O_{\frac{x}{r}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}(r)\quad(\tilde{\boldsymbol{b}}(r)\in C^\infty).$$

在上式中让 x 沿某固定射线方向趋于 0，并考虑到 $\tilde{\boldsymbol{b}}(0)=\tilde{\boldsymbol{b}}(0)$，我们得到

$$\boldsymbol{b}(0)=O_{\frac{x}{r}}^{-1}\boldsymbol{b}(0).$$

由 $O_{\frac{x}{r}}$ 的任意性可知

$$\boldsymbol{b}(0)=0.$$

因此

$$\boldsymbol{b}(x)=\begin{cases} O_{\frac{x}{r}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}(r) & (x\neq0)\ (\tilde{\boldsymbol{b}}(r)\in C^\infty,\ \tilde{\boldsymbol{b}}(0)=0), \\ 0 & (x=0), \end{cases} \tag{20}$$

综上所述，得到

定理 4　最小过程对行列式为 R^n 的正交群 $O^+(n)$ 不变的充要条件是 Ω 的系数具有如下形式：

$$\begin{cases} (a_{ij}(x))=\begin{cases} O_{\frac{x}{r}}^{-1}T(r)^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1(r) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(r)\end{pmatrix}T(r)O_{\frac{x}{r}} & (x\neq0), \\ \lambda I & (x=0), \end{cases} \\ \boldsymbol{b}(x)=\begin{cases} O_{\frac{x}{r}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}(r) & (x\neq0), \\ 0 & (x=0), \end{cases} \\ C(x)=\tilde{C}(r) \end{cases}$$

其中 $T(r)$，$\tilde{\boldsymbol{b}}(r)$，$\tilde{C}(r)$，$\lambda_i(r)\in C^\infty$，$0<\lambda_1(r)\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n(r)$，$\lambda_i(0)\equiv\lambda$，$\tilde{\boldsymbol{b}}(0)=0$，$T(r)$ 正交阵，$O_{\frac{x}{r}}$ 为把 x 变为 $(r,0,\cdots,0)$ 的正交变换的矩阵，它与 r 无关。

参 考 文 献

[1] 钱敏平、龚光鲁、钱敏,二阶微分算符生成的最小过程及其可逆性,北京大学学报,(1979)第2期。
[2] 龚光鲁、钱敏平,二阶微分算符生成的非最小过程的可逆性,数学学报,(1981)第2期。
[3] 钱敏、侯振挺等,可逆马尔可夫过程,湖南科技出版社,1979.
[4] 钱敏,椭圆型算子的扩张及$\hat{\hat{C}}$半群,数学学报,(1979)第4期。
[5] Дынкин, Markov Processes. Springer, 1965.
[6] Дынкин, 马尔科夫过程论基础(王梓坤译).
[7] Fukushima, *Lecture notes on Math.*, **320** Springer.
[8] Nelson, *TAMS.*, **88** (1958).
[9] Silverstein, Symmetric Markov Processes, *Lecture notes on Math.*, **426** (1974), Springer.
[10] Getoor and Blumenthul, Markov processes and potential theory, 1968.

THE MINIMAL PROCESS GENERATED BY A DIFFERENTIAL OPERATOR OF THE SECOND ORDER IN R^n

GONG GUANG LU

(*Beijing University*)

ABSTRACT

For a differential operator

$$\Omega u=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u$$

with unbounded coefficients in R^n, a standard continuous paths process with infinitesimal operater Ω has been constructed in this paper, and the invariance of such process under a transformation group of phase space has been discussed.