数 学 年 刊
3 (6) 1982

结合环上的Lie同态

朱 元 森
(河北师范大学)

§1. 前 言

环 R 到环 R' 的一个映射 φ, 如果满足:

(i) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$,
(ii) $\varphi[x, y]=[\varphi(x), \varphi(y)]$, $\forall x, y\in R$,

则 φ 叫做 R 到 R' 的 Lie 同态. 若 φ 是 R 到 R' 的满单射, φ 叫做 R 到 R' 上的 Lie 同构.

环 R 到环 R' 的 Lie 同态(同构)是否是 R 到 R' 的同态(同构)? Martindale, W. S.[1] 曾证明了当 φ 是本原环 R 到本原环 R' 上的 Lie 同构, 且 Ch. $R\neq 2$、3, R 含有三个非零正交幂等元, 其和等于1时得出: $\varphi=\sigma+\tau$, σ 是 R 到本原环 $L'\supset R'$ 的同构或负反同构; τ 是 R 到 L' 中心的加映射, 且 $\tau[x, y]=0$. 并对单纯环有完全类似($L'=R'$)的结果. 在[5]中又将三个正交幂等元改为二个, 证明对单纯环上述结果仍成立.

环 R 到 R' 的 Lie 同态(同构), 如果满足:

(iii) $\varphi(x^3)=\varphi(x)^3$, $\forall x\in R$,

则 φ 叫做 R 到 R' 的 3-Lie 同态(同构).

Herstein, I. N. 和 Kleinfeld, E. 在[2]中证明了, 当 φ 是单纯环 R 到单纯环 R' 上的 3-Lie 同态, 且 Ch. $R=2$, 则 φ 是 R 到 R' 上的同构或反同构.

本文, 在$(R', +)$不含周期是 2、3 的元的环上, 证明了结合环 R 到素环 R' 上的 3-Lie 同态必是同态或负反同态. 且若 φ 是结合环 R 到素环 R' 上的 3-Lie 同构, $(R, +)$ 不含周期是 2、3 的元, 则 φ 是同构或负反同构. 最后讨论了含元素周期是 3 的情况.

§2. 结合环到结合环的 Lie 同态

引理1 设 φ 是环 R 到环 R' 的加映射,

(1) 若 $\varphi(x^2)=\varphi(x)^2$, $\forall x\in R$, 则

$$\varphi(x\circ y)=\varphi(x)\circ\varphi(y), \quad \forall x, y\in R.$$

(2) 若 $\varphi(x^2)=-\varphi(x)^2$, $\forall x\in R$, 则

$$\varphi(x\circ y)=-\varphi(x)\circ\varphi(y), \ \forall x, y\in R.$$

("$\circ$" 表示 Jordan 运算.)

事实上, 用 $x+y$ 代 $\varphi(x^2)=\varphi(x)^2$, $\varphi(x^2)=-\varphi(x)^2$ 中 x 即得. 证毕.

本文1980年10月13日收到, 1981年4月8日收到修改稿.

熟知，在无零因子环中，特征数是$(R, +)$非零元的公共周期，它是零或质数．当环 R 有单位元时，只需 R 的中心不含零因子即可．故

引理 2 设 R 是有单位元的结合环，中心不含零因子．若 $\mathrm{Ch.}\ R\neq p$（质数），则 R 不含周期是 p 的元；这一论断等价于，若 $\mathrm{Ch.}\ R\neq p$，则 $px=py$ 必有 $x=y$． 证毕．

定理 1 设 R, R' 都是有 1 的结合环，R' 的中心不含零因子且 $\mathrm{Ch.}\ R'\neq 2$、3．那么，R 到 R' 上的 3-Lie 同态 φ 必是 R 到 R' 上的同态或负反同态．

证 因 $R'=\varphi(R)$，且对任一 $x\in R$ 有

$$[\varphi(x), \varphi(1)]=\varphi[x, 1]=0,$$

故 $a=\varphi(1)\in\mathscr{L}(R')$（$R'$ 的中心）．

若 $a=0$，则 $\varphi(x)=\varphi(x-1)$，$\forall x\in R$，则

$$\varphi(x)^3=(\varphi(x-1))^3=\varphi((x-1)^3)=\varphi(x^3)-3\varphi(x^2)+3\varphi(x)-\varphi(1).$$

依引理 2 有

$$\varphi(x^2)=\varphi(x), \quad \forall x\in R. \tag{1}$$

同理，由 $\varphi(x)^3=(\varphi(x+1))^3=\varphi((x+1)^3)$，得

$$\varphi(x^2)=-\varphi(x), \quad \forall x\in R, \tag{2}$$

(1)－(2)式有 $2\varphi(x)=0$，故 $\varphi(x)=0$，$\forall x\in R$．此与 φ 是满射矛盾．因此，

$$\varphi(1)=a\neq 0.$$

又 $\varphi(1)^3=\varphi(1)=a$，即 $a(a^2-1)=0$．但 $a\in\mathscr{L}(R')$ 不是零因子．故 $\varphi(1)^2=1$，$\varphi(1)=1$ 或 -1．而

$$\varphi((x+1)^3)=\varphi(x^3)+3\varphi(x^2)+3\varphi(x)+\varphi(1),$$
$$(\varphi(x+1))^3=\varphi(x)^3+3\varphi(x)^2\varphi(1)+3\varphi(x)\varphi(1)^2+\varphi(1)^3.$$

即 $3\varphi(x^2)=3\varphi(x)^2\varphi(1)$．再依引理 2 有

$$\varphi(x^2)=\varphi(x)^2\varphi(1), \quad \forall x\in R.$$

当 $\varphi(1)=1$ 时，$\varphi(x^2)=\varphi(x)^2$，$\forall x\in R$．依引理 1 有 $\varphi(xy+yx)=\varphi(x)\varphi(y)+\varphi(y)\varphi(x)$，且 φ 是 Lie 同态，则

$$2\varphi(xy)=2\varphi(x)\varphi(y)$$

故

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y), \quad \forall x, y\in R,$$

φ 是 R 到 R' 上的同态．同理，若 $\varphi(1)=-1$，φ 是 R 到 R' 上的负反同态． 证毕．

如果 R' 是单纯环，中心 $\mathscr{L}(R')\neq 0$，则 $\mathscr{L}(R')$ 是域，R' 有 1．令 $a\in R$ 有 $\varphi(a)=1$，那么，$\varphi[a, x]=[\varphi(a)\varphi(x)]=0$，$\forall x\in R$．若 $[a, x]=0$，$\forall x\in R$，则 $\mathscr{L}(R)\neq 0$；

如果存在 $x\in R$ 使 $[a, x]\neq 0$，则 Lie 同态 φ 的核 $U=\{u\in R\mid\varphi(u)=0\}$ 是 R 的非零 Lie 理想．当 $\mathrm{Ch.}\ R'\neq 2$，易知 $\mathrm{Ch.} R\neq 2$．若 R 是单纯环，依[3]知 $U\subset\mathscr{L}(R)$ 或 $U\supset[R, R]$．前者知 R 有单位元，而后者得

$$0=\varphi(U)\supset\varphi[R, R]=[R', R'].$$

再依定理 1 及同态或反同态的核都是 R 的理想．故

推论 设 R, R' 是单纯环，$R'\neq\mathscr{L}(R')\neq 0$，且 $\mathrm{Ch.}\ R'\neq 2$、3，若 φ 是 R 到 R' 上的 3-Lie 同态，则 φ 是 R 到 R' 上的同构或负反同构． 证毕．

§ 3. 结合环到素环的 Lie 同态

引理 3　设 φ 是结合环 R 到 R' 上的 3-Lie 同态. 且 $(R', +)$ 不含周期是 2、3 的元, 则

$$\varphi(yxy)=\varphi(y)\varphi(x)\varphi(y), \qquad \forall x, y\in R, \tag{3}$$
$$\varphi(xy^2+y^2x)=\varphi(x)\varphi(y)^2+\varphi(y)^2\varphi(x). \tag{4}$$

证　将 $\varphi[y, [y, x]]=[\varphi(y), [\varphi(y), \varphi(x)]]$ 两端展开化简得

$$\varphi(y^2x+xy^2)-2\varphi(yxy)=\varphi(y)^2\varphi(x)+\varphi(x)\varphi(y)^2-2\varphi(y)\varphi(x)\varphi(y). \tag{5}$$

又由

$$(x-y)^3+(x+y)^3=2(x^3+xy^2+y^2x+yxy),$$

且

$$\varphi((x-y)^3+(x+y)^3)=(\varphi(x)-\varphi(y))^3+(\varphi(x)+\varphi(y))^3.$$

故

$$2\varphi(x^3+xy^2+y^2x+yxy)=(\varphi(x)-\varphi(y))^3+(\varphi(x)+\varphi(y))^3.$$

等式两端展开整理, 且 $(R', +)$ 不含周期是 2 的元, 得

$$\varphi(xy^2+y^2x)+\varphi(yxy)=\varphi(x)\varphi(y)^2+\varphi(y)^2\varphi(x)+\varphi(y)\varphi(x)\varphi(y). \tag{6}$$

由 (6) − (5) 式得, $3\varphi(yxy)=3\varphi(y)\varphi(x)\varphi(y)$. 而 $(R', +)$ 不含周期是 3 的元, 故 (3) 式成立. 将 (3) 式代入 (6) 式得 (4) 式.　　证毕.

引理 4　设 φ、R, R' 如引理 3 中所述. 则

$$\varphi(x^2)\varphi(y)\varphi(x^2)=\varphi(x)^2\varphi(y)\varphi(x)^2, \quad \forall x, y\in R.$$

证　依引理 3, $\varphi(x^2yx^2)=\varphi(x^2)\varphi(y)\varphi(x^2)$. 又 $\varphi(x^2yx^2)=\varphi(x(xyx)x)=\varphi(x)^2\varphi(y)\cdot\varphi(x)^2$ 故引理 4 成立.　　证毕.

引理 5　设 R, R', φ 如引理 3 中所述, 则

$$\varphi(zyx^2-x^2yz)=\varphi(z)\varphi(y)\varphi(x)^2-\varphi(x)^2\varphi(y)\varphi(z)$$

对任 $x, y, z\in R$ 均成立.

证　易知

$$[x, [z, [x, y]]]=x[y, z]x+[xzx, y]+[xyx, z]+(zyx^2-x^2yz),$$

上式两端同时作用 φ 得出

$$\begin{aligned}&\varphi(x[y,z]x)+\varphi[xzx, y]+\varphi[xyx, z]+\varphi(zyx^2-x^2yz)\\&\quad=\varphi(x)[\varphi(y), \varphi(z)]\varphi(x)+[\varphi(x)\varphi(z)\varphi(x), \varphi(y)]\\&\qquad+[\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x), \varphi(z)]+\varphi(z)\varphi(y)\varphi(x)^2-\varphi(x)^2\varphi(y)\varphi(z).\end{aligned} \tag{7}$$

因 φ 是 Lie 同态, 依引理 3, (7) 中前三个对应项相等, 故引理 5 中所证等式成立.

证毕.

引理 6　若 A 是素环, $A\neq\{0\}$, 则存在 $x\in A$ 使得 $x^2\neq 0$.

证　若对任 $x\in A$ 有 $x^2=0$, 用 $x+y$ 代 x 得

$$0=(x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2$$

则

$$xy=-yx, \quad \forall x, y\in A.$$

对任 $x\in A$, 作: $W_x=\{\omega\in A\,|\,\omega x=0\}$, 易知, W_x 是 A 的右理想. 但 A 是素环, 那么对任一 $x\in A$ 有 $x=0$, 矛盾. 故存在 $x\in A$, 满足 $x^2\neq 0$.　　证毕.

引理 7　环 R 到 R' 的加映射 φ，若满足

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y) \text{ 或 } \varphi(xy)=-\varphi(y)\varphi(x), \quad \forall x, y\in R,$$

则 φ 是 R 到 R' 的同态或负反同态.

事实上，利用华罗庚教授的传染法（[6]，p 12），类似可证：若有 $x_0, y_0\in R$ 使得 $\varphi(x_0y_0)=\varphi(x_0)\varphi(y_0)$，则对一切 $x, y\in R$ 有 $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$. 同理，若有 $x_1, y_1\in R$ 使得 $\varphi(x_1y_1)=-\varphi(y_1)\varphi(x_1)$，则对一切 $x, y\in R$ 有 $\varphi(xy)=-\varphi(y)\varphi(x)$. 故 φ 是同态或负反同态.　　证毕.

下面证明本文主要结论.

定理 2　设 R 是结合环，$\{0\}\neq R'$ 是素环，$(R', +)$ 不含周期是 2、3 的元. 若 φ 是 R 到 R' 上的 3-Lie 同态，则 φ 是 R 到 R' 上的同态或负反同态.

特别地，当 R 是单纯环时，φ 是 R 到 R' 上的同构或负反同构.

证　在引理 5 中令 $z=x^2$，等式左端是零

故

$$\varphi(x^2)\varphi(y)\varphi(x)^2=\varphi(x)^2\varphi(y)\varphi(x^2), \quad \forall x, y\in R. \tag{8}$$

又

$$\begin{aligned}(\varphi(x^2)-\varphi(x)^2)\varphi(y)(\varphi(x)^2+\varphi(x^2))\\ =\varphi(x^2)\varphi(y)\varphi(x)^2+\varphi(x^2)\varphi(y)\varphi(x^2)-\varphi(x)^2\varphi(y)\varphi(x)^2\\ -\varphi(x)^2\varphi(y)\varphi(x^2).\end{aligned}$$

由 (8) 式及引理 4 知上式右端为零，即

$$(\varphi(x^2)-\varphi(x)^2)\varphi(y)(\varphi(x)^2+\varphi(x^2))=0, \quad \forall y\in R. \tag{9}$$

但 $R'=\varphi(R)$ 是素环，依 (9) 式对任 $x\in R$

$$\varphi(x^2)-\varphi(x)^2=0 \text{ 与 } \varphi(x^2)+\varphi(x)^2=0 \tag{10}$$

中至少有一个成立，但二者不能同时成立. 否则，后式减前式有 $\varphi(x)^2=0$，$\forall x\in R$. 因此，对任一 $y'\in R'$ 有 $y'^2=0$，此与引理 6 矛盾. 故 (10) 中对每一 $x\in R$ 有且仅有一种成立. 即对任一 $x\in R$

$$\varphi(x^2)=\varphi(x)^2 \text{ 或 } \varphi(x^2)=-\varphi(x)^2$$

仅有一个成立. 再由引理 1 及 φ 是 Lie 同态，$(R', +)$ 不含周期是 2 的元. 故对任意 $x, y\in R$

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y) \text{ 或 } \varphi(xy)=-\varphi(y)\varphi(x)$$

也仅有一种成立. 最后，依引理 7 知 φ 是 R 到 R' 上的同态或负反同态.　　证毕.

当 φ 是 R 到 R' 的满单射，若 $(R, +)$ 不含周期是 2、3 的元，由引理 2 可知 $(R', +)$ 也不含周期是 2、3 的元. 故得

定理 3　设 φ 是结合环 R 到素环 R' 上的 3-Lie 同构. 且 $(R, +)$ 不含周期是 2、3 的元. 则 φ 是 R 到 R' 上的同构或负反同构.　　证毕.

§4. 含元素周期是 3 的情况

从以上证明可知，仅在得出引理 3 中

(iv) $\varphi(xyx)=\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)$，$\forall x, y\in R$ 时用到 $(R', +)$ 不含周期是 3 的

元. 因此, 用(iv)代替定理 2、3 中条件(iii)定理仍然成立. 即

定理 4 设 φ 是结合环 R 到素环 R' 上的 Lie 同态且满足(iv), $(R', +)$ 不含周期为 2 的元. 则 φ 是 R 到 R' 上的同态或负反同态. 特别地, 当 R 是单纯环, φ 是 R 到 R' 上的同构或负反同构.

若 φ 是结合环 R 到素环 R' 上的 Lie 同构, 且满足(iv), $(R, +)$ 不含周期是 2 的元. 则 φ 是 R 到 R' 上的同构或负反同构. 证毕.

参 考 文 献

[1] Martindale, W. S., Lie isomorphisms of primitive rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14**: 6(1963), 909—916.

[2] Herstein, I. N. and Kleimfeld, E., Lie mappings in Characteristic 2, *Pacific. Jour. Math.*, **10**: 3(1960), 843—853.

[3] Herstein, I. N., On the Lie and Jordan rings of a simple associative rings, *Amer. Jour. Math.*, **77** (1955), 279—285.

[4] Herstein, I. N., Topics in ring theory, The university of chicago press.

[5] Martindale, W. S., Lie isomorphisms of simple rings, *Jour. Landon. Math. Soc.*, 2(1969).

[6] 华罗庚、万哲先, 典型群, 上海科技出版社, (1963).

LIE HOMOMORPHISM ON THE ASSOCIATIVE RING

ZHU YUANSEN
(*Hebei Normal University*)

ABSTRACT

Is it true that Lie homomorphism (isomorphism) φ of a ring R into a ring R′ is a homomorphism (isomorphism)? Herstein, I. N. and Kleinfeld, E.[2] and Martindal, W. S.,[1,5] obtained some results for simple ring and primitive ring.

In this paper I shall study the Lie homomorphism on the associative ring and arrive at the following main conclusion:

Theorem. Suppose that R, R' are both associative rings with 1, and the center of R' does not contain zero divisor, where R' is not of characteristic 2 or 3. If φ is a 3-Lie homomorphism of R onto R', then φ must be either a homomorphism or the negative of an anti-homomorphism of R onto R'.

Theorem. Suppose that R is an associative ring and $R' \neq \{0\}$ is a prime ring, where $(R', +)$ does not contain elements of the period 2 or 3. If φ is a 3-Lie homomorphism of R onto R', then φ it either a homomorphism or the negative of an antihomomorphism of R onto R'.

Theorem. Suppose that R is an associative ring and $(R, +)$ does not contain element of the period 2 or 3, R' is a prime ring. If φ is a 3-Lie isomorphism of R onto R', then φ is either a isomorphism or the negative of an anti-isomorphism of R onto R'.