

**THERMODYNAMIQUE DES ENSEMBLES
DE CANTOR AUTOSIMILAIRES**
(*THERMODYNAMICS OF SELF-SIMILAR CANTOR SETS*)

G. MICHON* J. PEYRIÈRE**

Abstract

A class of metric, compact, and totally disconnected spaces, called self-similar Cantor sets is introduced. A self-similar structure is defined to be a graph with weighted edges. The introduction of ultrametrics and quasi-isometries gives versatility to this construction. Thermodynamical functions as free energy and entropy are associated with self-similar structures. Multifractal analysis, based on a "Large Deviations" inequality and Gibbs measures, leads to a fairly general Hausdorff dimension theorem.

Keywords Cantor set, Graph, Dimension, Thermodynamics, Gibbs measure, Multifractals.

1991 MR Subject Classification 54F65, 54F45, 05C50, 82A05.

§0. Introduction

Le propre des ensembles de Cantor autosimilaires que nous définissons est de posséder, outre une structure métrique, une structure autosimilaire^[18] caractérisée par un graphe à arêtes pondérées. Bien entendu, cette classe d'espaces contient l'ensemble triadique de Cantor, les ensembles parfaits homogènes de Kahane et Salem^[13], les parfaits isotypiques de Moran et Marion^[21,16] (du moins lorsqu'ils sont totalement discontinus). Elle contient également, avec la même restriction topologique, les ensembles récurrents de Dekking^[6], de Bedford^[1], ceux construits par Hutchinson^[12], Mauldin et Williams^[17]; tous ensembles à structure autosimilaire portée par un sous-shift de type fini (*ie* définie par une matrice d'incidence). Le thème de ce travail est l'algébrisation de la situation, universellement utilisée, rappelée plus haut. Nous généraliserons des résultats connus sur les dimensions de Hausdorff et Bouligand, et enfin, nous présenterons des résultats nouveaux, de nature multifractale reposant sur l'utilisation de fonctions thermodynamiques^[11,8,9,5,3]. A cette fin, nous introduisons le calcul à quasi-isométrie près sur des espaces ultramétriques formels porteurs d'une structure autosimilaire naturelle et les mesures de Gibbs dans un contexte thermodynamique *non dynamique*.

En suivant Franks^[10], on peut généraliser les sous-shift de type fini. La matrice de définition est positive, à coefficients entiers (et non plus formée de 0 et de 1), c'est la matrice d'un graphe fini, orienté, avec éventuellement, des arêtes multiples entre les sommets et des

Manuscript received November 13, 1993.

*Université de Bourgogne, URA 755, BP 138, 21004 Dijon, France.

**Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, URA 757, 91405 Orsay, France.

cycles. L'espace considéré est l'espace des chemins du graphe infinis à droite. En pondérant les arêtes orientées du graphe, ie en attachant à chacun un scalaire de $]0, 1[$, on définit une structure ultramétrique sur cet espace de chemin. La structure autosimilaire est, dans ce contexte particulier, caractérisée simplement par une famille de matrices dont l'ordre est le nombre de sommets du graphe, paramétrée par un scalaire strictement positif qui s'interprète comme une dimension. Ces espaces ultramétriques formels, parfaitement adaptés à notre but, servent de modèles : la classe des espaces qu'on étudie est formée des espaces quasi-isométriques à ceux-ci. Par exemple, le Cantor triadique est à quasi-isométrie près défini à l'aide du graphe à un sommet et deux arêtes 0 et 1 pondérées chacune par $1/3$ et c'est ce graphe pondéré qui formalise l'aspect autosimilaire usuel de ce Cantor. La matrice entière est dans ce cas le scalaire 2, la famille de matrices d'autosimilitude est la famille des scalaires $3^{-s} + 3^{-s}$ indexée par $s > 0$. Comme on voit ici, on est obligé de raisonner à quasi-isométrie près, ie sur une présentation, car les ultramétriques ne se plongent pas naturellement dans la droite.

Les chemins infinis du graphe sont des limites de chemins finis, dans le sens suivant. Pour chaque entier $n \geq 0$, on considère l'ensemble G_n des chemins du graphe de longueur n . On se retrouve ainsi avec une suite d'ensembles finis ($G_n \mid n \geq 0$) qui sont l'équivalent des cylindres, dans le cas d'une matrice d'incidence. L'ensemble des chemins infinis est la limite projective de ces ensembles. D'autre part, un chemin fini s'interprète comme une boule ultramétrique et on parle du logarithme de son rayon comme d'une énergie. Ainsi s'introduit le formalisme thermodynamique, tel qu'il est développé dans^[7]. Dans ce contexte, la variable conjuguée de l'énergie est la dimension et la transformée de Legendre de l'énergie libre est la fonction entropie (dans le sens propre aux Grandes Déviations). Il faut noter que les fonctions thermodynamiques qu'on définit sont associées à la structure autosimilaire plaquée sur l'espace métrique. Néanmoins, elles permettent le calcul de certains invariants métriques. Les mesures de Gibbs qu'on présente ici ne sont pas invariantes, il ne s'agit donc pas de mesures S.R.B^[4]. Ici, la dynamique n'est pas utilisée "à la Ruelle" via les cycles du graphe comme dans^[12,17]. Ce qui est essentiel ici, c'est le passage des chemins de longueur n aux chemins de longueur $n + 1$ pour chaque n , ce qui fait que notre approche n'est pas dynamique mais plutôt markovienne. On peut dire qu'une structure autosimilaire telle qu'on la présente ici est la donnée d'une information sur une section du shift plus que sur le shift lui-même. C'est sur cette information que se fondent les développements thermodynamiques conduisant au théorème de dimension.

Plan commenté. Le premier paragraphe présente l'espace des chemins d'un graphe comme ensemble de branches d'un arbre ; c'est dire que les partitions associées aux branches finies d'égales longueurs jouent un rôle essentiel dans la définition de la topologie compacte, totalement discontinue. Il s'agit là d'une construction qui généralise les classiques sous-shift de type fini, dès qu'on a remarqué qu'un graphe est une matrice à coefficients entiers positifs. On trouve cette construction, dans le même esprit, par exemple dans^[10,15]. En partitionnant les chemins infinis par leur sommet d'origine, on met en évidence une "structure autosimilaire topologique" dont la matrice du graphe est l'expression algébrique.

Le paragraphe deux introduit une structure ultramétrique sur cet espace. L'ultramétri-

que est naturellement associée à une pondération des arêtes du graphe par des scalaires compris entre 0 et 1, qui sont interprétés comme des similitudes. L'espace ultramétrique ainsi obtenu est naturellement porteur d'une structure autosimilaire. Une structure autosimilaire est la donnée d'un graphe pondéré, l'espace ultramétrique ci-dessus est considéré comme le modèle canonique de la structure et une structure autosimilaire de ce type sur un espace métrique (X, d) est une quasi-isométrie entre (X, d) et le modèle canonique. On termine ce paragraphe par une construction classique de Cantor à structure autosimilaire donnée.

Le paragraphe trois introduit la famille de matrices associée à une structure autosimilaire; ces matrices rendent compte des similitudes internes et sont utilisées par de nombreux auteurs, sous une forme plus ou moins voisine^[1,2,16], pour l'étude de la dimension. Nous les suivons, en mettant l'accent sur les mesures de Gibbs et en raisonnant à quasi-isométrie près, ce qui allège considérablement les démonstrations. Les mesures de Gibbs, introduites ici sont particulières : elles ne sont pas invariantes par le shift mais par contre parfaitement adaptées à la structure autosimilaire.

Le paragraphe quatre introduit, dans un contexte simple, les fonctions énergie libre et entropie associées à une structure autosimilaire. La première fonction est le logarithme de la valeur propre de Perron-Frobenius des matrices de similitude, en dimension quelconque. L'entropie est ici la transformée de Legendre de la précédente. Nous avons suivi^[7] dans son exposition des "Grandes Déviations".

Le paragraphe cinq expose l'analyse multifractale d'une structure autosimilaire. A chaque similitude interne (*ie* chaque arête du graphe) est associé un vecteur et l'on s'intéresse aux chemins où la moyenne des vecteurs est donnée par la dérivée de l'énergie libre. Le point crucial est de concentrer correctement les mesures de Gibbs introduites, en fonction de la dimension (dont l'équivalent thermodynamique est la température). Le problème de la normalisation des énergies libres par le logarithme des rayons de boules est traité par la méthode classique des fonctions implicites. Dans cet ordre d'idée, le point crucial est la preuve d'une inégalité de "Grandes Déviations" ; on a suivi^[20]. Cette inégalité permet de prouver un théorème de dimension très général.

On termine par des applications simples au calcul de dimension de sous-ensembles sofiques.

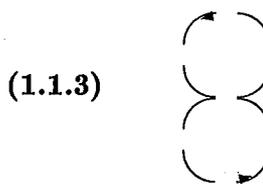
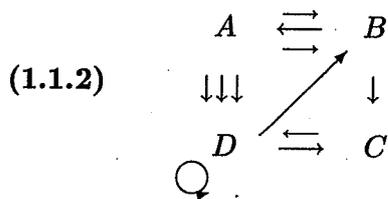
§1. L'espace des Chemins d'un Graphe

1.1. Rappelons quelques faits sur les graphes orientés finis que nous appellerons graphes dans ce travail.

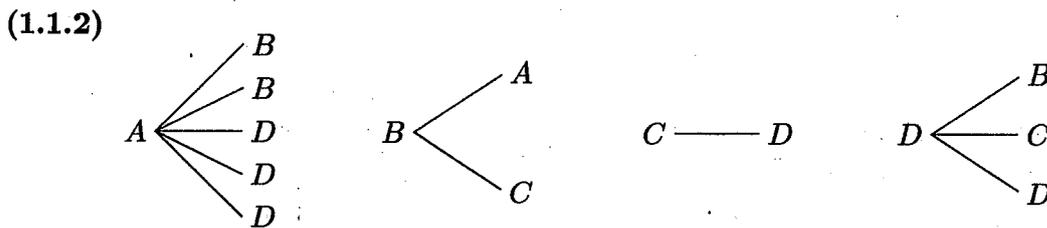
(1.1.1) On appelle graphe \mathcal{G} une double application entre ensembles finis $\alpha, \beta : G_1 \rightarrow G_0$. Un élément de G_1 est appelé une arête, un élément de G_0 un sommet. L'application α est l'application source, l'application β est l'application but.

Si u est une arête, de source A et de but B , il est d'usage de noter celle-ci $A \rightarrow B$. Ceci

conduit au schéma d'un graphe. Ainsi:



Pour les développements qui suivent, il est indiqué de schématiser comme il suit les mêmes exemples:



L'application $(\alpha, \beta) : G_1 \rightarrow G_0 \times G_0$ caractérise le graphe et sa donnée est équivalente à celle du cardinal de ses fibres, c'est à dire à celle de la matrice $M, p \times p$ si $G_0 = \{A_1, \dots, A_p\}$, à coefficients entiers $a_{ij} = \#\{u : A_i \rightarrow A_j\}$. Ainsi, pour les deux exemples ci-dessus, il viendra les matrices 4×4 et 1×1 :

(1.1.2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.1.3) (2)

(1.1.4) On appelle chemin de longueur $n \geq 0$ du graphe \mathcal{G} une suite d'arêtes $u \in G_1^n$ telle que $\beta(u_k) = \alpha(u_{k+1})$ pour $k + 1 < n$.

Si $n = 0$, le seul chemin est \emptyset . Si $n \geq 1$, il s'écrit $u = (u_0, \dots, u_{n-1})$, on appelle $\alpha(u_0)$ la source de u , $\beta(u_{n-1})$ le but de u .

Parler de la source et du but d'un chemin suppose évidemment que sa longueur n'est pas nulle. Un cycle est un chemin de source et but identiques.

Rappelons que

(1.1.5) un graphe \mathcal{G} est dit fortement connexe si, pour tout couple de sommets (A, B) , il existe un chemin de source A et de but B .

Rappelons également que

(1.1.6) une matrice positive M est dite irréductible si pour tout couple d'indice i, j , il existe $n \geq 1$ tel que $(M^n)_{i,j} > 0$.

Evidemment :

(1.1.7) Soit M la matrice d'un graphe \mathcal{G} . Le graphe et la matrice sont simultanément et respectivement fortement connexes et irréductibles.

Un graphe $\mathcal{G} = (G_0, G_1)$ étant donné, pour $A \in G_0$ posons

$$v_A = \# \{u \in G_1 \mid \alpha(u) = A\} - 1.$$

On obtient ainsi un vecteur v de \mathbf{R}^{G_0} , à coefficients entiers.

(1.1.8) Dans ce travail, on supposera toujours que le graphe \mathcal{G} est irréductible et qu'il n'est pas un cycle ie : la matrice M est irréductible et le vecteur v n'est pas nul.

1.2. Notons G_n l'ensemble des chemins de longueur n , pour $n \geq 0$ et G_∞ l'ensemble suivant :

(1.2.1) Les éléments de G_∞ sont les suites d'arêtes $u = (u_0, u_1, \dots)$ telles que $\beta(u_i) = \alpha(u_{i+1})$ pour $i \geq 0$. On appelle une telle suite un chemin du graphe \mathcal{G} , et $\alpha(u_0)$ est appelé la source du chemin.

Pour $n \geq 0$, on note $\pi_n : G_\infty \rightarrow G_n$ l'application associant (u_0, \dots, u_{n-1}) à (u_0, u_1, \dots) . Munissons l'ensemble des chemins G_∞ de la topologie la moins fine rendant ces projections continues (étant entendu que les ensembles G_n , finis, sont munis de la topologie discrète).

(1.2.2) Une base d'ouverts-fermés, indexée par $\bigcup_{n \geq 0} G_n$ est ainsi faite : l'ouvert fermé d'indice $u = (u_0, \dots, u_{n-1})$ est l'ensemble des chemins du graphe qui s'écrivent $(u_0, \dots, u_{n-1}, \dots)$ et G_∞ est un espace compact.

Pour $n \geq 0$, notons $\pi : G_{n+1} \rightarrow G_n$ l'application générique qui, au chemin (u_0, \dots, u_n) de longueur $n + 1$ associe le chemin (u_0, \dots, u_{n-1}) de longueur n . On construit ainsi un système projectif d'ensembles finis, à transitions π surjectives, tel que $G_0 = 1$.

(1.2.3)
$$G_0 \leftarrow G_1 \leftarrow G_2 \leftarrow \dots \leftarrow G_n \leftarrow G_{n+1} \leftarrow \dots$$

Clairement, l'espace des chemins G_∞ , muni des projections $\pi_n : G_\infty \rightarrow G_n$ est une limite projective du système ci-dessus, dans la catégorie des espaces topologiques.

1.3. Dans la suite, de tels espaces, construits à l'aide d'un graphe \mathcal{G} , serviront de modèles. Leur intérêt tient à leur propriété d'auto-homéomorphisme remarquée par de nombreux auteurs, explicitée par la matrice M du graphe, notons G_∞^A la partie de G_∞ formée des chemins du graphe de source A . Clairement, la famille $(G_\infty^A \mid A \in G_0)$ est une partition finie, en ouverts-fermés, de l'espace G_∞ . Si, de A , partent les arêtes $u_1 : A \rightarrow B_1, \dots, u_n : A \rightarrow B_n$, il est clair que G_∞^A est la somme des espaces $G_\infty^{B_1}, \dots, G_\infty^{B_n}$. Ainsi, dans le cas du graphe (1.1.2), $G_\infty = G_\infty^A \amalg G_\infty^B \amalg G_\infty^C \amalg G_\infty^D$ et :

$$\begin{aligned} G_\infty^A &= G_\infty^B \amalg G_\infty^C \amalg G_\infty^D \amalg G_\infty^D \amalg G_\infty^D, \\ G_\infty^B &= G_\infty^A \amalg G_\infty^C, \quad G_\infty^C = G_\infty^D, \\ G_\infty^D &= G_\infty^B \amalg G_\infty^C \amalg G_\infty^D. \end{aligned}$$

Cette décomposition se lit dans la seconde schématisation d'un graphe. Utilisant la matrice

du graphe, on pourrait écrire :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_\infty^A \\ G_\infty^B \\ G_\infty^C \\ G_\infty^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_\infty^A \\ G_\infty^B \\ G_\infty^C \\ G_\infty^D \end{pmatrix}$$

Plus classiquement, l'espace G_∞ peut être vu comme un sous-shift de type fini [4], sur l'alphabet G_1 , donné par la matrice d'incidence D définie par $D_{u,v} = 1$ si $\beta u = \alpha v$, 0 sinon. Nous ne suivrons pas cette voie qui, en faisant disparaître les sommets, occulte la structure d'auto-homéomorphisme, qui est le propre de tels espaces de chemins.

1.4. Une mesure sur G_∞ est un système projectif de mesure, c'est à dire une suite de mesures $(\mu_n)_{n \geq 0}$, μ_n étant sur l'ensemble fini G_n , telle que $\pi_n(\mu_{n+1}) = \mu_n$ pour $n \geq 0$ et $\sup_{n \geq 0} \|\mu_n\| < \infty$. De cela découle la forme prise par les mesures positives sur l'espace G_∞ :

(1.4.1) Une mesure positive μ sur G_∞ est la donnée, pour chaque chemin de longueur n , (u_0, \dots, u_{n-1}) , d'un scalaire positif $\mu(u_0, \dots, u_{n-1})$ tel que, si A est le but de u_{n-1} et v_1, \dots, v_l sont les arêtes de source A on ait

$$\mu(u_0, \dots, u_{n-1}) = \mu(u_0, \dots, u_{n-1}, v_1) + \dots + \mu(u_0, \dots, u_{n-1}, v_l).$$

§2. Ultramétrie et Structure Autosimilaire

2.1. Introduisons une ultramétrie δ sur l'espace des chemins G_∞ , associé à une pondération du graphe.

(2.1.1) On appellera pondération du graphe \mathcal{G} une application $\lambda : G_1 \rightarrow]0, 1[$.

Etendons cette application à $\prod_{n \geq 0} G_n$, de la façon suivante :

(2.1.2) Si $u \in G_n$, on pose $\lambda_u = \prod_{i < n} \lambda_{u_i}$ (d'où $\lambda_\emptyset = 1$).

Ceci étant, soient deux éléments différents $x, y \in G_\infty$ tels que le plus long chemin commun soit $u \in G_n$ (ie $\pi_n(x) = \pi_n(y)$, $\pi_{n+1}(x) \neq \pi_{n+1}(y)$). Posons alors $\delta(x, y) = \lambda_u$, et $\delta(x, x) = 0$.

(2.1.3) δ est une distance ultramétrique sur G_∞ . L'ouvert-fermé $\pi_n^{-1}(u)$, associé au chemin u de longueur n est une boule fermée de rayon λ_u .

Ainsi, au couple (\mathcal{G}, λ) formé d'un graphe et d'une pondération avons-nous associé un espace ultramétrique compact (G_∞, δ) . De tels espaces nous serviront de modèles, dans le sens suivant :

(2.1.4)

(i) Nous appellerons le couple (\mathcal{G}, λ) une structure autosimilaire

(ii) un espace métrique compact (X, d) est dit autosimilaire s'il est quasi-isométrique à un espace du type (G_∞, δ) (par quasi-isométrie, on entend qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $A^{-1}\delta \leq d \leq A\delta$)

(iii) la quasi-isométrie $\varphi : (G_\infty, \delta) \rightarrow (X, d)$ est appelée une présentation autosimilaire.

Les espaces métriques compacts autosimilaires sont totalement discontinus, puisqu'il en est ainsi des espaces G_∞ . Dans ce travail,

(2.1.5) on appellera ensemble de Cantor un espace métrique compact, totalement discontinu.

Ainsi, les espaces métriques compacts autosimilaires seront appelés ensembles de Cantor autosimilaires. Bien entendu, l'ensemble de Cantor classique est autosimilaire : le graphe est le graphe à un sommet et deux cycles (1.1.3), la pondération λ étant $(1/3, 1/3)$.

Les invariants par quasi-isométrie — diverses dimensions notamment — apparaissent plus simplement traduits en termes d'ultramétrie car dans ce type de métriques, les recouvrements minimaux sont des partitions. En outre, le traitement des invariants est en quelque sorte algébrisé par l'introduction de la présentation (\mathcal{G}, λ) .

2.2. De très nombreux auteurs ont construit des Cantor autosimilaires. Nous allons ici donner une variante d'une construction classique éclairant les rôles de la pondération et de l'ultramétrie. Partons d'une présentation (\mathcal{G}, λ) . Soient, d'autre part, un espace métrique (E, d) et les données suivantes :

(i) une famille $(K_i \mid i \in G_0)$ de parties compactes de (E, d) , indexée par les sommets du graphe

(ii) pour chaque arête $u : i \rightarrow j$ une application $f_u : K_j \rightarrow K_i$.

Ces données sont astreintes à deux conditions :

(i) f_u est une similitude de rapport $\lambda_u : d(f_u x, f_u y) = \lambda_u d(x, y)$

(ii) si u et v sont des arêtes différentes mais de même source :

$$\text{Im } f_u \cap \text{Im } f_v = \emptyset.$$

Construisons une application $f : G_\infty \rightarrow E$ de la façon suivante. Soit $u = (u_0, u_1, \dots)$ un chemin du graphe. Il vient la suite d'applications :

$$\dots \xrightarrow{f_{u_n}} \dots \xrightarrow{f_{u_1}} K_j \xrightarrow{f_{u_0}} K_i \in E.$$

Pour chaque $n \geq 1$, l'image de $f_{u_0} f_{u_1} \dots f_{u_{n-1}}$ est une partie compacte de E , dont le diamètre est majoré par $\lambda_{u_0} \dots \lambda_{u_{n-1}} \sup_{i \in G_0} \text{diam}(K_i)$. On obtient ainsi une suite décroissante de compacts, dont la suite des diamètres tend vers 0. De ce fait

$$\bigcap_{n \geq 1} \text{Im } f_{u_0} f_{u_1} \dots f_{u_{n-1}}$$

est un point de E , noté $f(u)$. Ainsi se trouve définie l'application annoncée. Maintenant, si $u, v \in G_\infty$ et sont différents, ils s'écrivent

$$u = (u_0, \dots, u_{n-1}, u_n, \dots) \text{ et } v = (u_0, \dots, u_{n-1}, v_n, \dots)$$

avec $n \geq 0$ et $u_n \neq v_n$.

$$\begin{array}{c} K_m \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} f_{u_n} \\ \\ \end{array} \\ K_l \xrightarrow{f_{u_{n-1}}} \dots \xrightarrow{f_{u_1}} K_j \xrightarrow{f_{u_0}} K_i \subset E \\ K_p \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} f_{v_n} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

On peut écrire $f_u = f_{u_0} \dots f_{u_{n-1}} f_{u_n} x$, où $x \in K_m$ ainsi que

$$f_v = f_{u_0} \dots f_{u_{n-1}} f_{v_n} y, \text{ où } y \in K_p,$$

d'où

$$d(f_u, f_v) = \lambda_{u_0, \dots, u_{n-1}} d(f_{u_n} x, f_{v_n} y).$$

La compacité des parties K_i et la condition de disjonction des images donnent une constante $A > 0$ telle que

$$A^{-1} \leq d(f_{u_n} x, f_{v_n} y) \leq A,$$

indépendante de x, y, u_n, v_n . Pour cette constante, on a donc

$$A^{-1} \delta(u, v) \leq d(f_{u_n} x, f_{v_n} y) \leq A \delta(u, v).$$

Ainsi, on a prouvé :

(2.2.1) *Im $f \subset E$ est un espace autosimilaire.*

Cette construction permet d'exhiber très simplement des ensembles réguliers autosimilaires. Par exemple, les Cantor de Marion^[6,16] sont ainsi construits : ils sont présentés par un graphe à un seul sommet et p arêtes (qui sont des cycles). La pondération est simplement une suite $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1})$ où $0 < \lambda_k < 1$.

§3. Etude de la Dimension

3.1. Puisqu'un espace autosimilaire est quasi-isométrique à l'une de ses présentations, il est loisible d'étudier les dimensions d'un tel espace sur un modèle (G_∞, δ) déduit du graphe (\mathcal{G}, λ) . Notre étude repose sur la famille de matrice $(\Lambda_t \mid t \in \mathbf{R})$ indexée par $G_0 \times G_0$, ainsi définie :

(3.1.1) *soit $t \in \mathbf{R}$. La matrice Λ_t a pour coefficient d'indice $(A, B) \in G_0 \times G_0$ le scalaire*

$$\sum_{u:A \rightarrow B} \lambda_u^t.$$

Evidemment, puisque, selon (1.1.8), le graphe est supposé fortement connexe,

(3.1.2) *la famille de matrice $(\Lambda_t \mid t \in \mathbf{R})$ est composée de matrices positives irréductibles.*

Montrons comment cette famille de matrices rend compte de l'autosimilarité. Partons de l'exemple (1.1.2) déjà traité, du point de vue topologique, en 1.3. Attribuons à chaque arête u une pondération λ_u . Si $t > 0$, λ_u^t est également une pondération qui donne l'ultramétrie δ^t , si δ note l'ultramétrie induite par les λ_u . L'espace G_∞ est, comme on l'a vu, partitionné en sous-espaces ouverts-fermés $G_\infty^A, G_\infty^B, G_\infty^C$ et G_∞^D , chacun héritant de la métrique induite δ^t . Soit alors une arête $u : A \rightarrow B$ par exemple. Elle induit une application $f_u : G_\infty^B \rightarrow G_\infty^A$ consistant à ajouter l'arête u aux chemins de source B . Clairement, f_u est une similitude de rapport λ_u . De la sorte, non seulement on a l'égalité topologique

$$G_\infty^A = G_\infty^B \amalg G_\infty^C \amalg G_\infty^D \amalg G_\infty^D,$$

mais encore on connaît les diverses contractions subies par les diverses composantes pour donner G_∞^A . Ces self-similarités s'organisent en la matrice Λ_t pour $t > 0$ fixé. En résumé, la matrice Λ_t permettrait d'écrire une égalité vectorielle entre les composantes métriques de (G_∞, δ^t) :

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1^t + \lambda_2^t & 0 & \lambda_3^t + \lambda_4^t + \lambda_5^t \\ \lambda_6^t & 0 & \lambda_7^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_8^t \\ 0 & \lambda_9^t & \lambda_{10}^t & \lambda_{11}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_\infty^A \\ G_\infty^B \\ G_\infty^C \\ G_\infty^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_\infty^A \\ G_\infty^B \\ G_\infty^C \\ G_\infty^D \end{pmatrix}$$

qui contient toute l'information sur la self-similarité de (G_∞, δ^t) , pour $t > 0$.

Le théorème de Perron-Frobenius^[23] nous apprend que :

(3.1.3) chaque matrice Λ_t possède une valeur propre de module maximum $\rho(t) > 0$, de multiplicité 1. L'espace propre correspondant est une droite de \mathbf{R}^{G_0} , engendrée par un vecteur strictement positif $(x_A \mid A \in G_0)$, qu'on normalise en posant $\sum_{A \in G_0} x_A = 1$.

D'autre part, en suivant [23], on montre que

(3.1.4) l'application analytique réelle $\rho : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_*^+$ est strictement décroissante et tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. Enfin, puisqu'on travaille sous les contraintes (1.1.8) on a :

(3.1.5) $\rho(0) > 1$.

3.2. Le point crucial, dans l'étude de la dimension, est l'introduction d'une famille de mesures positives, indexée par $t \in \mathbf{R}$, de masse 1, dite mesures de Gibbs $(\gamma_t \mid t \in \mathbf{R})$. La nature projective de l'espace G_∞ donne un procédé de construction de mesure positive très simple, rappelé en (1.4.1). Soit $(u_0, \dots, u_{n-1}) \in G_n$. Posons

$$(3.2.1) \quad \gamma_t(u_0, \dots, u_{n-1}) = \frac{\lambda_u^t}{\rho(t)^n} x_{\beta(u_{n-1})}.$$

Il résulte facilement de cette définition que la condition rappelée en (1.4.2) est satisfaite. De ce fait,

(3.2.2) $\gamma_t(u_0, \dots, u_{n-1})$ définit une mesure γ_t positive, de masse 1 sur G_∞ .

Clairement

(3.2.3) $\gamma_t(u_0, \dots, u_{n-1})$ est la mesure de la boule fermée de rayon λ_u , centrée en un point quelconque de celle-ci, pour l'ultramétrie δ .

Voici la propriété essentielle de ces mesures :

(3.2.4) Proposition. Si $u = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in G_n$:

$$0 < \inf_{B \in G_0} x_B \leq \frac{\gamma_t(u)}{e^{-n \log \rho(t)} \lambda_u^t} \leq \sup_{B \in G_0} x_B.$$

La preuve, immédiate, utilise simplement le fait qu'un vecteur propre de Perron-Frobenius a ses composantes strictement positives.

Particularisons t en t_0 , le nombre défini par $\rho(t_0) = 1$. Il existe donc un scalaire $K > 0$ tel que, pour tout $u \in \bigcup_{n \geq 0} G_n$:

$$K^{-1} \lambda_u^{t_0} \leq \gamma_{t_0}(u) \leq K \lambda_u^{t_0}.$$

Puisque u , via $\pi_n^{-1}(u)$ est une boule fermée de rayon λ_u , les sommes de Hausdorff en cette valeur donneront une mesure de Hausdorff en dimension t_0 équivalente à γ_{t_0} , d'où notre avatar d'un résultat classique de Ruelle :

(3.2.5) Proposition. L'unique scalaire t_0 tel que $\rho(t_0) = 1$ est la dimension de Hausdorff de (G_∞, δ) .

De ce fait,

(3.2.6) Proposition. Tout Cantor autosimilaire a pour dimension de Hausdorff la valeur t_0 qui annule la fonction $\log \rho(t)$ de l'une des présentations.

Ainsi, on retrouve facilement les résultats de nombreux auteurs. Le cas des Cantor isotypiques est particulièrement simple : la valeur t_0 telle que $\lambda_0^{t_0} + \dots + \lambda_{p-1}^{t_0} = 1$ est précisément celle qui fait du rayon des ultraboules fermées la mesure de Hausdorff de la boule, en la dimension t_0 .

3.3. Prouvons maintenant le résultat suivant :

(3.3.1) Proposition. *Si (X, d) est un Cantor autosimilaire, sa dimension de Hausdorff égale sa dimension de Bouligand-Minkowski.*

Preuve. Il suffit de raisonner sur un modèle (G_∞, δ) . Rappelons que, à $\varepsilon > 0$ fixé, si on note $N(\varepsilon)$ le cardinal d'un recouvrement minimum par des boules de rayon ε , la dimension de Bouligand-Minkowski est par définition le scalaire de $[0, \infty]$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(\varepsilon)}{-\log(\varepsilon)}.$$

Nous dénommons ainsi cette notion de dimension qui par ailleurs est connue sous beaucoup d'autres appellations [22], et en particulier est utilisée par les dynamiciens sous le nom de limit capacity, parce que dans le cas des ensembles plongés dans \mathbf{R}^n elle coïncide avec la dimension de Bouligand-Minkowski. Dans notre contexte, les boules ouvertes (et fermées) sont indexées par les éléments $u = (u_0, \dots, u_{n-1})$ de G_n . Notons $\bar{u} = u_0 \cdots u_{n-2}$, si $n \geq 1$. Les boules de rayon $\varepsilon > 0$ sont en bijection avec l'ensemble

$$T_\varepsilon = \left\{ u \in \bigcup_{n \geq 1} G_n \mid \lambda_u < \varepsilon \leq \lambda_{\bar{u}} \right\}$$

et bien entendu, il s'agit là de la partition en boules de rayon ε . Il s'agit donc du recouvrement minimum, autrement dit $\#T_\varepsilon = N(\varepsilon)$. Vu la définition de \bar{u} , il existe une constante $K > 0$ telle que, si $u \in T_\varepsilon$:

$$\lambda_u < \varepsilon \leq K\lambda_u.$$

On peut donc écrire, avec une certaine constante $A > 0$, pour $u \in T_\varepsilon$ (cf. une inégalité précédente) :

$$A^{-1}\varepsilon^{t_0} \leq \gamma_{t_0}(u) \leq A\varepsilon^{t_0}.$$

On somme alors sur $u \in T_\varepsilon$, d'où les inégalités

$$A^{-1}N(\varepsilon)\varepsilon^{t_0} \leq 1 \leq AN(\varepsilon)\varepsilon^{t_0},$$

qui donnent le résultat. En fait, on a prouvé :

(3.3.2) Proposition. *Soit (X, d) un Cantor autosimilaire. Lorsque ε tend vers 0, $\frac{\log N(\varepsilon)}{-\log \varepsilon}$ converge vers la dimension de Hausdorff.*

Si l'on raisonne maintenant de façon intrinsèque sur le Cantor autosimilaire (X, d) lui-même, il viendra entre l'ultramétrique δ et d :

$$A\delta \leq d \leq B\delta$$

où A et B sont des constantes.

Si on note N et N' les nombres minimums de boules pour les recouvrements de rayon ε , pour δ et d , on a :

$$N(\varepsilon/A) \leq N'(\varepsilon) \leq N(\varepsilon/B)$$

d'où le résultat (généralisant [13]) :

(3.3.3) Proposition. *Soit (X, d) un Cantor autosimilaire, $N(\varepsilon)$ comme ci-dessus. La dimension de Hausdorff est égale à la dimension de Bouligand et celle-ci est l'unique scalaire*

t pour lequel il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$A^{-1} \leq \varepsilon^t N(\varepsilon) \leq A.$$

§4. Thermodynamique

4.1. Le formalisme thermodynamique développé ici est basé sur la structure autosimilaire. Rappelons les inégalités obtenues en (3.2.4) : il existe une constante $K > 0$, ne dépendant que de t , telle que, pour tout n_0 et $u \in G_n$:

$$K^{-1} e^{-n \log \rho(t)} \lambda_u^t \leq \gamma_t(u) \leq K e^{-n \log \rho(t)} \lambda_u^t.$$

En sommant sur $u \in G_n$, il vient

$$\left| \log \rho(t) - \frac{1}{n} \log \sum_{u \in G_n} \lambda_u^t \right| \leq \frac{\log K}{n}.$$

Introduisons maintenant la terminologie thermodynamique :

(4.4.1) On appelle fonction de partition du niveau n la fonction $Z_n(t) = \sum_{u \in G_n} \lambda_u^t$ et

énergie libre du niveau n la fonction

$$C_n(t) = \frac{1}{n} \log Z_n(t).$$

L'inégalité précédente permet d'affirmer

$$(4.1.2) \quad C_n(t) = \log \rho(t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, $C_n(t)$ converge simplement vers $C(t)$.

(4.1.3) On appelle $C(t) = \log \rho(t)$ la fonction énergie libre de la présentation (\mathcal{G}, λ) .

(4.1.4) La fonction $\log \rho(t)$ est convexe, analytique.

Preuve. La fonction $\log \rho(t)$ est limite simple de fonction convexe, elle est donc convexe. L'analyticité résulte du fait que la valeur propre $\rho(t)$ est de multiplicité 1.

Une étude rapide du comportement asymptotique de la fonction $\log \rho(t)$ est faite dans la dernière partie.

4.2. Présentons une façon de calculer la dimension de Hausdorff. Il existe des constantes a et A telles que, pour tout $u \in G_1$:

$$0 < a \leq \lambda_u \leq A < 1,$$

d'où, si $u \in G_n$:

$$a^{tn} \leq \lambda_u^t \leq A^{tn}.$$

Notons $k_n = \#G_n$, il vient :

$$k_n a^{tn} \leq Z_n(t) \leq k_n A^{tn}$$

et

$$t \log a + \frac{1}{n} \log k_n \leq C_n(t) \leq t \log A + \frac{1}{n} \log k_n.$$

Maintenant, soit t_n tel que $\sum_{u \in G_n} \lambda_u^{t_n} = 1$, ie $C_n(t_n) = 0$, on a, puisque $C_n(0) = \frac{1}{n} \log k_n$:

$$\frac{C_n(0)}{\log a} \leq t_n \leq \frac{C_n(0)}{\log A}.$$

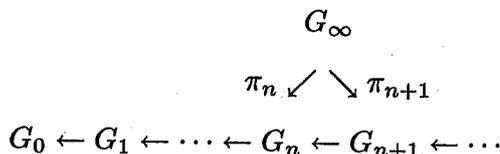
Puisque la suite des $C_n(0)$ converge, la suite des t_n est bornée. Conclusion : il existe un compact K tel que $t_n \in K$ pour $n \geq 0$. On sait d'autre part que, puisque les fonctions C_n sont convexes, la convergence simple de C_n vers C est en fait uniforme sur les compacts de \mathbf{R} . Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe n_0 tel que, si $n \geq n_0$

$$|C(t_n)| = |C_n(t_n) - C(t_n)| < \varepsilon.$$

Donc, si t est une valeur d'adhérence de la suite $(t_n \mid n \geq 0)$, on a $C(t) = 0$. Puisqu'une telle valeur est unique et qu'elle est la dimension de Hausdorff de (G_∞, δ) , on a montré :

(4.2.1) Pour chaque $n \geq 0$, soit t_n l'unique solution de $\sum_{u \in G_n} \lambda_u^{t_n} = 1$. La suite $(t_n \mid n \geq 0)$ converge vers la dimension de Hausdorff de (G_∞, δ) .

4.3. Justifions la terminologie de Gibbs. Rappelons



par le diagramme ci-dessus la situation projective : l'espace des chemins G_∞ est équipé de projections continues π_n , telles que $\pi \circ \pi_{n+1} = \pi_n$. Nous savons d'autre part qu'une mesure positive μ sur G_∞ est complètement déterminée par les marginales $\pi_n(\mu)$ sur chacun des G_n en ce sens que, si l'on se donne sur chaque G_n une mesure μ_n , ces données étant telles que $\pi(\mu_{n+1}) = \mu_n$, il existe une mesure μ unique sur G_∞ , telle que $\pi_n(\mu) = \mu_n$. Fixons $n \geq 0$, notons k_n le cardinal de G_n et soit l'application $\log \lambda : G_n \rightarrow \mathbf{R}$, qu'on appellera la fonction d'énergie au niveau n . On sait qu'il vient alors — toujours à ce niveau — des mesures de Gibbs $\gamma_{n,t}$ données en $u \in G_n$ par

$$\gamma_{n,t}(u) = e^{-nC_n(t)} \lambda_u^t.$$

Ces mesures vérifient un principe variationnel : elles minimisent l'entropie, à énergie fixée.

Bien entendu, à t fixé, ces mesures $\gamma_{n,t}$ ne forment pas un système projectif de mesures, ie, en général, $\pi_*(\gamma_{n+1,t})$ n'est pas $\gamma_{n,t}$. De ce fait, il n'existe pas de mesure γ_t sur G_∞ telle que $\pi_{n*}(\gamma_t)$ donne $\gamma_{n,t}$. Néanmoins, les mesures γ_t , exhibées en 3.2 sont telles que :

(4.3.1) Il existe une constante $K > 0$ (dépendant de t) telle que pour tout $n \geq 1$:

$$K^{-1} \gamma_{n,t} \leq \pi_{n*}(\gamma_t) \leq K \gamma_{n,t}.$$

La preuve repose sur les inégalités rappelées en 4.1 qui, en outre, au vu de la convergence en $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$, permettent de remplacer $\log \rho(t)$ par $C_n(t)$.

Par exemple, prenons $t = 0$. Chaque mesure de Gibbs $\gamma_{n,0}$ est l'équiprobabilité de G_n , donnant la valeur k_n^{-1} à chaque $u \in G_n$. Clairement, ces mesures ne forment pas un système projectif. Il en est cependant ainsi des mesures $\pi_{n*}(\gamma_0)$, données en $u \in G_n$ par

$$\gamma_0(u) = \frac{x_{\beta(u)}}{\rho(0)^n},$$

et l'on a

$$\frac{K^{-1}}{k_n} \leq \gamma_0(u) \leq \frac{K}{k_n}.$$

Notons au passage que

$$(4.3.2) \quad \frac{1}{n} \log k_n = \log \rho(0) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

4.4. Rappelons, en suivant [7] un résultat de grandes déviations. Les données sont les suivantes :

- (i) la suite d'ensemble fini G_n , pour $n \geq 1$, chacun muni de l'équiprobabilité,
- (ii) pour chaque $n \geq 1$, une fonction d'énergie $\log \lambda : G_n \rightarrow \mathbf{R}$.

A chaque niveau $n \geq 1$, on introduit la fonction de partition $Z_n(t)$ (4.1.1) et l'énergie libre au niveau $n : C_n(t) = \frac{1}{n} \log Z_n(t)$.

Comme on sait $C_n(t)$ converge simplement vers la fonction analytique $C(t) = \log \rho(t)$. Rappelons que cette fonction est convexe.

On note $I_C(z)$ la transformée de Legendre de la fonction $C(t)$, ie :

$$(4.4.1) \quad I_C(z) = \sup_t (tz - C(t)).$$

D'un autre côté, notons Q_n l'image de l'équiprobabilité par les variables $\frac{1}{n} \log \lambda : G_n \rightarrow \mathbf{R}$.

(4.4.2) La fonction $I(z) = I_C(z) + C(0)$ est appelée la fonction d'entropie de la suite $(Q_n \mid n \geq 1)$.

Elle est ainsi qualifiée parce qu'elle possède les propriétés suivantes :

(4.4.3) La fonction $I : \mathbf{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ vérifie les trois propriétés suivantes :

- (i) pour tout $a < \infty$, $I \leq a$ est compact,
- (ii) si F est fermé, $\limsup a_n^{-1} \log Q_n(F) \leq -\inf_F I$,
- (iii) si G est ouvert, $\liminf a_n^{-1} \log Q_n(G) \geq -\inf_G I$.

Clairement, sur un intervalle A de \mathbf{R} non réduit à un point :

$$(4.4.4) \quad \inf_{\bar{A}} I = \inf_A I = \inf_{\overset{\circ}{A}} I,$$

si bien que :

(4.4.5) si A est un intervalle de \mathbf{R} non réduit à un point, la suite $\frac{1}{n} \log Q_n(A)$ converge vers $-\inf_A I$. Autrement dit, en revenant à la transformée de Legendre de $C(t)$:

(4.4.6) soit A un intervalle de \mathbf{R} non réduit à un point : la suite

$$\frac{1}{n} \log \# \left\{ u \in G_n \mid \frac{1}{n} \log \lambda_u \in A \right\}$$

converge vers $-\inf_A I_C$.

4.5. L'analyse multifractale à une dimension que nous proposons repose sur l'utilisation des mesures de Gibbs γ_t . Remarquons que jusqu'ici, elles n'ont servi qu'à prouver rapidement l'existence d'une énergie libre. Rappelons rapidement les rudiments de thermodynamique propres à notre sujet. Les fonctions $w = \log \lambda$ ont pour valeur une énergie, d'où un premier exemplaire de la droite réelle \mathbf{R} , paramétrant l'énergie w . L'usage nomme température l'inverse de la variable conjuguée de l'énergie, d'où une seconde droite, paramétrant la température t , la mise en dualité de ces droites se faisant par le produit tw . La fonction énergie libre $C(t)$, étant strictement convexe, établit, via $C' : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, un isomorphisme entre la droite des températures et l'image de C' qui est l'intervalle ouvert où varie le paramètre énergie. L'idée est alors la suivante. Soit w une valeur d'énergie. Sans plus d'information, l'état statistique du système est γ_t , état de Gibbs de température t telle que

$C'(t) = w$. Comme nous le verrons plus loin, la transformée de Legendre de l'énergie libre $C(t)$ s'interprète comme l'entropie de la mesure γ_t . Le problème se pose de savoir ce qu'est une configuration, ce qu'est l'énergie d'une configuration. Les états de Gibbs sont sur l'espace G_∞ des chemins du graphe, aussi est-on a forcé de nommer configuration un chemin du graphe. Quant à l'énergie d'un chemin, il est loisible de la voir ainsi : soit $u = (u_0, u_1, \dots) \in G_\infty$. Au niveau n , vient $\pi_n u = (u_0, \dots, u_{n-1})$, d'énergie moyenne

$$\frac{1}{n} \log (\lambda_{u_0} \lambda_{u_1} \cdots \lambda_{u_{n-1}}).$$

Ainsi, la configuration u étant fixée, lui est associée une suite d'énergie, qui possède un ensemble de valeurs d'adhérence W_u . Voici les énoncés précis, corollaires d'énoncés plus généraux démontrés plus loin :

(4.5.1) *la mesure de Gibbs γ_t est concentrée sur l'ensemble*

$$G_{C'(t)} = \left\{ u \in G_\infty \mid \frac{1}{n} \log \lambda_{u_0} \cdots \lambda_{u_{n-1}} \rightarrow C'(t) \right\}.$$

Pour l'énoncé sur l'entropie, on procède ainsi : au niveau n , la partition G_n de G_∞ possède l'entropie $S_n(\gamma_t)$, pour la mesure de Gibbs γ_t . Alors

$$(4.5.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n(\gamma_t) = I(C'(t)).$$

(4.5.3) *La dimension de Hausdorff de $G_{C'(t)}$ est $I(C'(t))/C'(t)$.*

4.6. Présentons simplement une approche heuristique. Sur $G_{C'(t)}$, la métrique est donnée par $\delta(u, v) = e^{nC'(t)}$, si u et v se séparent au niveau n . D'autre part, on a les inégalités :

$$K^{-1} e^{n(C'(t)) - \log \rho(t)} \leq \gamma_t(u) \leq K e^{n(C'(t)) - \log \rho(t)}$$

Puisque γ_t est portée par $G_{C'(t)}$, on peut calculer la dimension de Hausdorff.

Les énoncés sont donnés en fonction des températures. Dualelement, fixons une énergie α . On définit alors

$$G_\alpha = \left\{ u \in G_\infty \mid \frac{1}{n} \log \lambda_{u_0} \cdots \lambda_{u_{n-1}} \rightarrow \alpha \right\},$$

ensemble des configurations d'énergie α . La dimension de Hausdorff de cet ensemble est $I(\alpha)/\alpha = d$.

On retrouve la célèbre formule de Ledrappier-Le San Young $d\alpha = I(\alpha)$ liant la dimension, le coefficient de Liapounov et l'entropie. Le coefficient de Liapounov s'exprime ici comme l'énergie, c'est-à-dire la limite de la suite $\frac{1}{n} \log \lambda_{u_0} \cdots \lambda_{u_{n-1}}$ donnant la moyenne géométrique des contractions des fonctions définissant dynamiquement le Cantor de type fini. Dans [3], on trouve ce traitement pour le cookie-cutter, qui peut être généralisé dans notre contexte, à l'aide de contractions λ_u pour $u \in \bigcup_{n \geq 0} G_n$, telles que λ_{uv} et $\lambda_u \lambda_v$ soient uniformément bornés pour tout couple (u, v) [19]. On trouve également dans ce dernier article l'étude d'une situation conduisant à une énergie libre non nécessairement différentiable.

§5. Analyse Multifractale à Plusieurs Dimensions

5.1. Développons le formalisme thermodynamique relatif à un graphe. Partons d'un graphe \mathcal{G} vérifiant les conditions (1.1.8) muni d'une application $w : G_1 \rightarrow \mathbf{R}^d$. Si u est une arête, on appellera w_u le vecteur d'énergie de l'arête u . On définit l'énergie d'un chemin

$u \in G_n$ en posant, si $u = u_0 u_1 \cdots u_{n-1}$:

$$w_u = w_{u_0} + \cdots + w_{u_{n-1}}.$$

Nous avons traité avant le cas $d = 1$ et $w = \log \lambda$. Notons $t \in \mathbf{R}^{d^*}$ la variable conjuguée de l'énergie et définissons la fonction de partition au niveau n par :

$$Z_n(t) = \sum_{u \in G_n} e^{\langle t, w_u \rangle},$$

ainsi que l'énergie libre du niveau n :

$$C_n(t) = \frac{1}{n} \log Z_n(t).$$

Considérons maintenant la matrice Λ_t , pour $t \in \mathbf{R}^{d^*}$, de coefficients $(A, B) \in G_0 \times G_0$ donnée par

$$\sum_{u: A \rightarrow B} e^{\langle t, w_u \rangle}.$$

Suivant (3.1.3), notons $\rho(t)$ la valeur propre de Perron-Frobenius de la matrice positive irréductible Λ_t .

(5.1.1) La fonction $\log \rho : \mathbf{R}^{d^*} \rightarrow \mathbf{R}$ est analytique et convexe.

Soit $t \neq 0 \in \mathbf{R}^{d^*}$ fixé. Etudions le comportement de $\log \rho(\alpha t)$ quand $\alpha \rightarrow \infty$. Posons

$$\delta(t) = \sup_{u \in G_1} \langle t, w_u \rangle.$$

Autrement dit, $\delta(t)$ est la fonction support du convexe engendré par les vecteurs d'énergies w_u . Le coefficient d'indice (A, B) de la matrice $\Lambda_{\alpha t}$ s'écrit

$$e^{\alpha \delta(t)} \sum_{u: A \rightarrow B} e^{\alpha (\langle t, w_u \rangle - \delta(t))}.$$

Evidemment, $\langle t, w_u \rangle - \delta(t) \leq 0$, donc :

$$\begin{aligned} \#\{u : A \rightarrow B \mid \langle t, w_u \rangle = \delta(t)\} &\leq \sum_{u: A \rightarrow B} e^{\alpha (\langle t, w_u \rangle - \delta(t))} \\ &\leq \#\{u : A \rightarrow B\}. \end{aligned}$$

Ainsi lorsque α tend vers $+\infty$, le rayon spectral de la matrice $e^{-\alpha \delta(t)} \Lambda_{\alpha t}$ décroît vers le rayon spectral $\rho_{t, \infty}$ de la matrice dont le coefficient d'indice (A, B) est donnée par le premier terme de l'inégalité ci-dessus, d'où :

$$(5.1.2) \quad \log \rho(\alpha t) = \alpha \delta(t) + \log \rho_{t, \infty} + o(1).$$

De même, lorsque α tend vers $-\infty$,

$$\log \rho(\alpha t) = -\alpha \delta(-t) + \log \rho_{-t, \infty} + o(1).$$

Donc, s'il existe un t tel que $\delta(t)$ et $\delta(-t)$ sont de signes opposés, l'application $\log \rho$ est surjective. Cette construction équivaut au fait que zéro ne soit pas dans l'enveloppe convexe des vecteurs $\{w_u\}$ pour $u \in G_1$ si bien que :

(5.1.3) si 0 n'est pas dans l'enveloppe convexe des vecteurs w_u , $u \in G_1$, la fonction $\log \rho : \mathbf{R}^{d^*} \rightarrow \mathbf{R}$ est surjective.

Avec nos données, il est loisible de dire que la fonction de partition est la composée $C = \rho \circ Z$:

$$\mathbf{R}^{d^*} \xrightarrow{Z} \mathbf{R}^{\{(A, B) \mid \exists u: A \rightarrow B\}} \xrightarrow{\rho} \mathbf{R}.$$

La première application, en la composante (A, B) est donnée par

$$Z_{A,B}(t) = \sum_{u:A \rightarrow B} e^{\langle t, w_u \rangle}$$

et la seconde est le rayon spectral des matrices. Ces fonctions sont analytiques et $\log \rho Z$ est la fonction énergie libre. Comme en (3.2.1), on définit une mesure de Gibbs sur G_∞ , donnée en le cylindre $u \in G_n$ par :

$$\gamma_t(u) = \frac{e^{\langle t, w_u \rangle}}{\rho(t)^n} x_{\beta(u_{n-1})}$$

et on a :

(5.1.4) *il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $u \in G_n$:*

$$K^{-1} \leq \frac{\gamma_t(u)}{e^{-n \log \rho(t)} e^{\langle t, w \rangle}} \leq K.$$

Comme avant, on prouve :

(5.1.5) $C_n(t) = \log \rho(t) + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$.

En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, on montre

(5.1.6) *La mesure de Gibbs γ_t est concentrée sur l'ensemble*

$$\{u \in G_\infty \mid \frac{1}{n} \log w_u \rightarrow C'(t)\}.$$

5.2. Particularisons la première coordonnée, en vue d'obtenir des résultats de nature implicite. Prenons un vecteur d'énergie \tilde{w} , à $d+1$ dimensions, sous la forme suivante

$$\tilde{w} = (\log \lambda, w)$$

où λ est une application de G_1 dans $]0, 1[$ et w une application de G_1 dans \mathbf{R}^d .

Notons $(t, \theta) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^{d^*}$ la variable conjuguée. La matrice $\Lambda^{t, \theta}$ en (A, B) est donnée par

$$\sum_{u:A \rightarrow B} \lambda_u^t e^{\langle \theta, w_u \rangle}.$$

Notons $\bar{\lambda} = \sup_{u \in G_1} \lambda_u$ et $\underline{\lambda} = \inf_{u \in G_1} \lambda_u$.

De la même façon qu'en 5.1, on obtient, pour chaque θ ,

(5.2.1) $C(t, \theta) = t \log \bar{\lambda} + a(\theta) + o(1)$ ($t \rightarrow +\infty$) et $C(t, \theta) = t \log \underline{\lambda} + b(\theta) + o(1)$ ($t \rightarrow -\infty$).

Il s'ensuit que pour θ fixé, la fonction $C(t, \theta)$ décroît de $-\infty$ à $+\infty$.

On a donc prouvé :

(5.2.2) *soit $a \in \mathbf{R}$ fixé. Pour chaque $\theta \in \mathbf{R}^{d^*}$, il existe un unique $t \in \mathbf{R}^*$ tel que $C(t, \theta) = a$.*

On a donc établi que

(5.2.3) *les lignes de niveau $C(t, \theta) = a$ sont paramétrées par des fonctions analytiques convexes $\varphi_a : \mathbf{R}^{d^*} \rightarrow \mathbf{R}$ (ie $C(\varphi_a(\theta), \theta) = a$ pour tout a et θ).*

5.3. A chaque niveau n , considérons l'ensemble fini G_n , équipé de la mesure de Gibbs

$$\gamma_{n,t,\theta} = e^{-nC_n(t,\theta)} \lambda^t e^{\langle \theta, w \rangle}$$

où t et θ sont fixés et les fonctions

$$w / \log \lambda : G_n \rightarrow \mathbf{R}^d.$$

Ces fonctions permettent de définir sur \mathbf{R}^d une suite de probabilités

$$Q_n = \left(\frac{w}{\log \lambda} \right) (\gamma_{n,t,\theta}).$$

Nous allons prouver (en suivant [20]) que cette suite possède une valeur d'équilibre c'est à dire :

(5.3.1) La suite Q_n converge exponentiellement vers $-\varphi'_a(\theta)$.

Preuve. Soient $v \in \mathbf{R}^{d*}$ et $b \in \mathbf{R}$. La fonction affine $y = \langle x, v \rangle + b$ définit l'ouvert de \mathbf{R}^d :

$$U = \{x \in \mathbf{R}^d \mid \langle x, v \rangle + b > 0\}$$

et le fermé

$$U^C = \{x \in \mathbf{R}^d \mid \langle x, v \rangle + b \leq 0\}.$$

Calculons $Q_n(U^C)$. Il s'agit de :

$$\sum_{u \in G_n, \frac{1}{\log \lambda_u} \langle w_u, v \rangle + b \leq 0} e^{-nC_n(t, \theta)} \lambda_u^t e^{\langle \theta, w_u \rangle}$$

Autrement écrit :

$$\begin{aligned} & e^{-nC_n(t, \theta)} \sum_{\langle w_u, v \rangle \geq -b \log \lambda_u} e^{t \log \lambda_u} e^{\langle \theta, w_u \rangle} e^{-b \log \lambda_u} e^{b \log \lambda_u} \\ & \leq e^{-nC_n(t, \theta)} \sum_{\langle w_u, v \rangle \geq -b \log \lambda_u} e^{(t+b) \log \lambda_u} e^{\langle \theta+v, w_u \rangle} \\ & \leq e^{-nC_n(t, \theta)} \sum_{u \in G_n} e^{(t+b) \log \lambda_u} e^{\langle \theta+v, w_u \rangle} \end{aligned}$$

Enfin :

$$Q_n(U^C) \leq e^{-nC_n(t, \theta)} e^{nC_n(t+b, \theta+v)},$$

d'où :

$$\limsup \frac{1}{n} \log Q_n(U^C) \leq C(t+b, \theta+v) - C(t, \theta),$$

lorsque

$$U^C = \{x \in \mathbf{R}^d \mid \langle x, v \rangle + b \leq 0\}.$$

Clairement, l'inégalité est encore valable, en changeant b et v en hb et hv , pourvu que $h > 0$.

Supposons maintenant que $-\varphi'_a(\theta) \in U$, ie $\langle \varphi'_a(\theta), v \rangle < b$. Vu la convexité de φ_n , le rapport $h^{-1} (\varphi_a(\theta + hv) - \varphi_a(\theta))$ décroît et tend vers $\langle \varphi'_a(\theta), v \rangle$ lorsque h décroît vers 0. De ce fait, il existe $h > 0$ tel que $\varphi_a(\theta + hv) - \varphi_a(\theta) < hb$. Autrement dit :

$$\varphi_a(\theta + hv) < t + hb.$$

Cette inégalité stricte signifie que $C(t + hb, \theta + hv) < a$ donc :

$$C(t + hb, \theta + v) < C(t, \theta),$$

ce qui prouve que si

$$U = \{x \in \mathbf{R}^d \mid \langle x, v \rangle + b < 0\}$$

et $-\varphi'_a(\theta) \in U$, alors

$$\limsup \frac{1}{n} \log Q_n(U^C) < 0.$$

D'autre part, il est facile de prouver que, si $\limsup \frac{1}{n} \log Q_n(A) < 0$, $\limsup \frac{1}{n} \log Q_n(B) < 0$ alors $\limsup \frac{1}{n} \log Q(A \cup B) < 0$. De ce fait, si U est un voisinage ouvert polyédrique de

$-\varphi'_u(\theta)$, c'est à dire intersection finie de demi-espaces ouverts, $\limsup \frac{1}{n} \log Q_n(U^C) < 0$. c.q.f.d.

5.4. Notons $\gamma_{t,\theta}$ la mesure de Gibbs sur G_∞ donnée en $u \in G_n$ par

$$\gamma_{t,\theta}(u) = \frac{\lambda_u^t e^{\langle \theta, w_u \rangle}}{\rho(\theta, t)^n x_{\beta(u_{n-1})}}$$

Rappelons que

(5.4.1) il existe $K > 0$ tel que pour tout $u \in G_n$:

$$K^{-1} \leq \frac{\gamma_{t,\theta}(u)}{e^{-nC(t,\theta)} \lambda_u^t e^{\langle \theta, w_u \rangle}} \leq K$$

et que

$$(5.4.2) \quad C_n(t, \theta) = \log C(t, \theta) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

de ce fait, dans (5.4.1), on peut remplacer $e^{-nC(t,\theta)}$ par $e^{-nC_n(t,\theta)}$, si bien que l'on obtient le théorème principal :

(5.4.3) **Théorème.** Si $C(t, \theta) = a$, la mesure de Gibbs $\gamma_{t,\theta}$ est une mesure sur l'ensemble

$$G_{(a,\theta)}^{(\infty)} = \{u \in G_\infty \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{u|n}}{\log \lambda_{u|n}} \rightarrow -\varphi'_a(\theta)\}.$$

(5.4.4) **Corollaire.** Supposons que $C(t, \theta) = 0$. Notons I_0 la transformée de Legendre de la fonction $\varphi_0 : \mathbf{R}^{d^*} \rightarrow \mathbf{R}$. La dimension de Hausdorff de $G_{0,\theta}^{(\infty)}$ est $-I_0(\varphi'_0(\theta))$.

Preuve. Soit $u \in G_{0,\theta}^{(\infty)}$. Chaque $u|n = (u_0, \dots, u_{n-1})$ (noter l'abus de notation) est une boule fermée centrée en u , de rayon $\lambda_{u|n}$. Considérons le rapport

$$\frac{\log \gamma_{t,\theta}(u|n)}{\log \lambda_{u|n}}$$

qui, au vu de (5.4.1) a la même limite que le rapport

$$\frac{t \log \lambda_{u|n} + \langle \theta, w_{u|n} \rangle}{\log \lambda_{u|n}}$$

Cette limite est $t - \langle \varphi'_0(\theta), \theta \rangle$, c'est à dire $-I_0(\varphi'_0(\theta))$, car $u \in G_{0,\theta}^{(\infty)}$. Il suffit d'appliquer par exemple le lemme de Kinney-Pitcher Billingsley pour conclure.

Notons ici la confusion entre entropie et dimension qui tient au fait qu'on renormalise précisément par les rayons des boules.

5.5. En spécialisant les données λ et w , on prouve simplement les résultats annoncés en 4.5.

§6. Application aux Ensembles Sofiques

6.1. Partons d'un graphe \mathcal{G} vérifiant (1.1.8). Un entier $b \geq 1$ (une base de développement) étant fixé, on attribue à chaque arête u du graphe un nombre entier $\kappa(u)$, son étiquette, compris entre 0 et $b-1$. De cette façon, à chaque élément $u = (u_0, u_1, \dots)$ de G_∞ est associé le réel

$$\kappa(u_0) + \frac{1}{b} \kappa(u_1) + \frac{1}{b^2} \kappa(u_2) + \dots$$

qu'on note $f(u)$, définissant ainsi une application $f : G_\infty \rightarrow \mathbf{R}$.

(6.1.1) L'image de f est appelée un ensemble sofique.

Il est facile de se rendre compte que f est une quasi-isométrie si et seulement si c'est une injection. Cette condition d'injectivité est réalisée si l'on ne peut trouver deux chemins infinis sur le graphe, de même origine et dont les suites des étiquettes soient $(i, b-1, b-1, \dots)$ et $(i+1, 0, 0, \dots)$ avec $0 \leq i < b-1$.

(6.1.2) *L'ensemble sofique défini par le graphe \mathcal{G} et l'étiquetage est alors un cantor fractal rigide de structure (\mathcal{G}, b^{-1}) , lorsque $\sup G_1 - \inf G_1 < b-1$.*

6.2. Du point de vue thermodynamique simple, où l'énergie est le logarithme des rayons de boule, pour cette structure, il vient évidemment

$$(6.2.1) \quad C(t) = -t \log b + \log \rho_0$$

ce qui prouve facilement un résultat de Furstenberg et Parry, cité dans^[14].

(6.2.2) *La dimension de Hausdorff de l'ensemble sofique défini ci-dessus, sous la condition de quasi-isométrie, est $\log \rho_0 / \log b$.*

Voyons le point de vue multidimensionnel. Outre la pondération en b^{-1} , donnons nous un vecteur d'énergie $w : G_1 \rightarrow \mathbf{R}^d$. Le calcul de la matrice $\Lambda_{t,\theta}$ conduit facilement à

$$\Lambda_{t,\theta} = \frac{1}{b^t} \Lambda_\theta$$

où Λ_θ est la matrice dont le coefficient d'indice (A, B) est

$$\sum_{u:A \rightarrow B} e^{\langle \theta, w_u \rangle}.$$

On notera ρ_θ le rayon spectral de cette matrice. Clairement $C(t, \theta) = \log \rho_\theta - t \log b$, de sorte que l'équation $t = \varphi(\theta)$ de la ligne de niveau $C(t, \theta) = 0$ est $\varphi(\theta) = \log \rho_\theta / \log b$. Du point de vue multifractal, on s'intéresse à

$$\left\{ u \in G_\infty \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_u|n}{-n \log b} = -\varphi'(\theta) \right\},$$

c'est-à-dire à

$$G_{\infty,\theta} = \left\{ u \in G_\infty \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_u|n}{n} = \frac{\rho'_\theta}{\rho_\theta} \right\}.$$

En appliquant (5.4.4) :

(6.2.3) *La dimension de Hausdorff de $G_{\infty,\theta}$ est*

$$(\log b)^{-1} \left(\log \rho_\theta - \left\langle \theta, \frac{\rho'_\theta}{\rho_\theta} \right\rangle \right).$$

Ce résultat a de multiples applications. Par exemple, prenant pour w_1, \dots, w_d des fonctions à valeurs dans $\{0, 1\}$, on obtient une analyse multifractale en vecteur de fréquence.

En réalité, ces résultats ne nécessitent pas que la fonction f soit une quasi-isométrie. L'essentiel est de pouvoir transporter sur $[0, 1]$ en conservant leurs exposants de Hölder les diverses mesures considérées sur G_∞ : il en est ainsi lorsque, pour tout intervalle b -adique I de longueur b^{-n} , son image réciproque $f^{-1}(I)$ est la réunion d'un cylindre d'ordre n et d'au plus une infinité dénombrable de points.

REFERENCES

- [1] Bedford, T., Dimension and dynamics for fractal recurrent sets, *J. London Math. Soc.*, **33:2** (1986), 89-100.
- [2] Ben Nasr, F., Etude de mesures aléatoires et calculs de dimensions de Hausdorff, Thèse, Université de Paris-Sud, Orsay, 1986.

- [3] Bohr, T. & Rand, D., The entropy function for characteristics exponents, *Physica*, 25D, North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [4] Bowen, R., Equilibrium States and Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, *Lect. Notes in Math.*, No.470, Springer Verlag, Berlin, 1975.
- [5] Collet, P., Lebowitz, J. L. & Porzio, A., The dimension spectrum of some dynamical systems, *J. Statist. Phys.*, 47 (1987), 609-644.
- [6] Dekking, F.M., Recurrent sets, *Adv. in Math.*, 44 (1982), 78-104.
- [7] Ellis, R.S., Large deviations for a general class of random vectors, *Ann. Prob.*, 12:1 (1984), 1-12.
- [8] Feigenbaum, M. J., Some characterizations of strange sets, *J. Statist. Phys.*, 46 (1987), 919-924.
- [9] Feigenbaum, M. J., Scaling spectra and return times of dynamical systems, *J. Statist. Phys.*, 46 (1987), 925-932.
- [10] Franks, J. M., Homology and dynamical systems, Regional conference series in mathematics, No.49, 1980.
- [11] Halsey, T., Jensen, M., Kadanoff, L., Procaccia, I. et Shraiman B., Fractal measures and their singularities : The characterization of strange sets, *Phys. Rev. A*, 33 (1986), 1141-1151.
- [12] Hutchinson, J. E., Fractals and self-similarity, *Indiana Univ. Math. J.*, 30 (1981), 713-747.
- [13] Kahane, J.P. & Salem, R., Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Act. sci. et ind., Hermann, Paris, 1963.
- [14] Kenyon, R. & Peres, Y., Intersecting random translates of invariant cantor sets, Preprint, 1990.
- [15] Lyons, R., Random walks and percolation on trees, *Annals of Probability*, 18:3 (1990), 931-958.
- [16] Marion, J., Mesure de Hausdorff et théorie de Perron-Frobenius des matrices non négatives, *Ann. Inst. Fourier*, 35:4 (1985), 99-125.
- [17] Mauldin, R. D. & William, S. C., Hausdorff dimension in graph directed construction, *Trans. Am. Math. Soc.*, 309:2 (1988), 811-829.
- [18] Mandelbrot, B., The fractal geometry of nature, W. H. Freeman, New York, 1983.
- [19] Michon, G., Une construction des mesures de Gibbs sur certains ensembles de Cantor, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 308: série I (1989), 315-318.
- [20] Brown, G., Michon, G. & Peyrière, J., On the multifractal analysis of measures, *J. stat. phys.*, 66:3,4 (1992).
- [21] Moran, P. A. P., On plane sets of fractional dimensions, *Proc. London Math. Soc.*, 51:2 (1949), 415-423.
- [22] Tricot, C., 12 définitions de la densité logarithmique, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 293:série I (1981), 549-552.
- [23] Varga, R.S., Matrix iterative analysis, Prentice-Hall, inc., Englewood Cliffs, 1962.