数 学 年 刊
1 (1) 1980

线性控制系统的对偶性

韩 京 清
(中国科学院系统科学研究所)

卡尔曼在[1]中首次指出了控制系统的对偶性质，确立了"对偶原理"．但是，他只给出了形式上的对偶关系，没有揭示对偶性质之间的内在联系．后来，一些人用变分学或数学规划中的对偶性来说明二次指标最优控制与最优估计之间的对偶性(见[2, 3, 5])．但是，这些方法不好用来说明系统理论中其它对偶性的相互转化．在[4]中，根据状态在一方向 $\boldsymbol{a}$ 上投影的估计值等于输出所决定的泛函在对偶系统中把初值引到 $\boldsymbol{a}$ 的控制值的关系，说明了二次指标最优控制问题与最优卡尔曼滤波的等价性(见[4]，178—187页)．这里已涉及到了对偶性的本质．在[10]中，用对偶系统之间存在的较一般的关系，说明了和[4]同样的问题(见[10]183—185页)．[10]中所用的关系，曾在[6]中用来说明对偶概念的转化及二次指标最优控制与最优逼近之间的等价性．[6]中曾把对偶的系统之间存在着的恒等式叫做"对偶关系式"．

本文的目的是确立各种类型线性控制系统的对偶关系式；说明确定性系统的能控性和能观测性的转化；用对偶关系式讨论随机系统的能控性及能观测性；说明定常系统调节器和观测器的转化；讨论降维观测器的对偶性质．

为书写方便，文中用 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}$ 表示原系统的状态、输入及输出，其维数分别为 n, r, p. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}$ 都是列向量．用 $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta}$ 表示对偶系统的状态、输出及输入，它们是行向量．

1. 对偶关系式

确定性时变系统

$$\Sigma_1:\quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C(t)\boldsymbol{x} + D(t)\boldsymbol{u} \end{cases}$$

的对偶系统取为

$$\Sigma_1^*:\quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\psi}} = -\boldsymbol{\psi}A(t) - \boldsymbol{\eta}C(t) \\ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}B(t) + \boldsymbol{\eta}D(t). \end{cases}$$

求 $\boldsymbol{\psi}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 的乘积对 t 的微分，并整理得

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{\psi}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\psi}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{y},$$

从 t_0 到 t_1 积分此式，得

$$\boldsymbol{\psi}(t_1)\boldsymbol{x}(t_1) - \boldsymbol{\psi}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (\boldsymbol{\varphi}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau) - \boldsymbol{\eta}(\tau)\boldsymbol{y}(\tau))d\tau, \qquad (1)$$

本文1978年6月7日收到，1978年10月19日修改．

这就是系统 Σ_1 和 Σ_1^* 之间存在着的恒等式.

时变离散系统

$$\Sigma_2:\quad \begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1}=A_k\boldsymbol{x}_k+B_k\boldsymbol{u}_k \\ \boldsymbol{y}_k=C_k\boldsymbol{x}_k+D_k\boldsymbol{u}_k \end{cases}$$

的对偶系统取为

$$\Sigma_2^*:\quad \begin{cases} \boldsymbol{\psi}_{k-1}=\boldsymbol{\psi}_kA_k+\boldsymbol{\eta}_kC_k \\ \boldsymbol{\varphi}_k=\boldsymbol{\psi}_kB_k+\boldsymbol{\eta}_kD_k. \end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_k\boldsymbol{x}_{k+1}&=\boldsymbol{\psi}_kA_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{\psi}_kB_k\boldsymbol{u}_k \\ &=(\boldsymbol{\psi}_kA_k+\boldsymbol{\eta}_kC_k)\boldsymbol{x}_k+(\boldsymbol{\psi}_kB_k+\boldsymbol{\eta}_kD_k)\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{\eta}_k(C_k\boldsymbol{x}_k+D_k\boldsymbol{u}_k) \\ &=\boldsymbol{\psi}_{k-1}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{\varphi}_k\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{\eta}_k\boldsymbol{y}_k, \end{aligned}$$

故可得

$$\boldsymbol{\psi}_N\boldsymbol{x}_{N+1}-\boldsymbol{\psi}_0\boldsymbol{x}_1=\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_k\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{\eta}_k\boldsymbol{y}_k, \tag{2}$$

这是系统 Σ_2 和 Σ_2^* 之间存在着的恒等式*.

一类随机系统和脉冲系统可描写成

$$\Sigma_3:\quad \begin{cases} d\boldsymbol{x}=A(t)\boldsymbol{x}dt+B(t)d\boldsymbol{u} \\ d\boldsymbol{y}=C(t)\boldsymbol{x}dt+D(t)d\boldsymbol{u}, \end{cases}$$

其中, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ 是确定性矩阵.

如果 Σ_3 是随机系统,则假定 $\boldsymbol{u}(t)$ 是白噪声通过某一线性系统 $\Sigma_{\boldsymbol{u}}$ 给出的输出. 这时 $E\boldsymbol{u}(t)$是可微的, 记 $\boldsymbol{n}(t)=\dfrac{d}{dt}E\boldsymbol{u}(t)$. 系统 Σ_3 的各量的均值将满足确定性方程

$$\Sigma_3':\quad \begin{cases} d(E\boldsymbol{x})=A(t)(E\boldsymbol{x})dt+B(t)\boldsymbol{n}(t)dt \\ d(E\boldsymbol{y})=C(t)(E\boldsymbol{x})dt+D(t)\boldsymbol{n}(t)dt, \end{cases}$$

系统 Σ_3' 叫做相应于 Σ_3 的确定性系统. 系统 $\Sigma_{\boldsymbol{u}}$ 就是系统 Σ_3 的控制器,或噪声发生器.

如果 Σ_3 为脉冲系统,则假定 $\boldsymbol{u}(t)$ 为有界变差函数.

系统 Σ_3 和 Σ_3' 的对偶系统均取为

$$\Sigma_3^*=\Sigma_1^*,$$

这是一个确定性系统. 和前面一样,可以得到 Σ_3 和 Σ_3^* 之间存在着的如下恒等式

$$\boldsymbol{\psi}(t_1)\boldsymbol{x}(t_1)-\boldsymbol{\psi}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{\varphi}(\tau)d\boldsymbol{u}(\tau)-\boldsymbol{\eta}(\tau)d\boldsymbol{y}(\tau)) \tag{3}$$

这个恒等式的存在是一类随机问题和确定性问题之间存在一些对偶性的根本原因.

对线性定常系统

$$\Sigma_4:\quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}+D\boldsymbol{u}, \end{cases} \qquad \begin{cases} (sI-A)\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{u}+\boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}+D\boldsymbol{u}, \end{cases}$$

---

* 关于离散系统,复旦大学李训经同志曾推出系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1}=A_k(\boldsymbol{x}_k+B_k\boldsymbol{u}_k) \\ \boldsymbol{y}_k=C_k\boldsymbol{x}_k+D_k\boldsymbol{u}_k \end{cases}$$

和系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{\psi}_k=\boldsymbol{\psi}_{k+1}A_k+\boldsymbol{\eta}_kC_k \\ \boldsymbol{\varphi}_k=\boldsymbol{\psi}_kB_k+\boldsymbol{\eta}_k(D_k-C_kB_k) \end{cases}$$

之间存在着的恒等式

$$\boldsymbol{\psi}_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{\psi}_k\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{\varphi}_k\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{\eta}_k\boldsymbol{y}_k,$$

从而有

$$\boldsymbol{\psi}_{N+1}\boldsymbol{x}_{N+1}-\boldsymbol{\psi}_0\boldsymbol{x}_0=\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{\varphi}_k\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{\eta}_k\boldsymbol{y}_k.$$

对偶系统取为

$$\Sigma_4^*:\quad \begin{cases}\dot{\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{\psi}A+\boldsymbol{\eta}C\\ \boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\psi}B+\boldsymbol{\eta}D,\end{cases}\qquad \begin{cases}\boldsymbol{\psi}(sI-A)=\boldsymbol{\eta}C+\boldsymbol{\psi}_0\\ \boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\psi}B+\boldsymbol{\eta}D,\end{cases}$$

后面是用拉氏变换表示的系统，其中 $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{\psi}_0$ 分别为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 的初值.

对 Σ_4 的拉氏变换表示式的第一式左乘 $\boldsymbol{\psi}$, Σ_4^* 的第一式右乘 $\boldsymbol{x}$, 相减并整理，得

$$\boldsymbol{\psi}_0\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{y}, \tag{4}$$

这是 Σ_4 和 Σ_4^* 的拉氏变换之间存在着的恒等式. 在时域中表示此恒等式，得

$$\boldsymbol{\psi}_0\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\psi}(t)\boldsymbol{x}_0=\int_0^t(\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)-\boldsymbol{\eta}(t-\tau)\boldsymbol{y}(\tau))d\tau \tag{5}$$

对定常离散系统

$$\Sigma_5:\quad \begin{cases}\boldsymbol{x}_{k+1}=A\boldsymbol{x}_k+B\boldsymbol{u}_k\\ \boldsymbol{y}_k=C\boldsymbol{x}_k+D\boldsymbol{u}_k\end{cases}$$

对偶系统取为

$$\Sigma_5^*:\quad \begin{cases}\boldsymbol{\psi}_{k+1}=\boldsymbol{\psi}_kA+\boldsymbol{\eta}_kC\\ \boldsymbol{\varphi}_k=\boldsymbol{\psi}_kB+\boldsymbol{\eta}_kD,\end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}_0\boldsymbol{x}_N&=\boldsymbol{\psi}_0A\boldsymbol{x}_{N-1}+\boldsymbol{\psi}_0B\boldsymbol{u}_{N-1}\\ &=(\boldsymbol{\psi}_0A+\boldsymbol{\eta}_0C)\boldsymbol{x}_{N-1}+(\boldsymbol{\psi}_0B+\boldsymbol{\eta}_0D)\boldsymbol{u}_{N-1}-\boldsymbol{\eta}_0(C\boldsymbol{x}_{N-1}+D\boldsymbol{u}_{N-1})\\ &=\boldsymbol{\psi}_1\boldsymbol{x}_{N-1}+\boldsymbol{\varphi}_0\boldsymbol{u}_{N-1}-\boldsymbol{\eta}_0\boldsymbol{y}_{N-1},\end{aligned}$$

故可得

$$\boldsymbol{\psi}_0\boldsymbol{x}_N-\boldsymbol{\psi}_N\boldsymbol{x}_0=\sum_{k=1}^{N}(\boldsymbol{\varphi}_{N-k}\boldsymbol{u}_{k-1}-\boldsymbol{\eta}_{N-k}\boldsymbol{y}_{k-1}). \tag{6}$$

这是 Σ_5 和 Σ_5^* 之间存在着的恒等式.

恒等式(1)—(6)叫做相应系统的“对偶关系式”. 它们是线性系统的对偶概念和对偶性质相互转化的桥梁.

2. 能控性和能观测性

命题 1　系统 Σ_1^* 在 $[t_0, t_1]$ 上的完全能控性(完全能观测性)通过对偶关系式(1)转化为系统 Σ_1 在 $[t_0, t_1]$ 上的完全能观测性(完全能控性).

证　设 Σ_1^* 在 $[t_0, t_1]$ 上完全能控，又设 $\boldsymbol{u}(t)\equiv 0$. 这时，对偶关系式(1)变为

$$\boldsymbol{\psi}(t_1)\boldsymbol{x}(t_1)-\boldsymbol{\psi}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)=-\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{\eta}(\tau)\boldsymbol{y}(\tau)d\tau, \tag{7}$$

根据 Σ_1^* 的完全能控性，对任给的初值 $\boldsymbol{\psi}(t_0)$, 必有控制 $\boldsymbol{\eta}(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, 它把 $\boldsymbol{\psi}(t_0)$ 在 t_1 时刻引到 0 状态. 今取 Σ_1^* 的如下 n 个初值

$$\boldsymbol{\psi}_i(t_0)=[\psi_{i1}\psi_{i2}\cdots\psi_{in}],\ \psi_{ij}=\delta_{ij},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{8}$$

把 $\boldsymbol{\psi}_i(t_0)$ 在 t_1 时刻引到 0 状态的控制分别记为

$$\boldsymbol{\eta}_i(t),\ t\in[t_0, t_1],\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

这时有

$$-\boldsymbol{\psi}_i(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)=-\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{\eta}_i(\tau)\boldsymbol{y}(\tau)d\tau,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{9}$$

记
$$H(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1(t)\\ \vdots\\ \boldsymbol{\eta}_n(t)\end{bmatrix}.$$
则由(7)式得
$$\boldsymbol{x}(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}H(\tau)\boldsymbol{y}(\tau)d\tau. \tag{10}$$
这说明，系统 Σ_1 的初值 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 是由输出 $\boldsymbol{y}(t)$, $t\in[t_0, t_1]$ 完全决定. 因此系统 Σ_1 在 $[t_0, t_1]$ 上完全能观测.

反之，设 Σ_1^* 在 $[t_0, t_1]$ 上完全能观测，又设 $\boldsymbol{\eta}(t)\equiv 0$. 这时，对偶关系式(1)变为
$$\boldsymbol{\psi}(t_1)\boldsymbol{x}(t_1)-\boldsymbol{\psi}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{\varphi}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau, \tag{11}$$
根据 Σ_1^* 的完全能观测性，初值组(8)所给出的输出组 $\boldsymbol{\varphi}_i(t)$, $(i=1, 2, \cdots, n)$, 在 $[t_0, t_1]$ 上线性无关. 记
$$G(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1(t)\\ \vdots\\ \boldsymbol{\varphi}_n(t)\end{bmatrix}.$$
则其行向量线性无关. 由此，对任意 $\boldsymbol{x}(t_0)$, 积分方程
$$\boldsymbol{x}(t_0)=-\int_{t_0}^{t_1}G(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \tag{12}$$
有解，如
$$\boldsymbol{u}_0(t)=-G^{\tau}(t)W^{-1}\boldsymbol{x}(t_0), \tag{13}$$
其中
$$W=\int_{t_0}^{t_1}G(\tau)G^{\tau}(\tau)d\tau,$$
把这个 $\boldsymbol{u}_0(t)$ 代到(11)式，得
$$\boldsymbol{\psi}_i(t)\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{\psi}_i(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{\varphi}_i(\tau)\boldsymbol{u}_0(\tau)d\tau=0, \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$
由于 $\boldsymbol{\psi}_i(t_1)$ 是系统 Σ_1^* 的齐次方程的以 $\boldsymbol{\psi}_i(t_0)$ 为初值的解在 t_1 时刻的值，而 $\{\boldsymbol{\psi}_i(t_0)\}$ 线性无关，因此向量组 $\{\boldsymbol{\psi}_i(t_1)\}$ 也线性无关，故必有
$$\boldsymbol{x}(t_1)=0.$$
这说明，对任给的 $\boldsymbol{x}(t_0)$, 必有 $\boldsymbol{u}_0(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, 它把 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 在 t_1 时刻引到 0 状态，即系统 Σ_1 在 $[t_0, t_1]$ 上完全能控. 证毕.

命题 2 当 Σ_1 能观测时，由 $\boldsymbol{y}(t)$ 确定初值 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 的权函数阵 $H(t)$ 可由对偶系统 Σ_1^* 的适当输入来组成. 当 Σ_1 能控时，把给定初值引到 0 状态的控制 $\boldsymbol{u}_0(t)$ 可由系统 Σ_1^* 的适当输出来构造.

这是由(10), (12), (13)式直接得到.

3. 关于随机系统的能控性和能观测性

本节用对偶关系式(3)讨论随机系统 Σ_3 的能控性和能观测性，说明系统 Σ_3 的能控、能观测性与相应确定性系统 Σ_3' 的能控、能观测性一致.

系统 Σ_3 的随机性完全由输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 的随机性和 Σ_3 初值的随机性来决定. 假定随机变量 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 是与 $\boldsymbol{u}(t)$ 相互独立，$\boldsymbol{u}(t)$ 是白噪声通过线性系统 $\Sigma_{\boldsymbol{u}}$ 给出的输出. 这时，

$\boldsymbol{u}(t)$是由 Σ_u 完全决定. 可以用 Σ_u 的不同(即控制器和噪声发生器的不同)来描述 $\boldsymbol{u}(t)$ 的不同. 工程实际中遇到的大量随机系统就是这种类型. 下面,用 $U[t_0, t_1]$ 表示某一给定白噪声通过各种不同的 Σ_u 所给出的所有可能输出的全体.

定义 1 随机系统 Σ_3 在 $[t_0, t_1]$ 上完全能控,是指对任给的初值 $\boldsymbol{x}(t_0)$, 总存在一控制 $\boldsymbol{u}_0(t)\in U[t_0, t_1]$, 它把 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 在 t_1 时刻引到 $\boldsymbol{x}(t_1)$, 使得

$$E\boldsymbol{x}(t_1)=0.$$

命题 3 随机系统 Σ_3 在$[t_0, t_1]$上完全能控的充分必要条件为对偶系统 Σ_3^* 在 $[t_0, t_1]$ 上完全能观测.

证 在对偶关系式(3)中令 $\boldsymbol{\eta}(t)\equiv 0$, 并取均值,得

$$\boldsymbol{\psi}(t_1)(E\boldsymbol{x}(t_1))-\boldsymbol{\psi}(t_0)(E\boldsymbol{x}(t))=\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{\varphi}(\tau)\boldsymbol{n}(\tau)d\tau.$$

必要性. 仿照命题 1 的前半部分证明即可.

充分性. 仿照命题 1 的后半部分证明, 确定控制 $\boldsymbol{n}_0(t)=-G^{\tau}(t)W^{-1}(E\boldsymbol{x}(t_0))$. 这是当 $\boldsymbol{\eta}(t)\equiv 0$ 时以 $(E\boldsymbol{x}^{\tau}(t_0))W^{-1}$ 为初值的对偶系统 Σ_3^* 的输出. 对系统 Σ_3^* 的输出端串联一次积分器得一个线性系统 Σ_u. 显然,白噪声通过 Σ_u 给出的输出 $\boldsymbol{u}_0(t)$ 属于$U[t_0, t_1]$, 且把 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 引到 $\boldsymbol{x}(t_1)$ 使 $E\boldsymbol{x}(t_1)=0$. 证毕.

定义 2 随机系统 Σ_3 在 $[t_0, t_1]$ 上完全能观测, 是指当 $\boldsymbol{u}(t)$ 为白噪声时, 只要 $dE\boldsymbol{y}(t)\equiv 0$, 就有 $E\boldsymbol{x}(t_0)=0$.

命题 4 随机系统 Σ_3 在 $[t_0, t_1]$ 上完全能观测的充分必要条件为对偶系统 Σ_3^* 在 $[t_0, t_1]$上完全能控.

证 在对偶关系式(3)中,令 $E\boldsymbol{u}(t)\equiv 0$, 并取均值,得

$$\boldsymbol{\psi}(t_1)(E\boldsymbol{x}(t_1))-\boldsymbol{\psi}(t_0)(E\boldsymbol{x}(t_0))=-\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{\eta}(\tau)d(E\boldsymbol{y}(\tau)). \tag{14}$$

充分性. 设 Σ_3^* 完全能控. 和命题 1 的证明一样,有

$$E\boldsymbol{x}(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}H(\tau)dE\boldsymbol{y}(\tau),$$

因此只要 $dE\boldsymbol{y}(t)\equiv 0$, 就有 $E\boldsymbol{x}(t_0)=0$, 即 Σ_3 完全能观测.

必要性. 设 Σ_3^* 不完全能控. 记 $X_{\bar{k}}^-$ 为 Σ_3^* 的完全不能控子空间. 设 $\bar{\boldsymbol{x}}_0\neq 0, \bar{\boldsymbol{x}}_0\in X_{\bar{k}}^-$. 这时,由 $X_{\bar{k}}^-$ 的定义,对任意 $\boldsymbol{\eta}(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, 必有

$$\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{\eta}(\tau)C\Phi(\tau, t_1)d\tau\bar{\boldsymbol{x}}_0=0.$$

其中 $\Phi(\tau, t)$ 为 Σ_3^* 的状态转移阵. 由此必有

$$C\Phi(t, t_1)\bar{\boldsymbol{x}}_0\equiv 0,\quad t\in[t_0, t_1].$$

今取 Σ_3 的初值 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 满足

$$E\boldsymbol{x}(t_0)=\Phi(t_0, t_1)\bar{\boldsymbol{x}}_0. \tag{15}$$

则 $E\boldsymbol{x}(t_0)\neq 0$, 但是 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 所给出的 Σ_3 的输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 满足

$$d(E\boldsymbol{y}(t))=C\Phi(t, t_0)(E\boldsymbol{x}(t_0))=C\Phi(t, t_1)\bar{\boldsymbol{x}}_0\equiv 0.$$

这说明系统 Σ_3^* 不完全能观测.

证毕.

命题 5 设 Σ_3^* 在$[t_0, t_1]$上完全能控,则对任意 $\boldsymbol{u}(t)\in U[t_0, t_1]$,根据系统 Σ_3 的量测

$\boldsymbol{y}(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, 都可以给出状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 的线性无偏估计.

证 由 Σ_3^* 的完全能控性,存在 n 个控制

$$\boldsymbol{\eta}_i(t),\ t\in[t_0, t_1],\quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

它们分别把由(8)所给出的初值 $\boldsymbol{\psi}_i(t_0)$ 引到0状态. 设 $\boldsymbol{\varphi}_i(t)$, $(i=1, 2, \cdots, n)$ 为 $\boldsymbol{\eta}_i(t)$ 和 $\boldsymbol{\psi}_i(t_0)$ 给出的 Σ_3^* 的输出. 取 $H(t)$ 和 $G(t)$ 与命题1中的一样. 这时, 由对偶关系式(3)得

$$\boldsymbol{x}(t_0)=-\int_{t_0}^{t_1}(G(\tau)d\boldsymbol{u}(\tau)-H(\tau)d\boldsymbol{y}(\tau)).$$

显然,

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t_0)=-\int_{t_0}^{t_1}(G(\tau)\boldsymbol{n}(\tau)dt-H(\tau)d\boldsymbol{y}(\tau)) \tag{16}$$

是关于初值 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 的线性无偏估计. 证毕.

命题6 对任意给定的 $\boldsymbol{u}(t)\in U[t_0, t_1]$, 系统 Σ_3 根据量测 $\boldsymbol{y}(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, 给出关于初值 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 的形如(16)的线性无偏估计的充分必要条件为对偶系统 Σ_3^* 在 $[t_0, t_1]$ 上完全能控.

证 充分性是由命题5给出. 必要性. 如果系统 Σ_3^* 不完全能控, 则由命题4的证明,当 $E\boldsymbol{u}(t)\equiv0$ 时,对形如(15)的初值不能给出形如(16)的线性无偏估计. 证毕.

如果在系统 Σ_3 和 Σ_3^* 中把时间逆转过来,则由命题6直接得

命题7 对任意给定的 $\boldsymbol{u}(t)\in U[t_0, t_1]$,根据量测 $\boldsymbol{y}(t)$, $t\in[t_0, t_1]$,给出系统 Σ_3 的终值 $\boldsymbol{x}(t_1)$ 的缺初值(不用初值信息的)线性无偏估计的充分必要条件为对偶系统 Σ_3^* 在 $[t_2, t_1]$上完全能达.

如果初值 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 的统计特性已知, 则构造 $H(t)$ 和 $G(t)$ 时, 取 $\boldsymbol{\eta}_i(t)$ 为把一组非零 $\boldsymbol{\psi}_i(t_0)\neq0$ 分别引到单位坐标向量的控制, 并在(16)中加上包含 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 均值的项, 就得考虑到 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 信息的关于 $\boldsymbol{x}(t_1)$ 的线性无偏估计.

如果考虑最小方差估计, 就要适当选择 $\boldsymbol{\eta}_i(t)$. 利用对偶关系式(3), 很容易把选取 $\boldsymbol{\eta}_i(t)$ 的问题化为对偶系统 Σ_3^* 的二次指标最优控制问题(见[4, 11]).

注 定义1, 2实际上是相应确定性系统 Σ_3^0 的能控性, 能观测性定义。但是, 从这些定义也可以推出命题6、7的结论. 由此看出,能控性和能观测性是不依赖于输入类形的,是系统的结构属性。

4. 定常系统的调节器和观测器

命题8 设系统 Σ_4^* 为完全能控(完全能观测), 则系统 Σ_4^* 的调节器(状态观测器)通过对偶关系式(5)转化为系统 Σ_4 的状态观测器(调节器).

证 根据 Σ_4^* 的能控性,必存在线性反馈

$$\boldsymbol{\eta}=-\boldsymbol{\psi}K,$$

使闭环系统的系数阵 $(A-KC)$ 稳定. 把 $\boldsymbol{\eta}(t)=-\boldsymbol{\psi}(t)K$, $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\psi}(t)B+\boldsymbol{\eta}(t)D=\boldsymbol{\psi}(t)(B-KD)$代到(5)式得

$$\boldsymbol{\psi}_0\boldsymbol{x}(t)-\int_0^t\boldsymbol{\psi}(t-\tau)[(B-KD)\boldsymbol{u}(\tau)+K\boldsymbol{y}(\tau)]d\tau=\boldsymbol{\psi}(t)\boldsymbol{x}.$$

今取 $\boldsymbol{\psi}_0=\boldsymbol{\psi}_i(0)$为形如(8)的初值,则对应的解 $\boldsymbol{\psi}_i(t)$组成闭环系统的状态转移阵

$$\Phi(t)=e^{(A-KC)t}.$$

于是,由上式得

$$\boldsymbol{x}(t)-\int_0^t \Phi(t-\tau)[B\boldsymbol{u}(\tau)+K\boldsymbol{y}(\tau)-KD\boldsymbol{u}(\tau)]d\tau=\Phi(t)\boldsymbol{x}_0.$$

令

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t)=\int_0^t \Phi(t-\tau)[B\boldsymbol{u}(\tau)+K\boldsymbol{y}(\tau)-KD\boldsymbol{u}(\tau)]d\tau$$

则它满足方程

$$\begin{cases}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=A\hat{\boldsymbol{x}}+K(\boldsymbol{y}(t)-C\hat{\boldsymbol{x}})+B\boldsymbol{u}(t)-KD\boldsymbol{u}(t),\\ \hat{\boldsymbol{x}}(0)=0\end{cases}\tag{17}$$

由于 $\Phi(t)\to 0(t\to\infty)$, 所以

$$\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{x}_0\to 0.\ (t\to\infty).$$

即方程(17)是系统 Σ_4 的状态观测器. 证毕.

5. 降维观测器的对偶性质

对系统 Σ 实行坐标变换 T 的同时, 对 Σ^* 实行坐标变换 T^{-1}, 则在对偶关系式中把旧状态变量换成新变量,就得变换后系统的对偶关系式.

今设 Σ_4 完全能观测. 这时 Σ_4^* 完全能控. 又设阵 C 满秩. 经适当坐标变换系统 Σ_4 和 Σ_4^* 分别变为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1\\ \bar{\boldsymbol{x}}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{y}=\bar{\boldsymbol{x}}_2\end{cases}\qquad \begin{cases}[\dot{\bar{\boldsymbol{\psi}}}_1\ \ \dot{\bar{\boldsymbol{\psi}}}_2]=[\bar{\boldsymbol{\psi}}_1\ \ \bar{\boldsymbol{\psi}}_2]\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}+\boldsymbol{\eta}[0,\ I_p]\\ \boldsymbol{\varphi}=\bar{\boldsymbol{\psi}}_1B_1+\bar{\boldsymbol{\psi}}_2B_2.\end{cases}$$

再经坐标变换

$$[\bar{\boldsymbol{\psi}}_1\ \ \bar{\boldsymbol{\psi}}_2]=[\boldsymbol{\psi}_1\ \ \boldsymbol{\psi}_2]\begin{bmatrix}I_{n-p} & -K\\ 0 & I_p\end{bmatrix}$$

Σ_4^* 变为

$$\begin{cases}[\dot{\boldsymbol{\psi}}_1\ \ \dot{\boldsymbol{\psi}}_2]=[\boldsymbol{\psi}_1\ \ \boldsymbol{\psi}_2]\begin{bmatrix}A_{11}-K_1A_{21} & A_{11}K_1-K_1A_{21}K_1+A_{12}-K_1A_{22}\\ A_{21} & A_{22}+A_{21}K_1\end{bmatrix}+\boldsymbol{\eta}[0,\ I_p]\\ \boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\psi}_1(B_1-K_1B_2)+\boldsymbol{\psi}_2B_2\end{cases}.$$

由于 Σ_4 完全能观测,故在 Σ_4^* 中阵对 $(A_{11},\ A_{21})$ 是能控的阵对. 于是存在 K_1, 使 $(A_{11}-KA_{21})$ 为稳定阵. 现在把对偶关系式(5)写成

$$[\boldsymbol{\psi}_1(0)\ \ \boldsymbol{\psi}_2(0)]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}-[\boldsymbol{\psi}_1(t)\ \ \boldsymbol{\psi}_2(t)]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(0)\\ \boldsymbol{x}_2(0)\end{bmatrix}$$

$$=\int_0^t[\boldsymbol{\varphi}(t-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)-\boldsymbol{\eta}(t-\tau)\boldsymbol{y}(\tau)]d\tau.\tag{18}$$

今取 K_1 使 $(A_{11}-K_1A_{21})$ 稳定,然后取 Σ_4^* 的局部状态反馈

$$\boldsymbol{\eta}=-\boldsymbol{\psi}_1K=-\boldsymbol{\psi}_1(A_{11}K_1-K_1A_{21}K_1+A_{12}-K_1A_{22}).$$

则 Σ_4^* 的闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\psi}}_1=\boldsymbol{\psi}_1(A_{11}-K_1A_{21})+\boldsymbol{\psi}_2A_{21}\\ \dot{\boldsymbol{\psi}}_2=\boldsymbol{\psi}_2(A_{22}+A_{21}K_1)\\ \boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\psi}_1(B_1-K_1B_2)+\boldsymbol{\psi}_2B_2.\end{cases}$$

显然，这个系统的解，当 $\psi_2(0)=0$ 时 $\psi_2(t)\equiv 0$，而 $\psi_1(t)$ 是渐近稳定的．就是说，对系统 Σ_4^* 可用 $n-p$ 维状态反馈，使闭环在某一 $n-p$ 维子空间中条件稳定(见[7])．

下面，把 Σ_4^* 的上述性质代到对偶关系式(18)中去，即把

$$\psi_2(0)=0,\quad \eta(t)=-\psi_1(t)K,$$

代到(18)中，得

$$\psi_1(0)x_1(t)-\int_0^t(\psi_1(t-\tau)(B_1-K_1B_2)u(\tau)+\psi_1(t-\tau)Ky(\tau))d\tau=\psi_1(t)x_1(0). \tag{19}$$

再取 $\psi_1(0)$ 为 $n-p$ 个单位坐标向量，则对应的 $\psi_1(t)$ 组成方程 $\dot{\psi}_1=\psi_1(A_{11}-K_1A_{21})$ 的状态转移阵 $\Phi_1(t)$．于是由(19)式得

$$x_1(t)-\int_0^t\Phi_1(t-\tau)[(B_1-K_1B_2)u(\tau)+Ky(\tau)]d\tau=\Phi_1(t)x_1(0).$$

令

$$\hat{x}_1(t)=\int_0^t\Phi_1(\tau-t)[(B_1-K_1B_2)u(\tau)+Ky(\tau)]d\tau,$$

则它满足方程

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_1=(A_{11}-K_1A_{21})\hat{x}_1+(B_1-K_1B_2)u(t)+Ky(t)\\ \hat{x}_1(0)=0.\end{cases} \tag{20}$$

由于 $\Phi_1(t)\to 0(t\to\infty)$，故

$$x_1(t)-\hat{x}_1(t)\to 0\quad(t\to\infty)$$

即(20)是观测 Σ_4 的局部状态变量 $x_1(t)$ 的降维观测器．这说明，降维观测器的对偶性质是用局部变量的反馈实现某一子空间中镇定的性质．

6. 几点说明

(1) 文中提出的对偶关系式都不受维数的限制，因而可以推广到无穷维系统上；

(2) 对偶关系式(4)是频率域中的等式，可以推广到频率域中描述的更一般的系统上；

(3) 用输出量估计状态时，对偶关系式均给出明确的误差表达式．这点可用来讨论各种类型的最优估计和滤波问题(见[11])．

参 考 文 献

[1] Kalman R. E., On the general theory of control systems, *Proc. 1 th IFAC congress*, Moscow, Butterworths, London, (1960).

[2] Pearson J. D., On the duality between estimation and control, *SIAMJ. Control*, **4**:4(1966).

[3] Simon K. W., Stubberud A. R., Duality of linear estimation and control, *JOTA*, **6**:1, (1970).

[4] Åström K. J., Introduction to stochastic control theory, *Academic Press*, New York, (1970).

[5] Sakaran V., Srinath M. D., Duality of linear estimation and control with constraints, *JOTA*, **10**:1(1974)

[6] 韩京清，线性控制系统的对偶性质(内部资料)．

[7] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных Дифференциальных уравнений, М. И·Л, (1958)

[8] 陈翰馥，关于随机能控性，应用数学学报，**1** (1978)．

[9] 陈翰馥，连续时间系统的随机能观测性和缺初值估计，中国科学，(1978)．

[10] 市川邦彦，自动制御系の设计理论，产业图书，(1977)．

[11] 韩京清，对偶关系与不确定系统的状态估计，自动化学报，**5** (1979)．

[12] 许可康，含有不确定因素的一类降维状态估计．数学年刊第1卷，第1期，1980年．

DUALITY IN LINEAR CONTROL SYSTEMS

HAN KYENGCHENG
(*Institute of Systems Science, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The present paper establishes various duality relations–equalities which exist in linear control systems. By means of these relations, we demonstrate various duality properties in the theory of linear control systems. In particular we discuss the duality of controllability and observability of linear systems, the concepts of controllability and observability in stochastic systems, the duality of regulator and observer of time-invariant systems, and the duality property of reduced dimension observers etc.

The duality relation established here is used to solve the problem of min-max state estimation in systems with uncertainty.