数 学 年 刊
1 (1) 1980

含有不确定因素的一类降维状态估计

许 可 康
(中国科学院系统科学研究所)

文[1,2]讨论了线性系统的对偶原理和含有不确定因素的问题. 本文讨论当量测量为精确值时,可以利用对偶系统的降维调节器,来得到状态的降维估计器.

设线性系统状态方程为

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)W,\quad x\in\mathscr{R}^n, \tag{1}$$

其中, $W(t)t\geqslant t_0$ 为不确定因素. 而量测方程

$$y=H(t)x,\quad y\in\mathscr{R}^p \tag{2}$$

是不含不确定因素的精确值. 假设, $A(t)$、$B(t)$ 及 $H(t)$ 为 $t(t\geqslant t_0)$ 的足够次的可微函数, $H(t)$ 为满秩阵,则恒可以找到可微非异变换

$$T(t)=\begin{pmatrix} H_1(t)\\ H(t)\end{pmatrix} \tag{3}$$

其中, $H_1(t)$ 满足

(1) $H(t)H_1^\tau(t)=0$

(2) $H_1(t)H_1^\tau(t)=I_{n-p}$

这时 $$T^{-1}(t)=(H_1^\tau(t)\quad H^\tau(t)(H(t)H^\tau(t))^{-1}).$$

则在变换 $T(t)$ 下,系统变为

$$\Sigma:\ \begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}(t) & A_{12}(t)\\ A_{21}(t) & A_{22}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_1(t)\\ B_2(t)\end{pmatrix}W\\ y=(0\quad I_p)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=x_2.\end{cases} \tag{4}$$

假设,系统 Σ 完全能观测,则 (A_{11},A_{21}) 也组成完全能观测对.

考察 Σ 的对偶系统

$$\Sigma^*:\ \begin{cases}(\dot{\psi}_1\quad \dot{\psi}_2)=-(\psi_1\quad \psi_2)\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}-\eta(0\quad I_p)\\ \varphi=(\psi_1\quad \psi_2)\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}\end{cases} \tag{5}$$

Σ 和 Σ^* 之间,有对偶关系式[1]

$$\psi_1(t_1)x_1(t_1)+\psi_2(t_1)x_2(t_1)-\psi_1(t_0)x_1(t_0)-\psi_2(t_0)x_2(t_0)$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}[\varphi(t)W(t)-\eta(t)y(t)]dt. \tag{6}$$

本文1978年6月7日收到.

因为 $x_2(t)$ 是精确的量测值，所以，我们可以选择 $\eta(t)$ 及 $\psi_2(t)$，来使

$$-\psi_2(t_1)x_2(t_1)+\psi_2(t_0)x_2(t_0)-\int_{t_0}^{t_1}\eta(t)y(t)dt \tag{7}$$

作为

$$\psi_1(t_1)x_1(t_1)$$

的估计量．而

$$\psi_1(t_0)x_1(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\varphi(t)W(t)dt \tag{8}$$

即为估计误差．这里，我们假定 $x_1(t_0)$ 也是个不确定因素（否则，可以把 $\psi_1(t_0)x_1(t_0)$ 这一项放入(7)内）．

在此，我们进一步假定，已知不确定因素的范围为

$$x_1^\tau(t_0)S^{-1}x_1(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}W^\tau(t)Q^{-1}(t)W(t)dt\leqslant a^2(t_1). \tag{9}$$

其中，假定 S 及 $Q(t)$ 为正定对称阵．

这样，降维估计问题可提为：在约束(9)下，寻找控制函数 $\eta(t)$，使估计误差(8)为极小．即可表达成如下形式

$$\min_{\eta(t)}\left\{\max_{\substack{x_1(t_0),W(t)\\ \text{满足(9)}}}\left[\psi_1(t_0)x_1(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\varphi(t)W(t)dt\right]\right\}. \tag{10}$$

现在，先求在约束(9)之下的，(8)的条件极(大)值．由[2]可得

$$\max_{x_1(t_0),W(t)}\left[\psi_1(t_0)x_1(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\varphi(t)W(t)dt\right]$$

$$=a(t_1)\cdot\left[\psi_1(t_0)S\psi_1^\tau(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\varphi(t)Q(t)\varphi^\tau(t)dt\right]^{1/2}. \tag{11}$$

由于，$a(t_1)$ 为常值因子，所以，(10)即等价为使

$$J=\psi_1(t_0)S\psi_1^\tau(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\varphi(t)Q(t)\varphi^\tau(t)dt \tag{12}$$

极小．这时，由(5)

$$\varphi=\psi_1B_1+\psi_2B_2,$$

ψ_1, ψ_2 由方程

$$(\dot\psi_1\quad\dot\psi_2)=-(\psi_1\quad\psi_2)\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}-\eta(0\quad I_p)$$

联系．这样，问题就化为、对分系统

$$\dot\psi_1=-\psi_1A_{11}-\psi_2A_{21} \tag{13}$$

的，指标为

$$J=\psi_1(t_0)S\psi_1^\tau(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}(\psi_1\quad\psi_2)\begin{pmatrix}B_1QB_1^\tau&B_1QB_2^\tau\\B_2QB_1^\tau&B_2QB_2^\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1^\tau\\\psi_2^\tau\end{pmatrix}dt \tag{14}$$

的极值控制问题．这里，把 ψ_2 作为独立于 ψ_1 的控制，而所需的反馈，由(5)通过寻找控制函数 $\eta(t)$ 来实现．对此，假定 $B_2QB_2^\tau$ 非奇异，则有如下熟知的结果[3,4]

$$\psi_2^*=-\psi_1(PA_{21}^\tau+B_1QB_2^\tau)(B_2QB_2^\tau)^{-1}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\dot P=A_{11}P+PA_{11}^\tau+B_1QB_1^\tau-(PA_{21}^\tau+B_1QB_2^\tau)(B_2QB_2^\tau)^{-1}(PA_{21}^\tau+B_1QB_2^\tau)^\tau\\&P(t_0)=S.\end{aligned} \tag{16}$$

这样，性能指标(14)达到极小值

$$J(\psi_2^*)=\psi_1(t_1)P(t_1)\psi_1^\tau(t_1)$$

现在,我们就对系统(5),寻找控制 $\eta(t)$,使关系式(15)得到满足.

为此,可作变换

$$(\psi_1\quad \psi_2)=(\overline{\psi}_1\quad \overline{\psi}_2)\begin{pmatrix} I_{n-p} & -K \\ 0 & I_p \end{pmatrix}. \tag{17}$$

其中

$$K=(PA_{21}^\tau+B_1QB_2^\tau)(B_2QB_2^\tau)^{-1}. \tag{18}$$

则(5)为
$$(\dot{\overline{\psi}}_1\quad \dot{\overline{\psi}}_2)=-(\overline{\psi}_1\quad \overline{\psi}_2)\begin{pmatrix} A_{11}-KA_{21} & G \\ A_{21} & A_{21}K+A_{22} \end{pmatrix}+\eta(0\quad I_p),$$

其中

$$G=(A_{11}-KA_{21})K+(A_{12}-KA_{22}). \tag{19}$$

选择控制函数
$$\eta(t)=-\overline{\psi}_1(t)G(t) \tag{20}$$

及

$$\overline{\psi}_2(t_0)=0. \tag{21}$$

这时,闭环系统有解

$$\overline{\psi}_2(t)=0,$$

从而
$$\psi_2=-\psi_1K,$$

$$\dot{\psi}_1=-\psi_1(A_{11}-KA_{21}). \tag{22}$$

这样,关系式(15)得到满足. 因而,在条件(21)及由关系式(20)确定的 $\eta(t)$,使要求(10)满足,即由(7)式估计 $\psi_1(t_1)x_1(t_1)$ 的估计误差达到极小. 而估计式可表示成

$$\psi_1(t_1)\hat{x}_1(t_1)=-\psi_2(t_1)x_2(t_1)+\psi_2(t_0)x_2(t_0)-\int_{t_0}^{t_1}y(t)y(t)dt.$$

将(17)、(20)代入上式,得

$$\psi_1(t_1)\hat{x}_1(t_1)=\psi_1(t_1)K(t_1)y(t_1)-\psi_1(t_0)K(t_0)y(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\psi_1(t)G_{(t)}y(t)dt.$$

设 $\Phi(t,\tau)$ 为 $(A_{11}-KA_{21})$ 的状态转移阵,则(22)的解可表示成

$$\psi_1(t)=\psi_1(t_1)\Phi(t_1,t)$$

因而,估计式可表示为

$$\psi_1(t_1)[\hat{x}_1(t_1)-K(t_1)y(t_1)]=-\psi_1(t_1)\Phi(t_1,t_0)K(t_0)y(t_0)+\psi_1(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,t)G(t)y(t)dt.$$

由 $\psi_1(t_1)$ 的任意性,上式为

$$\hat{x}_1(t_1)-K(t_1)y(t_1)=-\Phi(t_1,t_0)K(t_0)y(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,t)G(t)y(t)dt.$$

它正是当 $\hat{x}_1(t_0)=0$ 时,下列方程

$$\frac{d}{dt}[\hat{x}_1-Ky]=(A_{11}-KA_{21})[\hat{x}_1-Ky]+Gy \tag{23}$$

在 t_1 时刻的解. 引入

$$\xi(t)=\hat{x}_1(t)-K(t)y(t), \tag{24}$$

(23)式就化为

$$\dot{\xi}(t)=(A_{11}(t)-K(t)A_{21}(t))\xi(t)+G(t)y(t). \tag{25}$$

于是,(25)与(18)、(19)、(24)一起,构成了原系统(4)的估计器. 其中,$P(t)$ 由(16)给出. 这里,矩阵 Riccati 方程的阶数为 $(n-p)$,因而该估计器是一个降维估计器.

对于定常系统的稳态情形,可考察对偶系统

$$\Sigma^{*\prime}:\begin{cases}(\dot{\psi}_1 \quad \dot{\psi}_2)=(\psi_1 \quad \psi_2)\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}+\eta(0 \quad I)\\ \varphi=(\psi_1 \quad \psi_2)\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}.\end{cases} \tag{5'}$$

相应的对偶关系式为[1]

$$\psi_1(t_0)x_1(t_1)+\psi_2(t_0)x_2(t_1)-\psi_1(t_1)x_1(t_0)-\psi_2(t_1)x_2(t_0)$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}[\varphi(t_1-\tau+t_0)W(\tau)-\eta(t_1-\tau+t_0)y(\tau)]d\tau. \tag{6'}$$

K, G 有相同的形式,只是 P 满足矩阵 Riccati 代数方程

$$A_{11}P+PA_{11}^{\tau}+B_1QB_1^{\tau}-(PA_{21}^{\tau}+B_1QB_2^{\tau})(B_2QB_2^{\tau})^{-1}(PA_{21}^{\tau}+B_1QB_2^{\tau})^{\tau}=0, \tag{16'}$$

而

$$\dot{\xi}(t)=(A_{11}-KA_{21})\xi(t)+Gy(t). \tag{25'}$$

这样,(25′)与(18),(19),(24)一起,构成定常系统稳态情形的降维估计器. 其中, P 为满足(16′)的正定对称解.

以上的讨论,我们假定了 $(B_2QB_2^{\tau})$ 的非奇异性. 若 $\mathrm{rank}\,(B_2QB_2^{\tau})=r<P$, 则可以把 x_2 (即 y) 再分块,经适当变换后,(4)可化为

$$\dot{x}_1=A_{11}x_1+\overline{A}_{12}y+B_1W,$$
$$\dot{x}_2^1=A_{21}^1x_1+A_{22}^1y,$$
$$\dot{x}_2^2=A_{21}^2x_1+A_{22}^2y+B_2^2W,$$
$$y=(C_2^1 \quad C_2^2)\begin{pmatrix}x_2^1\\ x_2^2\end{pmatrix}.$$

其中 $x_2^1\in\mathscr{R}^{p-r}$ $x_2^2\in\mathscr{R}^r$, $B_2^2QB_2^{2\tau}$ 满秩, $(C_2^1\ C_2^2)$ 非奇异. 所以

$$\begin{pmatrix}x_2^1\\ x_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix}y.$$

引入
$$z\triangleq\dot{d}_1y+d_1\dot{y}-A_{22}^1y,$$
则可得新系统
$$\dot{x}_1=A_{11}x_1+\overline{A}_{12}y+B_1W,$$
$$z=A_{21}^1x_1.$$

这里,状态 x_1 为 $(n-p)$ 维,量测为 $(p-r)$ 维的精确值. 问题又回到本文所讨论的(1)(2)的形式,若 A_{21}^1 满秩,则新系统可变为

$$\dot{x}_1^1=A^{11}x_1^1+A^{12}x_1^2+A_{12}^1y+B_1^1W,$$
$$\dot{x}_1^2=A^{21}x_1^1+A^{22}x_1^2+A_{12}^2y+B_1^2W,$$
$$z=x_1^2.$$

若 $(B_1^2QB_1^{2\tau})$ 非奇异,则可得到 x_1^1 的降维估计器

$$\frac{d}{dt}(x_1^1-K^1z)=(A^{11}-K^1A^{21})(x_1^1-K^1z)+G^1z+(A_{12}^1-K^1A_{12}^2)y,$$

其中

$$K^1=(P^1A^{21\tau}+B_1^1QB_1^{2\tau})(B_1^2QB_1^{2\tau})^{-1},$$
$$\dot{P}^1=A^{11}P^1+P^1A^{11\tau}+B_1^1QB_1^{1\tau}-(P^1A^{21\tau}+B_1^1QB_1^{2\tau})(B_1^2QB_1^{2\tau})^{-1}(P^1A^{21\tau}+B_1^1QB_1^{2\tau})^{\tau},$$
$$P^1(t_0)=S^1,$$

$$G^1=(A^{11}-K^1A^{21})K^1+(A^{12}-K^1A^{22}).$$

这时，P^1 的阶数为 $[(n-p)-(p-r)]$ 维. 否则再照此一直作下去.

到此，我们讨论了状态初值 $x_1(t_0)$ 及 $W(t)$ 作为不确定因素（满足约束 (9)）的情形. 若 $x_1(t_0)$ 及 $W(t)$ 均是零均值、协方差阵分别为 S 及 $Q(t)$ 的 Gauss 随机变量与随机过程，则上述结果作为原系统 Σ 的降维滤波器，同样成立.

与[6]之 III 的结果比较，本文结果就很简单与直观.

参 考 文 献

[1] 韩京清，线性控制系统的对偶性，数学年刊 **1**:1 (1980).

[2] 韩京清，对偶关系与不确定系统的状态估计，自动化学报 **5** (1979).

[3] 何关钰，线性控制系统（内部资料）

[4] Ю. Н. Андреев, управление конечномерными линейными обьектами. Изд. "Наука", Москва, (1976).

[5] H. W. Sorenson, A. R. Stubberud, Linear estimation theory, AD-704, 306 Chapter 1.

[6] А. Б. Куржанский, И. Я. Пищулина, Минимаксная фильтрация при квадратичных ограничениях I, II, III., Дифференц. Уравнения, **12**:8, 9, 12 (1976).