数学年刊
1 (1) 1980

M 矩阵的一些性质

张家驹
(中国科学院原子核研究所)

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶实矩阵，若 $a_{ij}\geqslant 0(a_{ij}>0)$，$i, j=1, 2, \cdots, n$. 则称 A 为非负(正)矩阵. 类似地，一个向量，若其分量皆为正(非负)，则叫做正(非负)向量. 若 $a_{ii}>0$，$a_{ij}\leqslant 0$, $i\neq j$, $i, j=1, 2, \cdots, n$, 则 A 叫做 L 矩阵，记为 $A\in\mathscr{L}$. 我们知道，若 $A\in\mathscr{L}$，则下述诸条件是等价的[1,5]:

(1) A 的所有特征值的实部皆为正.

(2) A 的所有主子式皆为正.

(3) A 的所有顺序主子式皆为正.

(4) A^{-1} 存在且为非负矩阵.

(5) 有正向量 x, 使 Ax 为正向量.

(6) 有对角线元素全为正的对角形矩阵(叫做正对角形矩阵) D, 使 ADe 为正向量，其中 $e=(1, \cdots, 1)^t$。

(7) 对实向量 x, 若 Ax 非负，则 x 非负.

(8) 若 $D=\operatorname{diag} A$, $C=D-A$, $B=D^{-1}C$, 则 $\rho(B)<1$, 其中 $\rho(B)$ 为 B 的特征值的模的最大值.

(9) $B=\lambda I-A$ 为非负矩阵，其中 I 为单位矩阵，$\lambda>\rho(B)$.

(10) 若 $B=(b_{ij})_{n\times n}\in\mathscr{L}$ 且 $b_{ij}\geqslant a_{ij}$, $i, j=1, 2, \cdots, n$, 则 B^{-1} 存在.

(11) 有下三角形矩阵 $T\in\mathscr{L}$ 和上三角形矩阵 $U\in\mathscr{L}$, 使 $A=T\cdot U$.

若 $A\in\mathscr{L}$，且 A 满足上述任一条件，则 A 叫做 M 矩阵，记为 $A\in\mathscr{M}$. 显然，若$A\in\mathscr{M}$，则 $A^t\in\mathscr{M}$.

关于 M 矩阵的性质，已有许多研究[1,2,3]. 特别，我们知道，M 矩阵按模最小的特征值是一个正数[3]. 我们从对 L 矩阵和非负矩阵特征值的分析，得到更进一步的结果.

引理 1 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathscr{L}$, 则 A 的实部最小的特征值 σ 是一个实数，相应的特征向量可取非负向量. 若令 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}=\sigma_j$, $j=1, \cdots, n$, 则当 A 为既约矩阵时，或者 $\sigma_j=\sigma$, $j=1, 2, \cdots, n$, 或者 $\min\limits_j \sigma_j<\sigma<\max\limits_j \sigma_j$, 且相应的特征向量可取正向量.

证 设 $\beta>\max\limits_i a_{ii}$, 则 $B=(b_{ij})_{n\times n}=\beta I-A$ 为非负矩阵. 由 Perron-Frobenius 定理[4]，B 有按模最大的非负特征值 α 和相应的非负特征向量 x: $Bx=\alpha x$. 显然，$Ax=(\beta-\alpha)x$, 即 x 为 A 的特征向量，$\beta-\alpha$ 为相应的特征值. 又若 λ 为 A 的任一特征值，则

本文 1978 年 6 月 8 日收到，1979 年 2 月16日修改.

$\beta-\lambda$ 为 B 的特征值，故 $|\beta-\lambda|\leqslant\alpha$. 所以 $\mathrm{Re}(\beta-\lambda)\leqslant\alpha$, 即 $\mathrm{Re}\lambda\geqslant\beta-\alpha$. 这就说明 $\beta-\alpha$ 是 A 的实部最小的特征值. 当 A 为既约矩阵时，B 也是既约矩阵，α 就是正向量. 此时或者 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ij}=\alpha>0$, $j=1, 2, \cdots, n$, 或者 $\min\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ij}<\alpha<\max\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ij}$. 显然 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ij}=\beta-\sigma_j$, $j=1, 2, \cdots, n$, 故在第一种情况有 $\beta-\sigma=\beta-\sigma_j$, 即 $\sigma=\sigma_j$, $j=1, 2, \cdots, n$. 在第二种情况有 $\min\limits_{j}(\beta-\sigma_j)<\beta-\sigma<\max\limits_{j}(\beta-\sigma_j)$, 但 $\min\limits_{j}(\beta-\sigma_j)=\beta-\max\limits_{j}\sigma_j$, $\max\limits_{j}(\beta-\sigma_j)=\beta-\min\limits_{j}\sigma_j$, 所以 $\min\limits_{j}\sigma_j<\sigma<\max\limits_{j}\sigma_j$. 引理证毕.

由引理1、及(1)我们有

定理1 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathscr{M}$, 则 A 的实部最小的特征值 σ 是一个正数，所以它也是按模最小的特征值，相应的特征向量是非负向量. 在 A 又为既约矩阵时，或者 $\sigma=\sigma_j$, $j=1, 2, \cdots, n$, 或者 $\min\limits_{j}\sigma_j<\sigma<\max\limits_{j}\sigma_j$, 相应的特征向量是正向量. 其中 σ_j 的意义和引理1中的相同.

利用对角占优矩阵的特征值分布理论[3,6]，又有

定理2 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathscr{L}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}=\sigma_j$, $j=1, 2, \cdots, n$, $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=\rho_i$, $i=1, \cdots, n$. 则当 A 满足下列条件之一时，$A\in\mathscr{M}$.

(1) $\sigma_j>0$, $j=1, 2, \cdots, n$.

(2) $\rho_i>0$, $i=1, 2, \cdots, n$.

(3) $\sigma_j+\rho_j>0$, $j=1, 2, \cdots, n$.

(4) A 为既约矩阵且 $\sigma_j\geqslant0$, $j=1, 2, \cdots, n$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_j>0$.

(5) A 为既约矩阵且 $\rho_i\geqslant0$, $i=1, 2, \cdots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\rho_i>0$.

(6) $A+A^t$ 为既约矩阵且 $\sigma_j+\rho_j\geqslant0$, $j=1, \cdots, n$, $\sum\limits_{j=1}^{n}(\sigma_j+\rho_j)>0$.

又若 $\sigma_j=\sigma>0$, $j=1, \cdots, n$ 或 $\rho_i=\sigma>0$, $i=1, \cdots, n$, 则 σ 为 A 的实部最小的特征值.

证 当 (a) 或 (b) 满足时，A 是严格对角占优矩阵. 当 (d) 或 (e) 满足时，A 是既约对角占优矩阵. 当 (c) 满足时，A 是严格共轭对角占优矩阵. 当 (f) 满足时，A 是既约共轭对角占优矩阵. 由[3, 6]知这些矩阵的特征值实部皆为正，故由(1)知 $A\in\mathscr{M}$. 又当 $\rho_j=\sigma$, 或 $\sigma_j=\sigma$, $j=1, \cdots, n$ 时，将有 $Ae=\sigma e$ 或 $A^te=\sigma e$, 其中 $e=(1, \cdots, 1)^t$, 故 σ 为 A 的特征值. 又若 $B=(b_{ij})_{n\times n}=A^{-1}$, 则由 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\delta_{i,j}$, $i, j=1, 2, \cdots, n$ 得

$$\sum_{j=1}^{n}b_{kj}=1/\sigma,\ k=1, \cdots, n \quad 或 \quad \sum_{k=1}^{n}b_{kj}=1/\sigma,\ j=1, \cdots, n.$$

显然 $1/\sigma$ 是非异非负矩阵 B 的按模最大的特征值. 故 σ 是 A 的按模最小的特征值. 由定理1知，它是实部最小的特征值. 证毕*.

* 当(a),(b)都满足时，(c)自然满足. 但(c)满足时，(a)和(b)可能都不满足，例如

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 4 & -3.5\\ -2.5 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

为讨论 M 矩阵的另外的性质，先引入下述定义.

定义 1　若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为非负矩阵，且 $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=\sigma$，或 $\sum_{i=1}^{n}a_{ji}=\sigma$, $j=1, 2, \cdots, n$, $\sigma>0$ 与 j 无关，则 A 叫做广义随机矩阵.

定义 2　若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为实矩阵，且 $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=\sigma$，或 $\sum_{i=1}^{n}a_{ji}=\sigma$, $j=1, 2, \cdots, n$, $\sigma>0$ 与 j 无关，则 A 叫做拟广义随机矩阵，记为 $A(\sigma)$.

定义 3　二个实矩阵 A, B 叫做正对角相似的，若有正对角形矩阵 S 使 $S^{-1}AS=B$.

由(4)知，一般 M 矩阵的逆矩阵是非负矩阵. 对既约 M 矩阵有更进一步的结果，即

定理 3　既约 M 矩阵 A 的逆矩阵是正矩阵.

为证明此定理，我们需要下述的引理.

引理 2　若 B 为 n 阶非负既约矩阵，则对任一组正数 β_0, β_1, β_2, $\cdots$, β_{n-1}, $\beta_0I+\beta_1B+\beta_2B^2+\cdots+\beta_{n-1}B^{n-1}$ 为正矩阵.

证　我们知道(见[2]，引理 2.1)，在引理所设的条件下，

$$(I+B)^{n-1}=I+b_1B+b_2B^2+\cdots+b_{n-1}B^{n-1}$$

为正矩阵，其中 $b_i>0$, $i=1, 2, \cdots, n-1$. 而 $B^k(k\geqslant0)$ 的所有元素皆非负，故

$$\beta_0I+\beta_1B+\beta_2B^2+\cdots+\beta_{n-1}B^{n-1}$$

的所有元素必皆为正. 引理得证.

定理 3 的证明. 令 $B=\lambda I-A$, $\lambda>\rho(B)$, 由 (9), B 为非负矩阵，且因 A 是既约矩阵，故 B 也是既约矩阵. 且有

$$A^{-1}=(\lambda I-B)^{-1}=\frac{1}{\lambda}I+\frac{1}{\lambda^2}B+\frac{1}{\lambda^3}B^2+\cdots+\frac{1}{\lambda^n}B^{n-1}+\cdots$$

因 $\lambda>\rho(B)$, 故上式右端是收敛的[2]，由引理 2 知，上式右端是正矩阵，即 A^{-1} 为正矩阵. 证毕.

引理 3　若 $A(\sigma)$ 为拟广义随机矩阵，则 σ 是 A 的特征值，又若 $A(\sigma)\in\mathscr{L}$, 则 σ 是 A 的实部最小的特征值.

证　由定义 2 显然有 $Ae=\sigma e$ (或 $A^te=\sigma e$), $e=(1, \cdots, 1)^t$, 故 σ 为 A 的特征值. 又若 $A\in\mathscr{L}$, 仿引理 1 证明中的方法，易证 σ 是 A 的实部最小的特征值.

定理 4　设 A 为既约矩阵，则下述结论成立:

(1) 若 $A\in\mathscr{M}$, 则 A 与某拟广义随机矩阵 $\widetilde{A}(\sigma)$ 正对角相似，其中 σ 是 A 的实部最小的、单重的特征值.

(2) 若 $A\in\mathscr{L}$ 且与某拟广义随机矩阵 $\widetilde{A}(\sigma)$ 正对角相似，则 $\sigma>0$ 为 A 的实部最小的、单重的特征值，从而 $A\in\mathscr{M}$.

证　(1) 令 $A^{-1}=B$, 由定理 3 知 B 为正矩阵，故 B 与某广义随机矩阵 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 正对角相似[4]: $B=R^{-1}CR$, 其中 R 为正对角形矩阵. 由 $AB=I$ 得 $RAR^{-1}C=I$. 令

$$RAR^{-1}=\widetilde{A}\equiv(g_{ij})_{n\times n},$$

显然 $\widetilde{A}$ 与 A 正对角相似，且 $\widetilde{A}\in\mathscr{L}$. 由于 C 为广义随机矩阵，故

$$\sum_{i=1}^{n}c_{ij}=\frac{1}{\sigma}>0\quad\left(或\quad\sum_{i=1}^{n}c_{ji}=\frac{1}{\sigma}>0\right),\ j=1, 2, \cdots, n,$$

其中 $1/\sigma$ 是 B (或 C) 的模最大的、单重的特征值. 由 $C\widetilde{A}=I$ 得

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ij}=\sigma>0 \quad (\text{或} \quad \sum_{i=1}^{n} g_{ji}=\sigma>0)\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

即 $\widetilde{A}$ 为拟广义随机矩阵, 且 σ 为 $\widetilde{A}$ 的(从而也为 A 的)实部最小的、单重的特征值.

(2) 在所设条件下, 显然有 $\widetilde{A}\in\mathscr{L}$, 故由引理3知 $\sigma>0$ 为 $\widetilde{A}$ 的实部最小的特征值, 所以 $A\in\mathscr{M}$. 由定理3, A^{-1} 为正矩阵, 其模最大的特征值显然为 $1/\sigma$, 且为单重的. 故 σ 是 A 的单重特征值.

注 (i) 由上面的讨论易知,在定理4的条件下,除 σ 外, A 的所有的特征值之模均大于 σ.

(ii) 虽然一般说来非异广义随机矩阵的逆矩阵不一定是广义随机矩阵(因为它不一定是非负矩阵), 但非异拟广义随机矩阵的逆矩阵却必定是拟广义随机矩阵.

下述定理表示 M 矩阵在正对角变换下的不变性.

定理5 设 A 为 M 矩阵, 则对任意的正对角形矩阵 R 和 S, RAS 也是 M 矩阵. 反之, 若 A 为实矩阵, R 和 S 为正对角形矩阵, 且 RAS 是 M 矩阵, 则 A 为 M 矩阵.

证 令 $B=RAS$. 显然 B 的所有元素及主子式与 A 的相应元素及主子式符号全相同, 故由(2)或(3)知 $A\in\mathscr{M}$ 与 $B\in\mathscr{M}$ 是等价的. 证毕.

参 考 文 献

[1] George Poole, Thomas Boullion, A survey on M-Matrices, *SIAM Review*, **16**:4 (1974)
[2] Richard S. Varga, Matrix iterative Analysis, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, (1962).
[3] 佟文廷,关于几类矩阵的特征值分布,数学学报, **20**:4 (1977), 272—275.
[4] Ф. Р. Гантмахер 著,柯召译,矩阵论,高等教育出版社, (1955).
[5] David M. Young, Iterative Solution of Large Linear Systems, *Academic Press*, New York and London (1971).
[6] 张家驹,共轭对角占优矩阵的特征值分布,(未发表).

SOME PROPERTIES OF THE *M*-MATRICES

ZHANG JIAJU
(*Institute of Nuclear research, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, the bounds of the least eigenvalue of M-matrices are given, the relations of M-matrices with quasi-stochastic matrices are established, and the invariance of M-matrices with respect to positive diagonal transformations is proved.