数 学 年 刊
1 (1) 1980

$(E_p 1<P\leqslant+\infty)$中具有给定极点的有理函数最佳逼近问题

沈燮昌
(北京大学)

§1. 引 言

在 $E_p(1<p\leqslant+\infty)$ 中考虑多项式的最佳逼近问题，目前已有不少的工作，例如，可以参看 С. Я. Альпер[1,2], В. М. кокилашвили[3-6]. 多项式是具有唯一极点在无穷远处的有理函数，因此自然地会提出研究具有给定极点在某个点集上的有理函数的最佳逼近问题[7,8]. 作者与类元仁曾在连续函数空间，H_p 及 E_p 空间中研究过这类问题[9-12].

设单连通区域 G 的边界 Γ 是光滑的 Jordan 曲线，Γ 的切线与正实轴的夹角 $\theta(s)$ 看作弧长 S 的函数，其连续模记作 $j(h)$. 对于 Γ 还可以加一些限制，如

$$\int_0 \frac{j(h)}{h} dh<+\infty, \tag{1.1}$$

或

$$\int_0 \frac{j(h)}{h} |\ln h|^\lambda dh<+\infty,\ 0\leqslant\lambda\leqslant1. \tag{1.2}$$

(当 $\lambda=0$ 时，这一条件应换成 $\int_0 \frac{j(h)}{h}|\ln|\ln h||dh<+\infty$; 满足条件 (1.2) 的区域称 j_λ 区域[10], 它是 С. Я. Альпер 所引入的区域 j 的推广[1].

设复数点的三角阵列 $\{\lambda_{n,i}\}$ $(1\leqslant i\leqslant n,\ n=1, 2, \cdots)$ 中各点位于闭区域 $\overline{G}$ 的余集 G_∞ 内，且满足

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)=+\infty,\quad \lambda'_{n,i}=\varphi(\lambda_{n,i}), \tag{1.3}$$

其中 $w=\varphi(z)$ 是将 G_∞ 保角映射到 $|w|>|$, 且满足 $\varphi(\infty)=\infty$, $\varphi'(\infty)>0$ 的函数，而用 $Z=\psi(w)$ 表示其反函数. 已知[2, 13]在条件(1.1)下，存在二个常数 m 及 M, 使得

$$0<m\leqslant|\psi'(w)|\leqslant M<+\infty,\quad |w|\geqslant1, \tag{1.4}$$

这一点在以后将用到.

对于任何由可求长 Jordan 曲线 Γ 所围成的区域 G, 可以引进函数类 $E_p(G)$[13,12]: 设 $f(z)\in E_p(G)$, $(1<p<+\infty)$ 这表示 $f(z)$ 在 G 内解析，且存在一串收敛于 Γ 的可求长 Jordan 曲线 Γ_n, 使得

$$\int_{\Gamma_n}|f(z)|^p|dz|\leqslant N<+\infty. \tag{1.5}$$

本文 1978 年 7 月 7 日收到，1979 年 5 月 19 日修改.

由[13]知，对于 $E_p(G)$ 中任何一个函数 $f(z)$，在 Γ 上几乎处处具有角度边界值 $f(\tilde{z})$，$\tilde{z}\in\Gamma$，且 $f(\tilde{z})$ 在 Γ 上为 L_p 可积，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_n}|f(z)|^p|dz|=\int_\Gamma|f(z)|^p|dz|. \tag{1.6}$$

对于 $1\leqslant p<+\infty$，还可以引入范数：

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)}=\left\{\int_\Gamma|f(z)|^p|dz|\right\}^{1/p} \tag{1.7}$$

以及积分连续模：

$$w_p(f,\delta)=\sup_{|h|\leqslant\delta}\left\{\int_0^{2\pi}|f[\psi(e^{i(\theta+h)})]-f[\psi(e^{i\theta})]|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{1.8}$$

当 $p=+\infty$ 时，我们说 $f(z)\in E_\infty(G)$，就表示 $f(z)$ 在 G 内解析，在 $\overline{G}$ 上连续（这里为了叙述简单起见，就按此定义），且其范数为

$$\|f\|_{C(\Gamma)}=\max_{z\in\Gamma}|f(z)|=\max_{z\in\overline{G}}|f(z)|, \tag{1.9}$$

其连续模为

$$w(f,\delta)=\sup_{\substack{|h|\leqslant\delta\\ z\in\overline{G},z+h\in\overline{G}}}|f(z+h)-f(z)|. \tag{1.10}$$

在文章[12]中，曾经对满足条件(1.1)的区域 G，研究了在 $E_p(1<p<+\infty)$ 中用具有极点在 $\{\lambda_{n,i}\}$ 的有理函数最佳逼近的阶的估计．但是，在此文中，对于在 $\overline{G}$ 上具有高阶微商的函数 $f(z)$，为了得到较高的逼近阶，需要对极点的分布作出如下的约束

$$\rho=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\ln n}{\sum\limits_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)}<\frac{1}{2},\ \lambda'_{n,i}=\varphi(\lambda_{n,i}), \tag{1.11}$$

其中 $\varphi(z)$ 是映射函数．本文，我们将证明，这个条件是完全可以取消的．

此外，在 E_∞ 中，对于极点的分布作出如下的约束条件下：

$$\rho_1=(1-\lambda)\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\ln n}{\sum\limits_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)}<1, \tag{1.12}$$

证明了文章[14]中，有理函数最佳逼近阶的估计式．而在文章[10]中，也需要加上条件(1.11)才得到结果．

§2. $E_p(1<p\leqslant+\infty)$ 中有理函数最佳逼近

定理 1　设 G 是满足条件(1.1)的区域．复数三角阵列 $\{\lambda_{n,i}\}(1\leqslant i\leqslant n,\ n=1,2,\cdots)$ 中各点是位于 $\overline{G}$ 的余集 G_∞ 内部，它们可以取值 ∞．设函数 $f(z)$ 在 G 内解析，且 $f^{(k)}(z)\in E_p(G)$，$(1<p<+\infty)$，则对任何自然数 n，存在形如

$$R_n(z)=\frac{\sum\limits_{j=0}^n b_j z^j}{\prod\limits_{j=1}^n(z-\lambda_{n,j})}{}^* \tag{2.1}$$

的有理函数，使得

* 当有一个 $\lambda_{n,i}$ 为 ∞ 时，则乘积中对应的因子就不出现．

$$\|f(z)-R_n(z)\|_{L_p(\Gamma)}\leqslant C_1\{\varepsilon_n^k w_p(f^{(k)},\ \varepsilon_n)+q_1^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\},\tag{2.2}$$

其中 C_1 是不依赖于 n 的常数，q_1 是绝对常数，$0<q_1<1$,

$$\varepsilon_n=\left[\sum_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)\right]^{-1},\quad \lambda'_{n,i}=\varphi(\lambda_{n,i}),\tag{2.3}$$

而 $w=\varphi(z)$ 是上述映射函数.

证明　根据 С. Я. Альпер 的结果[2]，在定理的条件下，对任何自然数 N，存在 N 次多项式 $Q_N(z)$，使得

$$\|f(z)-Q_N(z)\|_{L_p(\Gamma)}\leqslant\frac{C_2}{N^k}w_p\left(f^{(k)},\frac{1}{N}\right),\tag{2.4}$$

其中 C_2 为不依赖于 N 的常数*.

由此容易得到

$$\|Q(z)\|_{L_p(\Gamma)}\leqslant(\|f\|_{L_p(\Gamma)}+C_3).\tag{2.5}$$

由(2.5)及(1.4)立刻推出

$$\|Q[\psi(w)]\|_{L_p(|w|=1)}\leqslant C_4(\|f\|_{L_p(\Gamma)}+C_3)=C_7.\tag{2.6}$$

考虑 Cauchy 型积分

$$g_N(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{Q_N[\psi(\tau)]}{\tau-w}d\tau,\quad |w|<1,\tag{2.7}$$

及

$$h_N(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{Q_N[\psi(\tau)]}{\tau-w}d\tau,\quad |w|>1,\tag{2.8}$$

利用映射函数 $\psi(\tau)$ 在无穷远处的性质，容易看出 $g_N(w)$ 是一个次数 $\leqslant N$ 的多项式，且利用 Riesz 定理[2,12]，可知，对于 $g_N(w)$ 在 $|w|=1$ 上的角度边界值，下式成立：

$$\|g_N(w)\|_{L_p(|w|=1)}\leqslant C_8\|Q_N[\psi(\tau)]\|_{L_p(|\tau|=1)}\leqslant C_9,\tag{2.9}$$

其中最后一个不等式是利用(2.6)后得到的.

现在用 $[\psi(w)]^N$ 除以 $g_N(w)$. 利用单位圆外 $(|w|>1)E_p$ 类函数性质，容易得到(参看 Sewell 书[15])，对任何 $T>1$，有

$$\|g_N(w)\|_{L_p(|w|=T)}\leqslant T^N\|g_N(w)\|_{L_p(|w|=1)}\leqslant C_9T^N\tag{2.10}$$

其中最后一个不等式是利用(2.9)后得到的.

除此以外，再利用 И. И. Привалов 定理[13]，在单位圆周上处处有

$$Q_N[\psi(\tilde{w})]=g_N(\tilde{w})-h_N(\tilde{w}),\quad |\tilde{w}|=1,\tag{2.11}$$

转化到 z 平面上，就有

$$Q_N(\tilde{z})=g_N[\varphi(\tilde{z})]-h_N[\varphi(\tilde{z})],\quad \tilde{z}\in\Gamma.\tag{2.12}$$

令 $H_N(z)=h_N[\varphi(z)]$，显然，它在 G_∞ 解析，$H_N(\infty)=0$. 由[13]知，$h_N(w)$ 在 $|w|>1$ 中属于 H_p 类，且由于边界的性质(1.4)，容易看出 $H_N(z)$ 在 G_∞ 中属于 E_p 类，因此在 G_∞ 内有表达式

$$H_N(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{H_N(\xi)}{\xi-z}d\xi,\quad z\in G_\infty.$$

利用(2.12)，上式可以改写为

* 今后我们用 $C_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$ 表示各种常数。

$$H_N(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{Q_N(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g_N[\varphi(\xi)]}{\xi-z}d\xi$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g_N[\varphi(\xi)]}{\xi-z}d\xi,\quad z\in G_\infty. \tag{2.13}$$

再利用 И. И. Привалов 定理[13]，在 Γ 上几乎处处有

$$H_N(\tilde{z})=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g_N[\varphi(\xi)]}{\xi-\tilde{z}}d\xi+\frac{1}{2}g_N[\varphi(\tilde{z})],\quad \tilde{z}\in\Gamma, \tag{2.14}$$

其中右边第一个积分是从主值意义下来理解的.

由(2.12)及(2.14)得到，在 Γ 上几乎处处有

$$Q_N(\tilde{z})=\frac{1}{2}g_N[\varphi(\tilde{z})]+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g_N[\varphi(\xi)]}{\xi-\tilde{z}}d\xi,\quad \tilde{z}\in\Gamma, \tag{2.15}$$

现在利用[9.16]工作中的插值有理函数来逼近 $g_N(w)$. 为此，考虑函数 $g_N(w)$ 的插值基点位于 $w=0$ 以及 $w=\frac{1}{\bar{\lambda}'_{n,i}}(1\leqslant i\leqslant n)$, $\lambda'_{n,i}=\varphi(\lambda_{n,i})$ 的有理函数 $G_n(w)$:

$$G_n(w)=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}d_iw^n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(w-\lambda'_{n,i})}. \tag{2.16}$$

已知[9,16]

$$g_N(w)-G_n(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=T>1}\frac{w}{\tau}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,i}w}{w-\lambda'_{n,i}}\prod_{i=1}^{n}\frac{\tau-\lambda'_{n,i}}{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\tau}\frac{g_N(\tau)}{\tau-w}d\tau,\ |w|\leqslant 1. \tag{2.17}$$

显然对任意的 p, $1<p<+\infty$, 我们有

$$\|g_N(w)-G_n(w)\|_{L_p(|w|=1)}\leqslant C_{10}\frac{1}{T(T-1)}\|g_N(\tau)\|_{L_p(|\tau|=T)}\cdot\max_{|\tau|=T}\left|\prod_{i=1}^{n}\frac{\tau-\lambda'_{n,i}}{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\tau}\right|$$
$$\leqslant C_{11}\frac{T^{N-1}}{T-1}\max_{|\tau|=T}\left|\prod_{i=1}^{n}\frac{\tau-\lambda'_{n,i}}{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\tau}\right|, \tag{2.18}$$

其中最后一个不等式是利用(2.10)后得到的.

对于(2.18)的最后一项，利用[9]中方法，但是作更为精确的分析(例如参看[12])，容易得到

$$\max_{|\tau|=T}\left|\prod_{i=1}^{n}\frac{\tau-\lambda'_{n,i}}{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\tau}\right|\leqslant\prod_{i=1}^{n}\frac{T+|\lambda'_{n,i}|}{1+T|\lambda'_{n,i}|}\leqslant C_{12}\exp\left[-(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)\right] \tag{2.19}$$

其中 ε 是任意小的正数，T 是充分大的数 $(T\geqslant T(\varepsilon))$.

由(2.18)及(2.19)可以得到

$$\|g_N(w)-G_n(w)\|_{L_p(|w|=1)}\leqslant C_{13}\frac{T^{N-1}}{T-1}\exp\left[-(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)\right], \tag{2.20}$$

其中 ε 是大于零的任意数，$T\geqslant T(\varepsilon)$.

现在我们要利用上面所得到的估计式(2.20)来寻找形如(2.1)的有理函数 $R_n(z)$，使得 $Q_N(z)$ 与 $R_n(z)$ 在 $L_p(\Gamma)$ 上的偏差也有类似的估计.

显然，函数 $G_n[\varphi(z)]$ 只是以 $\lambda_{n,i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 为其极点，我们将函数 $G_n[\varphi(z)]$ 在其极点 $\lambda_{n,i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 处的主要部分之和记作 $R_n(z)$，它就是上面要找的具有形状为(2.1)的有理函数. 我们要证明，它就是满足我们的要求. 事实上，函数 $G_n[\varphi(z)]-R_n(z)$ 在 G_∞ 上解析，在无穷远处取值为零. 因此，对任何 $z\in G$，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{G_n[\varphi(\xi)]-R_n(\xi)}{\xi-z}d\xi=0,$$

即

$$R_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{G_n[\varphi(\xi)]}{\xi-z}d\xi,\quad z\in G,\tag{2.21}$$

根据 И. И. Привалов 定理[13]，在 Γ 上处处有(这里用到性质(1.4)，因为 $G_n[\varphi(\xi)]$满足一级 Lipschtz 条件)

$$R_n(\tilde{z})=\frac{1}{2}G_n[\varphi(\tilde{z})]+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{G_n[\varphi(\xi)]}{\xi-\tilde{z}}d\xi,\quad \tilde{z}\in\Gamma,\tag{2.22}$$

其中最后一个积分是按主值意义下来理解的.

由(2.15)及(2.22)得到

$$Q_N(\tilde{z})-R_n(\tilde{z})=\frac{1}{2}(g_N[\varphi(\tilde{z})]-G_n[\varphi(\tilde{z})])+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g_N[\varphi(\xi)]-G_n[\varphi(\xi)]}{\xi-\tilde{z}}d\xi,$$
$$\tilde{z}\in\Gamma,\tag{2.23}$$

由此从(2.23)利用三角不等式及 L_p 空间中的 Riesz 定理[9]，我们有

$$\begin{aligned}\|Q_N(z)-R_n(z)\|_{L_p(\Gamma)}&\leqslant C_{14}\|g_N[\varphi(z)]-G_n[\varphi(z)]\|_{L_p(\Gamma)}\\&\quad+C_{15}\|g_N[\varphi(z)]-G_n[\varphi(z)]\|_{L_p(\Gamma)}\\&\leqslant C_{16}\|g_N(w)-G_n(w)\|_{L_p(|w|=1)},\end{aligned}\tag{2.24}$$

其中最后一个不等式是利用映射函数性质(1.4)后得到的.

因而，由(2.24)及(2.20)就可得

$$\begin{aligned}\|Q_N(z)-R_n(z)\|_{L_p(\Gamma)}&\leqslant C_{17}\frac{T^{N-1}}{T-1}\exp\left[-(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)\right]\\&\leqslant C_{18}\frac{1}{T(T-1)}\left[T^{\frac{N}{\Sigma}}e^{-(1-\varepsilon)}\right]^{\Sigma}\end{aligned}\tag{2.25}$$

其中

$$\Sigma=\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)\tag{2.26}$$

合并(2.4)及(2.25)，利用三角不等式就得到

$$\|f(z)-R_n(z)\|_{L_p(\Gamma)}\leqslant\frac{C_2}{N^k}w_p\left(f^{(k)},\ \frac{1}{N}\right)+C_{18}\frac{1}{T(T-1)}\left[T^{\frac{N}{\Sigma}}e^{-(1-\varepsilon)}\right]^{\Sigma},\tag{2.27}$$

其中 N 可以取任意自然数，而 $0<\varepsilon<1$ 是任意数，$T\geqslant T(\varepsilon)$.

当 ε 取定后，T 也取定，于是，存在数 $\delta>0$，使得

$$T^{\delta}e^{-(1-\varepsilon)}=q_1<1.$$

从而在(2.27)中取 $N=[\delta\Sigma]$ (即取 $\delta\Sigma$ 的整数部分)，我们有

$$T^{\frac{N}{\Sigma}}e^{-(1-\varepsilon)}\leqslant T^{\delta}e^{-(1-\varepsilon)}=q_1<1.$$

由此，根据连续模的性质，从(2.27)立刻可以得到(2.2).　　证毕.

从定理一可以看出，在 $E_p(1<p<+\infty)$ 中研究用有理函数逼近时，尽管被逼近的函数 $f(z)$ 的高阶微商属于 E_p，对于有理函数的极点分布不必加上任何条件，就能得到预期的结果，这就大大地改进了文章[12]中的结果，因为在那里我们加上了条件(1.11).

此外，对于二连通区域以及闭曲线，都可以类似地研究有理函数的最佳逼近问题，这里不准备再证明了.

§3. E_∞ 上有理函数的最佳逼近

正如我们在§2中已经指出，当在 $E_p(1<p<+\infty)$ 中考虑有理函数最佳逼近时，尽管被逼近函数的高阶微商属于 E_p，对有理函数的极点不必加任何限制，就能得到较高的逼近的阶．但是在 E_∞ 上考虑逼近时，情况就不一样了．在[10]中当被逼近函数只是连续函数时，由于逼近的阶较低，因此对极点没有加上任何条件．但当被逼近的函数的高阶微商属于 E_∞ 时，为了在 E_∞ 中得到较高的估计式，还加上了条件(1.11)，这个条件，本质上与 C. H. Мергелян 在 walsh 书的附录[16]上所指出的条件相类似，但比他的条件要弱一些．这一节中，我们证明条件(1.11)还可以减弱：对于 C. Я. Альпер 所考虑的 j 类区域[1]，则可以不加任何条件；对于一般的 j_λ 类区域[10]，则可以将条件(1.11)换为条件(1.12)．这样一来，对有理函数极点所附加的条件就与实现逼近的区域边界的光滑性有关了．

定理2[14] 设 G 是 j_λ 类区域．复数三角阵列 $\{\lambda_{n,i}\}(1\leqslant i\leqslant n,\ n=1,2,\cdots)$ 中各点位于 $\overline{G}$ 的余集 G_∞ 内部，它们可以取值 ∞，且满足条件(1.12)，设函数 $f(z)$ 在 G 内解析，$\overline{G}$ 上有连续 K 级微商 $f^{(k)}(z)$，其连续模记作 $w(f^{(k)},\delta)\leqslant w(\delta)$，$w(\delta)$ 是某个连续函数的连续模，当 $\delta\to+\varepsilon$ 时，$w(\delta)|\ln\delta|^{1-\lambda}\to 0$，则对任何自然数 n，存在形如(2.1)的有理函数 $R_n(z)$，使得

$$\|f(z)-R_n(z)\|_{C(\Gamma)}\leqslant C_{19}\{\varepsilon_n^k w(f^{(k)},\varepsilon_n)|\ln\varepsilon_n|^{(k+1)(1-\lambda)}+q_2^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\},\tag{3.1}$$

其中 q_2 为绝对常数，$0<q_2<1$，ε_n 由(2.3)所确定．

证 不妨假设(1.3)成立，否则(3.1)显然成立．

在定理二的条件下，根据[10]中定理，对于任何自然数 N，必存在次数 $\leqslant N$ 的多项式 $Q_N(z)$，使得

$$\|f(z)-Q_N(z)\|_{C(\Gamma)}\leqslant\frac{C_{20}}{N^k}w\left(f^{(k)},\frac{1}{N}\right)|\ln N|^{(k+1)(1-\lambda)},\tag{3.2}$$

由此推出

$$\|Q_N[\psi(w)]\|_{C(|w|=1)}=\|Q_N(z)\|_{C(\Gamma)}\leqslant\|f\|_{C(\Gamma)}+C_{21},\tag{3.3}$$

象在§2中一样，考虑 Cauchy 型积分(2.7)与(2.8)，于是在 $|w|=1$ 上，(2.11)成立；在 Γ 上，(2.12)成立．

对任意的数 ρ，$0<\rho<1$，由(2.8)及(3.3)得到

$$\|g_N(w)\|_{C(|w|=\rho)}\leqslant\frac{\|f\|_{C(\Gamma)}+C_{21}}{1-\rho},\tag{3.4}$$

已知 $g_N(w)$ 是一个次数 $\leqslant N$ 的多项式，因此，根据 Бернштеин 不等式(参看 Sewell 书[15])，对于任何数 $T>1$，我们有

$$\|g_N(w)\|_{C(|w|=T)}\leqslant\left(\frac{T}{\rho}\right)^N\|g_N(w)\|_{C(|w|=\rho)}\leqslant\frac{\|f\|_{C(\Gamma)}+C_{21}}{1-\rho}\left(\frac{T}{\rho}\right)^N,\tag{3.5}$$

其中最后一个不等式是利用(3.4)后得到的．

象在§2中一样，考虑多项式 $g_N(w)$ 的插补基点在 $w=0$ 及 $w=\frac{1}{\bar{\lambda}_{n,i}}$ 的形如(2.16)的

有理插值函数 $G_n(w)$. 现在研究 $\|g_N(w)-G_n(w)\|_{C(|w|=1)}$ 的估计式.

我们将(2.17)重写为

$$g_N(w)-G_n(w)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1-\bar{\lambda}_{n,i}w}{w-\lambda_{n,i}}I_{N,n}(w),\quad |w|\leqslant 1, \tag{3.6}$$

其中

$$I_{N,n}(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=T>1}\frac{w}{\tau}\prod_{i=1}^{n}\frac{\tau-\lambda'_{n,i}}{1-\bar{\lambda}_{n,i}\tau}\frac{g_N(\tau)}{\tau-w}d\tau,\quad |w|\leqslant 1, \tag{3.7}$$

利用(2.16)及(3.5), 可以得到它的估计式:

$$\|I_{N,n}(w)\|_{C(|w|=1)}\leqslant\frac{\|f\|_{C(\Gamma)}+C_{21}}{(1-\rho)(T-1)T}\left(\frac{T}{\rho}\right)^{N}\exp\left[-(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)\right]=M_{N,n}, \tag{3.8}$$

其中 ε 是满足 $0<\varepsilon<1$ 的任意数, $T\geqslant T(\varepsilon)$ 是任意数. 由此从(3.6)及(3.8)得

$$\|g_N(w)-G_n(w)\|_{C(|w|=1)}\leqslant M_{N,n}. \tag{3.9}$$

象在 § 2 中一样, 考虑 $G_n[\varphi(z)]$ 在极点 $\lambda_{n,i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 的主要部分之和 $R_n(z)$, 它具有形状(2.1)且关系式(2.22)成立. 由(2.22)可以得到

$$R_n(\tilde{z})=\frac{1}{2}G_n(\tilde{w})+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}G_n(\tau)\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w})}d\tau,\quad |\tilde{w}|=1,\ \tilde{w}=\varphi(\tilde{z}). \tag{3.10}$$

由于
$$G_n(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{G_n(\tau)}{\tau-w}d\tau,\quad |w|<1.$$

根据上述 И. И. Привалов 定理[13], 知道

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{G_n(\tau)}{\tau-\tilde{w}}d\tau=\frac{1}{2}G_n(\tilde{w}),\quad |\tilde{w}|=1. \tag{3.11}$$

这里积分也是从主值意义下来理解的.

比较(3.10)及(3.11), 就得到

$$R_n(\tilde{z})=G_n(\tilde{w})+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}G_n(\tau)\left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w})}-\frac{1}{\tau-\tilde{w}}\right]d\tau,$$
$$\tilde{w}=\varphi(\tilde{z}),\quad \tilde{z}\in\Gamma. \tag{3.12}$$

由此根据(2.12)及(3.12)推出, 当 $\tilde{z}\in\Gamma$ 时,

$$Q_N(\tilde{z})-R_n(\tilde{z})=g_N[\varphi(\tilde{z})]-h_n[\varphi(\tilde{z})]-G_n(\tilde{w})$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}G_n(\tau)\left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w})}-\frac{1}{\tau-\tilde{w}}\right]d\tau,\quad \tilde{w}=\varphi(\tilde{z}). \tag{3.13}$$

此外, 由于(2.14), 运用 И. И. Привалов 定理[13], 我们有

$$-h_N[\varphi(\tilde{z})]=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}g_N(\tau)\left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w})}-\frac{1}{\tau-\tilde{w}}\right]d\tau,$$
$$\tilde{w}=\varphi(\tilde{z}),\quad \tilde{z}\in\Gamma.$$

因而, 将上式代入(3.13)后, 得到

$$Q_N(\tilde{z})-R_n(\tilde{z})=g_N(\tilde{w})-G_n(\tilde{w})$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}[g_N(\tau)-G_n(\tau)]\left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\tilde{w})}-\frac{1}{\tau-\tilde{w}}\right]d\tau,$$
$$\tilde{w}=\varphi(\tilde{z}),\quad \tilde{z}\in\Gamma. \tag{3.14}$$

此外, 再根据显然的恒等式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\widetilde{w})}-\frac{1}{\tau-\widetilde{w}}\right]d\tau=0,\quad |\widetilde{w}|=1,$$

由(3.14)就可以得到

$$\begin{aligned}Q_N(\widetilde{z})-R_n(\widetilde{z})&=g_N(\widetilde{w})-G_n(\widetilde{w})+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\left[\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\widetilde{w})}-\frac{1}{\tau-\widetilde{w}}\right]\\&\quad\cdot[(g_N(\tau)-G_n(\tau))-(g_N(\widetilde{w})-G_n(\widetilde{w}))]d\tau,\\&=I_1(\widetilde{w})+I_2(\widetilde{w}),\quad \widetilde{z}\in\Gamma,\ \widetilde{w}=\varphi(\widetilde{z}).\end{aligned}\tag{3.15}$$

对于 $I_1(\widetilde{w})$ 我们已有估计式(3.9). 余下来的问题是要估计 $I_2(\widetilde{w})$. 首先,我们指出,如果区域 G 是 j_1 类区域,即 С. Я. Альпер 所引进的区域 j[1],则因为

$$\left|\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(\widetilde{w})}-\frac{1}{\tau-\widetilde{w}}\right|\leqslant\frac{\sigma(|\tau-\widetilde{w}|)}{|\tau-\widetilde{w}|},\tag{3.16}$$

其中 $\sigma(\delta)$ 是函数 $\psi'(w)$ 在 $|w|=1$ 上的连续模,且对于 С. Я. Альпер 区域,已知[1],

$$\int_0\frac{\sigma(t)}{t}dt<+\infty.$$

那么可以看出对 $I_2(\widetilde{w})$ 也有估计式(3.9). 但是在我们的情况下,区域 G 是 j_λ 类区域,因此必须作进一步讨论. 利用我们在工作[10]中对于 j_λ 类区域的结果,已知

$$\int_0\frac{\sigma(t)}{t}|\ln t|^{\lambda-1}dt<+\infty,\quad 0\leqslant\lambda<1.\tag{3.17}$$

对于 $I_2(\widetilde{w})$ 也可以进行估计. 我们下面就详细地来进行讨论.

由(3.6)及(3.8)推出,当 $|\tau|=1$, $|\widetilde{w}|=1$ 时,我们有

$$\begin{aligned}&|(g_N(\tau)-G_n(\tau))-(g_N(\widetilde{w})-G_n(\widetilde{w}))|\\&=\left|\prod_{i=1}^n\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\tau}{\tau-\lambda'_{n,i}}I_{N,n}(\tau)-\prod_{i=1}^n\frac{1-\lambda'_{n,i}\widetilde{w}}{\widetilde{w}-\lambda'_{n,i}}I_{N,n}(\widetilde{w})\right|\\&\leqslant\left|\prod_{i=1}^n\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\tau}{\tau-\lambda'_{n,i}}I_{N,n}(\tau)-\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,1}\widetilde{w}}{\widetilde{w}-\lambda'_{n,1}}\prod_{i=2}^n\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\tau}{\tau-\lambda'_{n,i}}I_{N,n}(\tau)\right|\\&\quad+\left|\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,1}\widetilde{w}}{\widetilde{w}-\lambda'_{n,1}}\prod_{i=2}^n\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\tau}{\tau-\lambda'_{n,i}}I_{N,n}(\tau)-\prod_{i=1}^n\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\widetilde{w}}{\widetilde{w}-\lambda'_{n,i}}I_{N,n}(\widetilde{w})\right|\\&\leqslant2|\tau-\widetilde{w}|\left|\frac{1}{1-\frac{1}{|\lambda_{n,1}|}}\right|M_{N,n}+\left|\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,1}\widetilde{w}}{\widetilde{w}-\lambda'_{n,1}}\prod_{i=2}^n\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\tau}{\tau-\lambda'_{n,i}}I_{N,n}(\tau)\right.\\&\quad\left.-\prod_{i=1}^n\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\widetilde{w}}{\widetilde{w}-\lambda'_{n,i}}I_{N,n}(\widetilde{w})\right|\\&\leqslant2|\tau-\widetilde{w}|\left|\frac{1}{1-\frac{1}{|\lambda_{n,1}|}}\right|M_{N,n}\\&\quad+\left|\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,1}\widetilde{w}}{\widetilde{w}-\lambda'_{n,1}}\prod_{i=2}^n\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\tau}{\tau-\lambda'_{n,i}}I_{N,n}(\tau)-\prod_{i=1}^2\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\widetilde{w}}{\widetilde{w}-\lambda'_{n,i}}\prod_{i=3}^n\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\tau}{\tau-\lambda'_{n,i}}I_{N,n}(\tau)\right|\\&\quad+\left|\prod_{i=1}^2\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\widetilde{w}}{\widetilde{w}-\lambda'_{n,i}}\prod_{i=3}^n\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\tau}{\tau-\lambda'_{n,i}}I_{N,n}(\tau)-\prod_{i=1}^n\frac{1-\bar{\lambda}'_{n,i}\widetilde{w}}{\widetilde{w}-\lambda'_{n,i}}I_{N,n}(\widetilde{w})\right|\end{aligned}$$

接连运用上面的方法,容易证明

$$\begin{aligned}&|(g_N(\tau)-G_n(\tau))-(g_N(\widetilde{w})-G_n(\widetilde{w})|\\&\leqslant2M_{N,n}|\tau-\widetilde{w}|\sum_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)^{-1}+|I_{N,n}(\tau)-I_{N,n}(\widetilde{w})|,\end{aligned}\tag{3.18}$$

而由 $I_{N,n}(\tau)$ 的积分表达式(3.7)，容易得到

$$|I_{N,n}(\tau)-I_{N,n}(\widetilde{w})|\leqslant M_{N,n}\frac{1}{T-1}|\tau-\widetilde{w}|. \tag{3.19}$$

然后，将(3.19)代入(3.18)，就可以得到

$$\begin{aligned}&|(g_N(\tau)-G_n(\tau))-(g_N(\widetilde{w})-G_n(\widetilde{w}))|\\&\leqslant 2M_{N,n}|\tau-\widetilde{w}|\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)^{-1}+\frac{1}{T-1}\right],\quad |\tau|=1,\ |\widetilde{w}|=1.\end{aligned} \tag{3.20}$$

现在我们已有条件来估计 $I_2(\widetilde{w})$ 了．为此，将积分路径 $|\tau|=1$ 分成二部分，一部分记作 l_1，它是位于以 $\widetilde{w}$ 为中心，半径为 $\left[1+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)^{-1}\right]^{-2}$ 的圆内，积分式记为 $I_2^{(1)}(\widetilde{w})$，剩下的部分记作 l_2，积分式记为 $I_2^{(2)}(\widetilde{w})$．由于(3.16)，取 $T\geqslant 2$，我们有

$$\begin{aligned}|I_2^{(1)}(\widetilde{w})|&\leqslant 2M_{N,n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)^{-1}+1\right]\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)^{-1}+1\right]^{-2}}\frac{\sigma(t)}{t}t\,dt\\&\leqslant C_{22}M_{N,n}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

其中最后一个不等式是利用(3.17)后得到的．

同样，由(3.16)，(3.17)及(3.9)可以得到

$$\begin{aligned}|I_2^{(2)}(\widetilde{w})|&\leqslant\int_{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)^{-1}+1\right]^{-2}}^{2}M_{N,n}\frac{\sigma(t)}{t}dt\\&\leqslant C_{23}M_{N,n}\left\{\ln\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)^{-1}+1\right]\right\}^{1-\lambda}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

由(3.15)，(3.20)，(3.21)，(3.22)及(3.9)得到

$$|Q_n(\widetilde{z})-R_n(\widetilde{z})|\leqslant C_{24}M_{N,n}\left[1+\left\{\ln\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)^{-1}+1\right\}^{1-\lambda}\right]. \tag{3.23}$$

由于认为(1.3)成立，因此不妨假设

$$1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\geqslant\frac{1}{i^2}. \tag{3.24}$$

事实上，在相反的情况下，如果对于某些 $\lambda'_{n,k_i}(1\leqslant i\leqslant p_n)$，(3.24)不成立，则

$$\sum_{i=1}^{p_n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,k_i}|}\right)<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

因此在三角阵列 $\{\lambda_{n,i}\}$ 中，我们不考虑那些不满足(3.24)的点后，如果定理成立(此时，求和 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)$ 中应该去掉那些不满足(3.24)的项)，则在估计式(3.1)右边表示 ε_n 的求和中加上不满足(3.24)的项后，定理仍对．

由(3.24)得

$$\ln\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right)^{-1}+1\right]\leqslant C_{25}\ln n. \tag{3.25}$$

比较(3.2)，(3.23)，(3.25)及(3.8)后，我们得到

$$\max_{z\in\bar{G}}|f(z)-R_n(z)|=\|f(z)-R_n(z)\|_{C(\Gamma)}$$

$$\leqslant\frac{C_{20}}{N^k}w\left(f^{(k)},\frac{1}{N}\right)|\ln N|^{(1+k)(1-\lambda)}+C_{26}M_{N,n}(\ln n)^{1-\lambda}$$

$$\leqslant\frac{C_{20}}{N^k}w\left(f^{(k)},\frac{1}{N}\right)|\ln N|^{(1+k)(1-\lambda)}+C_{26}\frac{\|f\|_{C(\Gamma)}+C_{21}}{(1-\rho)(T-1)T}\left(\frac{T}{\rho}\right)^N$$

$$\cdot\exp\left\{\left[-(1-\varepsilon)+(1-\lambda)\frac{\ln\ln n}{\Sigma}\right]\Sigma\right\},\tag{3.26}$$

其中
$$\Sigma=\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{|\lambda'_{n,i}|}\right),$$

$T\geqslant\max(T(\varepsilon),2)$, $0<\rho<1$, ε 是任意小正数, $0<\varepsilon<1$.

按条件(1.12), 任给一数 $\varepsilon_1>0$, 存在数 $N_1(\varepsilon_1)$, 使当 $m\geqslant N_1(\varepsilon_1)$ 时, 总有

$$(1-\lambda)\frac{\ln\ln n}{\Sigma}\leqslant\rho_1+\varepsilon_1<1-\varepsilon.$$

这样一来, 从(3.26)得到, 当 $n\geqslant N_1(\varepsilon_1)$ 时,

$$\|f(z)-R_n(z)\|_{C(\Gamma)}\leqslant\frac{C_{20}}{N^k}w\left(f^{(k)},\frac{1}{N}\right)(\ln n)^{(1+k)(1-\lambda)}+C_{26}(\|f\|_{C(\Gamma)}+C_{21})$$

$$\cdot\frac{1}{(1-\rho)(T-1)T}\left(\frac{T}{\rho}\right)^N\exp\{[(\rho_1+\varepsilon)-(1-\varepsilon)]\Sigma\}.\tag{3.27}$$

我们将 $T\geqslant\max(T(\varepsilon),2)$ 与 $\rho(0<\rho<1)$ 看作固定的数, 选择 N 使得能够得到估计式(3.1). 为此, 首先选择 q 很大, 使得

$$q_2=\left(\frac{T}{\rho}\right)^{\frac{1}{q}}\exp[(\rho_1+\varepsilon)-(1-\varepsilon)]<1,$$

然后取
$$N=\frac{\Sigma}{q}\text{ 的整数部分},$$

则
$$\left(\frac{T}{\rho}\right)^{\frac{N}{\Sigma}}\exp[(\rho_1+\varepsilon)-(1-\varepsilon)]\leqslant\left(\frac{T}{\rho}\right)^{\frac{1}{q}}\exp[(\rho_1+\varepsilon_1)-(1-\varepsilon)]=q_2<1.$$

因此, 当 $n\geqslant N_1(\varepsilon_1)$ 时, 由(3.27)得到

$$\|f(z)-R_n(z)\|_{C(\Gamma)}\leqslant C_{27}\left\{\frac{1}{[\Sigma]^k}w\left(f^{(k)},\frac{1}{\Sigma}\right)(\ln\Sigma)^{(1+k)(1-\lambda)}+\|f\|_{C(\Gamma)}q_2^{\Sigma}\right\}$$

再考虑 $n\leqslant N_1(\varepsilon_1)$ 的情况, 由上式及(2.3), 容易得到(3.1). 证毕.

这个定理改进了我们在工作[10]中的结果 (条件(1.12)比条件(1.11)要弱得多), 当然, 也改进了 H. M. Elliot[17], J. L. Walsh[18] 所得到的结果, 因为他们只考虑 G 是具有解析边界的区域且实现逼近的有理函数的极点在 G 的边界上没有凝聚点.

这里, 同样也可以得到在二连通区域, 闭曲线上有理函数最佳逼近的结果, 这里也不准备证明[14], 因为证明的方法是很类似的.

参 考 文 献

[1] С. Я. Альпер, О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области, Изв. АН СССР сер. метем. **19**: 6 (1955), 423—444.

[2] С. Я. Альпер, О приблежении в среднем аналитических функций класса E_p, "Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного", М., (1960), 273—286.

[3] В. М. Кокилашвили, О приближении аналитических функций класса E_p, ДАН СССР **177:2** (1967), 260—

264.
[4] В. М. Кокилашвили, О приближении аналитических функций класса E_p, Сообщ. АН Груз. ССР, **47**:1 (1967), 3—6.
[5] В. М. Кокилашвили, О приближение аналитических функций класса E_p, Труды Тблис. матем. ин-та **34** (1968), 82—101.
[6] В. М. Кокилашвили, Прямая теорема приближения аналитических функций класса E_p, ДАН СССР, **185**:4 (1969), 749—752.
[7] С. Н. Мергелян, М. М. Джрбашян, О наилучших приближениях рациональными функциямн, ДАН СССР, **99**:5 (1954), 673—675.
[8] Е. С. Кочарян, О приближении рациональными функциями в комплексной области. Изв. АН Арм. ССР, **11**:4 (1958), 53—77.
[9] 沈燮昌、类元仁,关于单位圆上有理函数的最佳逼近,数学学报 **20**:3 (1977), 232—235.
[10] 沈燮昌、类元仁,复平面区域上有理函数的最佳逼近,数学学报 **20**:4 (1977), 301—303.
[11] 沈燮昌、类元仁,关于 H_p 空间中有理函数的最佳逼近,北京大学学报 **22**:1(1979), 58—72.
[12] 沈燮昌、类元仁,关于 $E_p(p>1)$ 空间中有理函数的最佳逼近,北京大学学报 **22**:2(1979),1—18.
[13] И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, ГИТЛ, (1950).
[14] 沈燮昌,关于具有预先给定极点的有理函数的最佳逼近问题,数学学报 **21**:1 (1978), 86—90.
[15] W. E. Sewell, Degree of approximation by polynomials in the complex domain. (1942)
[16] Дж. Л. Уолш (J. L. Walsh), Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М. Д. М., (1961)
[17] H. M. Elliot, On approximation to analytic function by rational functions *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4**:1 (1953), 161—167.
[18] J. L. Walsh, Note on the degree of approximation to analytic function by rational functions with preassigned poles, *Proc. Nat. Acad.* USA, **42**:12 (1956), 927—930.

ON THE BEST APPROXIMATION OF FUNCTIONS IN THE E_p $(1 < p \leqslant +\infty)$ SPACE BY RATIONAL FUNCTIONS WITH PREASSIGNED POLES

SHEN XIECHANG
(*Peking University*)

ABSTRACT

In this paper some theorems on the best approximation by rational functions with preassigned poles in the $E_p(1<p\leqslant+\infty)$ space are proved. It is shown, that the distribution of the poles can be entirely arbitrary provided that the domain, on which the approximation is investigated, satisfies Альпер's condition.