数 学 年 刊
1 (1) 1980

压缩型映象的几个不动点定理

倪录群 姚景齐 赵汉章
(中国科学院数学研究所)

§1. 引　　言

非线性泛函分析中映象的不动点理论，近十多年来有了很大的发展．其中非扩张映象以及各种压缩型映象的不动点理论是讨论得很多的课题．(见[1]—[8])．

本文对现有的结果作一些推广．我们讨论了某些类压缩型映象的性质，并在不必有严格凸性的自反 Opial 空间，以及不必自反不必严格凸的某类 $*$-Opial 空间中，给出了它们的一些不动点定理．另外，我们还讨论了集合值压缩型映象的不动点定理．

§2. 单值映象的不动点定理

在距离空间 (X, d) 中，先考察如下类型的压缩型映象 T，它满足

$$\text{(I)}\quad d(Tx, Ty)\leqslant\max\left\{d(x, y), \frac{1}{2}[d(x, Tx)+d(y, Ty)], \frac{1}{2}[d(x, Ty)+d(y, Tx)]\right\},$$
$$\forall x, y\in\mathscr{D}(T)$$

与[7]中类似，容易验证，它等价于满足下面条件的压缩型映象：

$$\text{(I}'\text{)}\quad d(Tx, Ty)\leqslant a(x, y)d(x, y)+b(x, y)[d(x, Tx)+d(y, Ty)]$$
$$+c(x, y)[d(x, Ty)+d(y, Tx)],\quad \forall x, y\in\mathscr{D}(T)$$

其中 $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ 是依赖于 (x, y) 的非负实数，且满足

$$a(x, y)+2b(x, y)+2c(x, y)\leqslant 1.$$

在讨论之前，先给出一些定义．

定义 1 (参见[3], [14]) Banach 空间 X 称为是 Opial 空间，是指：如果序列

$$\{x_n\}\subset X,\quad x_n\xrightarrow{w}x_\infty,$$

那么对所有的 $y\in X$, $y\neq x_\infty$, 成立

$$\varlimsup_{n\to\infty}\|x_n-x_\infty\|<\varlimsup_{n\to\infty}\|x_n-y\| \tag{1}$$

(或等价地：$\varliminf\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_\infty\|<\varliminf\limits_{n\to\infty}\|x_n-y\|$ 见[9])

记号 $\longrightarrow$, $\xrightarrow{w}$, $\xrightarrow{w^*}$ 分别表示强，弱，弱*收敛．

例　Hilbert 空间．具有弱连续对偶映象的一致凸 Banach 空间．(见[9])．

本文 1978 年 7 月 24 日收到．

类似地，我们定义

定义 2 Banach 空间 X 的共轭空间 X^* 称为是 $*$-Opial 空间，如果

$$\{f_n\}\subset X^*,\quad f_n\xrightarrow{w^*}f_\infty,$$

则对所有的 $f\in X^*$, $f\neq f_\infty$ 成立

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|f_n-f_\infty\|<\overline{\lim_{n\to\infty}}\|f_n-f\| \tag{1'}$$

$$(\text{或等价地}\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\|f_n-f_\infty\|<\underline{\lim_{n\to\infty}}\|f_n-f\|).$$

关于强弱闭(demiclosed)映象的概念可参见[3]. 以下我们引入较弱的概念. 它们对后面的讨论已足够.

定义 3 映象 S 是 o-强弱闭的，(或 o-强弱*闭的)，如果，对

$$x_n\in\mathscr{D}(S),\quad x_n\xrightarrow{w}x_\infty,\quad (\text{或}\ \ x_n\xrightarrow{w^*}x_\infty),$$

且 $Sx_n\to0$, 那么有 $x_\infty\in\mathscr{D}(S)$, $Sx_\infty=0$

下面两个定义是熟知的

定义 4 映象 T 在 x 点的轨道 $O(x)$, 是指集合

$$O(x)=\{T^nx;\ \forall n\geqslant0\ \text{整数}\},\quad \text{若}\ \ x\in\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathscr{D}(T^i)$$

定义 5 映象 T 称为在 x 点渐近正则，如果 $T^{n+1}x-T^nx\to0$ 当 $n\to\infty$ 时.

引理 1 设 X 是 Opial 空间 (或 $*$-Opial 空间), K 是 X 中的非空弱闭子集 (或弱*闭子集). T 是映 K 到自身的 (I) 型压缩型映象. 则 $(I-T)$ 是 o-强弱闭的(或 o-强弱*闭的).

证 设 $\{x_n\}\subset K$, $x_n\xrightarrow{w}x_\infty$ (或 $x_n\xrightarrow{w^*}x_\infty$), $(I-T)x_n\longrightarrow0$

注意

$$\begin{aligned}\|x_n-Tx_\infty\|&\leqslant\|x_n-Tx_n\|+\|Tx_n-Tx_\infty\|\\&\leqslant\|x_n-Tx_n\|+a\|x_n-x_\infty\|+b[\|x_n-Tx_n\|+\|x_\infty-Tx_\infty\|]\\&\quad+c[\|x_n-Tx_\infty\|+\|x_\infty-Tx_n\|]\\&\leqslant\|x_n-Tx_n\|+(a+b+c)\|x_n-x_\infty\|+(b+c)\|x_n-Tx_n\|\\&\quad+(b+c)\|x_n-Tx_\infty\|.\end{aligned}\tag{2}$$

这里 a, b, c 均是在点 (x_n, x_∞) 处的值

由于

$$b(x, y)+c(x, y)\leqslant\frac{1}{2},\quad \forall x,\ y\in X.$$

从(2)式得到

$$\|x_n-Tx_\infty\|\leqslant\frac{a+b+c}{1-b-c}\|x_n-x_\infty\|+\frac{1+b+c}{1-b-c}\|x_n-Tx_n\|\leqslant\|x_n-x_\infty\|+3\|x_n-Tx_n\| \tag{3}$$

于是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x_n-Tx_\infty\|\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x_n-x_\infty\|+3\overline{\lim\limits_{u\to\infty}}\|x_n-Tx_n\|=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x_n-x_\infty\|$

据(1), $Tx_\infty=x_\infty$ 即 $(I-T)x_\infty=0$ 证毕.

推广[8]中结论，我们有

引理 2 X 是 Banach 空间, K 是 X 中非空子集, T 是映 K 到自身的 (I′) 型压缩型映象.

如果存在 $x\in K$，使 T 在 x 点的轨道 $O(x)$ 有界，而且

$$\beta=\inf_{y,z\in O(x)} c(y,z)>0 \tag{4}$$

那么映象 T 在 x 点渐近正则.

证　首先注意

$$\|T^{n+1}x-T^nx\|\leqslant\|T^nx-T^{n-1}x\|,\quad \forall z \text{ 整数 } n \tag{5}$$

所以 $\|T^{n+1}x-T^nx\|$ 当 $n\to\infty$ 时有极限，设它为 α.

容易用归纳法证明不等式

$$\|T^{n+1}y-T^ny\|\leqslant\|Ty-y\|+c_1c_2\cdots c_k[\|T^{n+1}y-T^{n-k}y\|-(k+1)\|Ty-y\|] \tag{6}$$

对于 K 中元 y 成立. 其中 k, n 均为整数 $0\leqslant k\leqslant n$,

$$c_i=c(T^ny,\ T^{n-i}y),\quad 1\leqslant i\leqslant k$$

([8]对 a, b, c 为常数的情形讨论了这个不等式).

由于 $O(x)$ 有界，存在正常数 A，使得

$$\|T^iy-T^jy\|\leqslant\delta(O(x))\leqslant A,\quad \forall y\in O(x),\forall \text{ 整数 } i,\ j\geqslant 0 \tag{7}$$

由此可以断言 $\alpha=0$. 事实上，如若不然，由(5)

$$\|T^{k+1}x-T^kx\|\geqslant\alpha>0\quad \forall \text{ 整数 } k\geqslant 0$$

从(6)，(7)得出

$$\|T^{n+1}y-T^ny\|\leqslant\|Ty-y\|+c_1c_2\cdots ck[A-(k+1)\alpha],\quad \forall y\in O(x),\ 0\leqslant k\leqslant n, \tag{8}$$

取整数 k 充分大，使 $A-(k+1)\alpha\leqslant -1$

从(8)得出

$$\|T^{k+1}y-T^ky\|\leqslant\|Ty-y\|-\beta^k\quad \forall y\in O(x).$$

于是

$$\|T^{nk+1}x-T^{nk}x\|-\|Tx-x\|\leqslant -n\beta^k \tag{9}$$

当 $n\to\infty$ 时(9)式中，右端发散，左端有限，矛盾. 所以 $\alpha=0$. 也就是 T 在 x 点渐近正则，　　证毕.

注　引理 2 不难推广到更一般的(II)型压缩型映象

(II)　$$d(Tx,Ty)\leqslant\max\left\{d(x,y),\ d(x,Tx),\ d(y,Ty),\frac{1}{2}[d(x,Ty)+d(y,Tx)]\right\},\quad \forall x,\ y\in\mathscr{D}(T)$$

以及与它等价的

(II′)　$$d(Tx,Ty)\leqslant a(x,y)d(x,y)+b_1(x,y)d(x,Tx)+b_2(x,y)d(y,Ty)+C(x,y)[d(x,Ty)+d(y,Tx)]$$

这里 $a(x,y)$，$b_1(x,y)$，$b_2(x,y)$，和 $C(x,y)$ 是依赖于 x, y 的非负实数，而且

$$a(x,y)+b_1(x,y)+b_2(x,y)+2C(x,y)\leqslant 1,\quad \forall x,y.$$

至此，我们可以推出在自反 Opial 空间中一类 (I′) 型映象的不动点定理.

定理 1　设 X 为自反 Opial 空间，K 为 X 中非空弱闭子集，T 为映 K 到自身的 (I′) 型压缩型映象，(T 不必连续). 如果存在 $x\in K$，轨道 $O(x)$ 有界，并且系数 C 满足性质(4)，则

T 在 K 中有不动点 $Tz=z$，而且 $T^nx\xrightarrow{w}z$.

证　令 $x_n=T^nx$，据引理 2，$(I-T)x_n\to 0$，当 $n\to\infty$ 时.

因 $O(x)$ 有界，由弱紧性，存在子列 $x_{n_i}\xrightarrow{w}z$，用引理 1，即得 $Tz=z$.

若 $x_n\xrightarrow{w}z$. 则有子列 $x'_{n_i}\xrightarrow{w}y\neq z$，且 $Ty=y$.

T 是伪非扩张的. 若 p 是 T 的不动点, 那么

$$\|Tx-p\|\leqslant\|x-p\|,\quad \forall x\in\mathscr{D}(T)$$

所以
$$\|x_n-p\|\leqslant\|x_{n-1}-p\|,\quad \forall n\geqslant 1$$

从而 $\{\|x_n-p\|\}$ 有极限, 这时

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y\|=\lim_{i\to\infty}\|x'_{n_i}-y\|=\lim_{i\to\infty}\|x_{n_i}-y\|>0$$
$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-z\|=\lim_{i\to\infty}\|x_{n_i}-z\|=\lim_{i\to\infty}\|x'_{n_i}-z\|>0$$

考虑 Opial 空间的性质后

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y\|<\lim_{n\to\infty}\|x_n-z\|$$
$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-z\|<\lim_{n\to\infty}\|x_n-y\|$$

同时成立. 这不可能, 所以 $x_n\xrightarrow{w}z$. 证毕.

同样地, 可对一类不必严格凸, 不必自反的空间建立 (I′) 型映象的不动点定理.

定理 2 设 X 是可分空间的共轭, 且是一 $*$-Opial 空间. $T: K\to K$ 是一 (I′) 型映象, K 是 X 中的非空弱*闭子集. 如果存在 $x\in K$, 轨道 $O(x)$ 有界, 且系数 C 满足式 (4). 那么

T 在 K 中有不动点: $Tz=z$, 且 $T^nx\xrightarrow{w^*}z$

证 X 既为可分空间的共轭, X 中的有界弱*闭子集是弱*序列紧子集. 证法与定理 1 完全类同.

[8] 讨论了平均非扩张映象, 即 (I′) 映象, a, b, c 均为不依赖于 x, y 的常数. 利用定理 1, 2 我们可得到关于平均非扩张映象不动点定理的几个新的结果.

定理 3 设 X 为可分空间的共轭, 且为 $*$-Opial 空间. K 为 X 中的非空有界弱* 闭凸子集, T 是映 K 入自身的连续平均非扩张映象, (当 $c\neq 0$ 时, T 不必连续, K 不必凸.) 那么: T 在 K 中有不动点.

证 如 $c\neq 0$, 用定理 2 即得.

如 $c=0$, $b=0$ 注意非扩张映象有近似不动点 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. 它满足 $(I-T)x_n\to 0$, 用弱*序列紧性, 易知定理成立.

如 $c=0$, $b\neq 0$ 只须注意 X 中的范数也是弱*下半连续的, [8] 中的证明容易向这种情形作推广.

特别利用 [5] 中的定理 2, 不自反不严格凸的 l_1 空间 (以及 J_0 空间), 满足定理 3 的条件, 所以有

推论 1 K 是 l_1 空间中的非空有界弱* 闭凸子集, T 为映 K 入自身的连续平均非扩张映象, 则 T 在 K 中有不动点. 〔当 $c\neq 0$ 时, T 不必连续, K 不必凸.〕

最后我们指出: 在一致凸 Banach 空间中, 对连续 (I) 型映象 T, 映象 $(I-T)$ 也是 o-强弱闭的.

引理 3 设 X 为一致凸的 Banach 空间, K 是 X 中的非空闭凸子集, T 是从 K 到自身的连续 (I) 型映象, 则 $(I-T)$ 是 o-强弱闭的.

为证明引理, 先注意下列命题

命题　(见[10])

X 是一致凸 Banach 空间，对任意 $\varepsilon>0$，必存在最大的 $\xi(\varepsilon)>0$，它满足 $\xi(\varepsilon)\leqslant\varepsilon$，而且对 X 中任意元 x, u, v 和任意实数 λ: $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，如果

$$\|x-u\|\leqslant\|u_\lambda-u\|+\xi(\varepsilon)$$
$$\|x-v\|\leqslant\|u_\lambda-v\|+\xi(\varepsilon)$$

那么一定有
$$\|u_\lambda-x\|\leqslant\varepsilon\|u-v\|$$
其中
$$u_\lambda=\lambda u+(1-\lambda)v$$

引理 3 的证明．设 $\{x_j\}\subset K$ 满足 $x_j\xrightarrow{w}x_\infty$，且 $(I-T)x_j\to 0$

令
$$A=\{x_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots\},\quad G=\overline{C}_0(A)$$
那么 $G\subset K$ 是一有界闭凸集．设 $\operatorname{diam} G=M$．据命题，对任给 $\varepsilon_0>0$，可取数列 $\{\varepsilon_j\}_{j=0}^{\infty}$ 使
$$\varepsilon_j=\frac{1}{3}\xi(\varepsilon_{j-1}/(M+1)) \tag{10}$$

这里 $\xi(\varepsilon)$ 是命题中给出的函数，满足 $\xi(\varepsilon)\leqslant\varepsilon$，所以
$$\varepsilon_j\leqslant\varepsilon_{j-1},\quad \forall j\geqslant 1.$$

因为 $(I-T)x_j\to 0$，我们可选 A 中的一个系列 A'，仍记为 $\{x_j\}$，使得
$$\|x_j-Tx_j\|\leqslant\varepsilon_j,\quad \forall x_j\in A'$$

下面我们证明：对 $u, v\in A'$

若
$$\|u-Tu\|\leqslant\varepsilon_j,\quad \|v-Tv\|\leqslant\varepsilon_j$$
必有
$$\|Tu_\lambda-u_\lambda\|\leqslant\varepsilon_{j-1},\ \forall\lambda: 0\leqslant\lambda\leqslant 1,\ u_\lambda=\lambda u+(1-\lambda)v \tag{11}$$
则
$$\|Tu_\lambda-u\|\leqslant\|Tu_\lambda-Tu\|+\|Tu-u\|$$

因等价性，只须对 T 满足 (I′) 型压缩型条件证明即可，所以
$$\begin{aligned}\|Tu_\lambda-Tu\|\leqslant & a\|u_\lambda-u\|+b[\|u_\lambda-Tu_\lambda\|+\|u-Tu\|]\\ &+c[\|u_\lambda-Tu\|+\|u-Tu_\lambda\|]\end{aligned} \tag{12}$$

这里的 a, b, c 都在 (u_λ, u) 处取值．

同引理 1 中的(2)，(3)式，我们得出
$$\|Tu_\lambda-u\|\leqslant\|u_\lambda-u\|+3\varepsilon_j\leqslant$$
(据(10))
$$\leqslant\|u_\lambda-u\|+\xi(\varepsilon_{j-1}/(M+1))$$
同样
$$\|Tu_\lambda-v\|\leqslant\|u_\lambda-v\|+\xi(\varepsilon_{j-1}/(M+1))$$
由命题即得
$$\|Tu_\lambda-u_\lambda\|\leqslant\frac{\varepsilon_{j-1}}{M+1}\|u-v\|\leqslant\varepsilon_{j-1}$$

于是(11)得证．因此，如 $y\in\overline{C}_0[x_j,\ x_{j+1}\cdots]$ 用(11)并结合 T 的连续性，易知
$$\|Ty-y\|\leqslant\varepsilon_{j-1}$$

所以由 $x_j\xrightarrow{w}x_\infty\in G$，得出 $\|x_\infty-Tx_\infty\|\leqslant\varepsilon_0$，$\varepsilon_0$ 是任意的，故 $x_\infty=Tx_\infty$　证毕．

因此，借助于引理 2 和 3，可以建立 (I) 型压缩型映象的不动点的存在定理．

此外，据引理 3，结合[11]中的结论，易知：

定理 4　若 X 为一致凸的 Banach 空间，K 为 X 中的非空闭凸子集，T 是 $K\to K$ 的(I)型压缩型映象．

从任意初始 $x_1\in K$ 出发的正规 Mann 迭代

$$x_{n+1}=(1-t_n)x_n+t_nTx_n, \quad \forall n\geqslant 1$$

这里 $t_n\in[a, b], \quad 0<a\leqslant b<1$

有性质

(1) 假设 T 在 K 中有不动点，则

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任意弱聚点是 T 的不动点.

(2) 假设 T 在 K 中有唯一不动点 z, 则 $x_n\xrightarrow{w}z$.

证明 由于 (I) 型映象是伪非扩张的，由[11]中定理4知，$x_n-Tx_n=(I-T)x_n\to 0$; 又因 T 在 K 中的不动点集非空，故 $\{x_n\}$ 有界，应用引理3, (1) 即得证. 结论 (2) 是显见的. 证毕.

定理5 在一致凸的 Banach 空间，而且还是 Opial 空间 X 中，如 K 是 X 中的非空闭凸子集，T 是 $K\to K$ 的 (I) 型压缩型映象，若 T 在 K 中有不动点，则从任意 $x_1\in K$ 出发的正规 Mann 迭代

$$x_{n+1}=(1-t_n)x_n+t_nTx_n, \quad \forall n\geqslant 1$$

这里 $t_n\in[a, b], \quad 0<a\leqslant b<1$

满足 $x_n\xrightarrow{w}z$, z 是 T 的不动点 $z=Tz$.

证明 利用定理1证明的后半部分.

注 X 如为 Hiltert 空间，满足定理的要求.

§3. 集合值映象的不动点定理

关于集合值的压缩映象，非扩张映象以及压缩型映象的一些讨论可参见[12], [9], 和 [13]

定义5 在距离空间 (X, d) 中引入

集合族 $CL(X)=\{A;\ A$ 是 X 中的非空闭子集$\}$

$K(X)=\{A;\ A$ 是 X 中的非空紧子集$\}$

点 x 与集合 A 的距离

$$D(x, A)=\inf_{a\in A} d(x, a)$$

X 中两个闭集 A 和 B 之间的广义 Hausdorff 距离是

$$H(A, B)=\begin{cases}\inf\{\varepsilon>0;\ A\subset V_\varepsilon(B),\ B\subset V_\varepsilon(A)\} & \text{如这 inf 存在;}\\ \infty & \text{否则.}\end{cases}$$

其中 $V_\varepsilon(B)=\{x;\ D(x, B)\leqslant\varepsilon\}$.

广义距离是指除距离可取无穷值之外，具有通常距离的性质.

所谓 x 是集合值映象 T 的不动点，指 $x\in Tx$.

首先我们考虑从 X 到 $CL(X)$ 的集合值压缩型映象对 S, T, 即它们满足条件

$$\text{(III)}\quad H(Tx, Sy)\leqslant h\max\Big\{d(x, y),\ D(x, Tx),\ D(y, Sy),\ \frac{1}{2}[D(x, Sy)+D(y, Tx)]\Big\},\ \forall x, y\in X.$$

其中 $h<1$ 是正常数.

定理 6　(X, d) 是完备距离空间, T, S 是从 $X\to CL(X)$ 满足 (III) 的集合值压缩型映象对, 那么

S, T 有公共不动点 $z\in Tz\cap Sz$

而且从任意点 $x_0\in X$ 出发, 可构造序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使 $x_n\to z$.

证　对 $x_0\in X$, 任取 $x_1\in Tx_0$, 据 Hausdorff 距离的定义, 可以取 $x_2\in Sx_1$, 使之满足

$$d(x_1, x_2)\leqslant aH(Tx_0, Sx_1)$$

其中

$$1<a<\frac{1}{h}.$$

对 $n\geqslant 1$ 归纳地取

$$x_{2n+1}\in Tx_{2n} \text{ 满足 } d(x_{2n}, x_{2n+1})\leqslant aH(Sx_{2n-1}, Tx_{2n})$$

$$x_{2n+2}\in Sx_{2n+1} \text{ 满足 } d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\leqslant aH(Tx_{2n}, Sx_{2n+1})$$

于是

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\leqslant aH(Tx_{2n}, Sx_{2n+1})\leqslant ah\max\Big\{d(x_{2n}, x_{2n+1}), D(x_{2n}, Tx_{2n}), D(x_{2n+1}, Sx_{2n+1}), \frac{1}{2}D(x_{2n}, Sx_{2n+1})\Big\}$$

因 $ah<1$ 易验有

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\leqslant ahd(x_{2n}, x_{2n+1}),\quad \forall n\geqslant 0 \tag{12}$$

同样

$$d(x_{2n}, x_{2n+1})\leqslant ahd(x_{2n-1}, x_{2n}),\quad \forall n\geqslant 1 \tag{13}$$

所以

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\leqslant (ah)^{2n}d(x_1, x_2)$$

$$d(x_{2n}, x_{2n+1})\leqslant (ah)^{2n}d(x_0, x_1)$$

(X, d) 是完备距离空间, $ah<1$. 所以 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是基本列

$$x_n\to z\in X$$

这时

$$D(z, Tz)\leqslant d(z, x_{2n+2})+D(x_{2n+2}, Tz)\leqslant d(z, x_{2n+2})+H(Sx_{2n+1}, Tz)$$

而

$$\begin{aligned}H(Sx_{2n+1}, Tz)&\leqslant h\max\Big\{d(x_{2n+1}, z), D(x_{2n+1}, Sx_{2n+1}), D(z, Tz), \frac{1}{2}[D(x_{2n+1}, Tz)+D(z, Sx_{2n+1})]\Big\}\\ &\leqslant h\max\Big\{d[x_{2n+1}, z), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), D(z, Tz), \frac{1}{2}[D(x_{2n+1}, Tz)+d(z, x_{2n+2})]\Big\}\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 从上式得

$$D(z, Tz)\leqslant hD(z, Tz)$$

$$h<1 \quad \text{则} \quad z\in Tz$$

同样可证

$$z\in Sz, \quad \text{则} \quad z\in Tz\cap Sz,$$

证毕

注　容易验证 $d(x_n, z)\leqslant\frac{(ah)^{n-1}}{1-ah}(d(x_0, x_1)+d(x_1, x_2))$

以下对 $X\to K(X)$ 的集合值压缩型映象 T

(IV)

$$H(Tx, Ty)<\max\Big\{\{d(x, y), D(x, Tx), D(y, Ty), \frac{1}{2}[D(x, Ty)+D(y, Tx)]\Big\},\quad \forall x, y\in X, x\neq y$$

建立不动点定理.

定义6 对 $X\to K(X)$ 的集合值映象 T 和 $x_0\in X$, 可取 $x_1\in Tx_0$ 使之

$$d(x_0,\ x_1)=D(x_0,\ Tx_0),$$

一般地, 取 $x_{n+1}\in Tx_n$, 使 $d(x_n,\ x_{n+1})=D(x_n,\ Tx_n)$. 称 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 T 在 x_0 点的轨道, 记成 $O_K(T;\ x_0)$.

定理7 设 $(X,\ d)$ 是完备距离空间, T 是 $X\to K(X)$ 的 (IV) 型压缩型集合值映象, 而且 T 从 $(X,\ d)$ 到 $(K(X),\ H(\cdot,\ \cdot))$ 是连续的. 如果存在点 $x_0\in X$, 轨道

$$O_K(T,\ x_0)=\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$$

有聚点 z, 则 z 是 T 的不动点 $z\in Tz$.

证 若对某个 k, $x_k=x_{k+1}$, 那么 $x_{n+1}=x_n$, $x_n\in Tx_n$ 对于 $n\geqslant k$ 成立. 所以假定 $x_n\neq x_{n+1}$, $\forall n\geqslant 0$, 于是

$$\begin{aligned}d(x_n,\ x_{n+1})=D(x_n,\ Tx_n)&\leqslant H(Tx_{n-1},\ Tx_n)\\&<\max\Big\{d(x_{n-1},\ x_n),\ D(x_{n-1}Tx_{n-1}),\ D(x_n,\ Tx_n),\\&\qquad\frac{1}{2}[D(x_{n-1},Tx_n)+D(x_n,Tx_{n-1})]\Big\},\quad \forall n\geqslant 1\end{aligned}$$

注意定义6中序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的取法, 易知有

$$d(x_n,\ x_{n+1})<d(x_{n-1},\ x_n),\quad \forall n\geqslant 1 \tag{14}$$

当 $n\to\infty$ 时, $d(x_n,\ x_{n+1})$ 有极限 $r\geqslant 0$.

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 有聚点 z, 即有子列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $x_{n_i}\to z$, $i\to\infty$ 注意 对任意 A_1, $A_2\in CL(X)$; $x\in X$ 有

$$|D(x,\ A_1)-D(x,\ A_2)|\leqslant H(A_1,\ A_2) \tag{15}$$

这是因为 $D(x,\ A_1)\leqslant d(x,\ y)+D(y,\ A_1)\leqslant d(x,\ y)+H(A_1,\ A_2)$, $\forall y\in A_2$.

所以
$$D(x,\ A_1)\leqslant D(x,\ A_2)+H(A_1,\ A_2)$$

再用 $H(A_1,\ A_2)$ 对 A_1, A_2 的对称性, 即得(15)式.

利用关系(15)易知

$$d(x_{n_i},\ x_{n_i+1})\to D(z,\ Tz) \tag{16}$$

事实上
$$d(x_{n_i},\ x_{n_i+1})=D(x_{n_i},\ Tx_{n_i})$$
$$|D(x_{n_i},\ Tx_{n_i})-D(x_{n_i},\ Tz)|\leqslant H(Tx_{n_i},\ Tz)$$

由 T 的连续性, 上式当 $i\to\infty$ 时右端 $\to 0$, (16)式得证.

因为 $D(x_{n_i+1},\ Tz)\leqslant H(Tx_{n_i},\ Tz)\to 0$ 当 $i\to\infty$ 时及 $T_z\in K(X)$,

存在 $z_{n_i}\in Tz$
$$d(x_{n_i+1},\ z_{n_i})\to 0,\quad 当\ i\to\infty\ 时$$

再用 Tz 的紧性, 存在子列 $\{z_{n_{i_k}}\}_{k=1}^{\infty}$

$$z_{n_{i_k}}\to z_1\in T_z,\quad 当\ k\to\infty\ 时$$

于是
$$d(x_{n_{i_k}+1},\ z_1)\to 0,\quad 当\ k\to\infty\ 时$$

重复(16)的证明, 可知

$$d(x_{n_{i_k}+1},\ x_{n_{i_k}+2})\to D(z_1,\ Tz_1)$$

但由 $d(x_n,\ x_{n+1})\to r$ 以及 $d(x_{n_{i_k}},\ x_{n_{i_k}+1})\to d(z,\ z_1)$

得
$$r=D(z,\ Tz)=D(z_1,\ Tz_1)=d(z,\ z_1) \tag{17}$$

由此可断言 $$z=z_1\in Tz.$$

事实上，如 $z\neq z_1$ 应用条件 IV

$$D(z_1, Tz_1)\leqslant H(Tz, Tz_1)$$
$$<\max\left\{d(z, z_1), D(z, Tz), D(z_1, Tz_1), \frac{1}{2}[D(z_1, Tz)+D(z, Tz_1)]\right\}$$

得出 $$r=D(z_1, Tz_1)<D(z, Tz)=r$$ 矛盾

证毕.

定理 8 设 X 是自反 Opial 空间，K 为 X 中非空弱闭子集，T 是 $X\to K(X)$ 的集合值压缩型映象，满足

$$H(Tx, Ty)\leqslant a(x, y)\|x-y\|+b(x, y)[D(x, Tx)+D(y, Ty)]$$
$$+c(x, y)[D(x, Ty)+D(y, Tx)], \quad \forall x, y\in X \tag{18}$$

这里 $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ 是依赖于 x, y 的非负数

且 $$a(x, y)+2b(x, y)+2c(x, y)\leqslant 1, \quad \forall x, y\in X$$

如果存在 $x_0\in K$，轨道 $O_K(T, x_0)$ 有界

且(4)式成立 $$\beta=\inf_{y,z\in O_K(T,x_0)} c(y, z)>0$$

那么 T 在 K 中有不动点 $z\in Tz$.

证　同引理 2，对轨道 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 容易验证有以下关系成立

$$\|x_n-x_{n+1}\|\leqslant\|x_{n-1}-x_n\|, \quad \forall n\geqslant 1 \tag{19}$$

$$\|x_n-x_{n+1}\|\leqslant\|x_m-x_{m+1}\|+c^{(k)}\{D(x_{n-k}, Tx_n)-(k+1)\|x_m-x_{m+1}\|\} \tag{20}$$

这里 $$c^{(k)}=c(x_{n-1}, x_n)c(x_{n-2}, x_n)\cdots c(x_{n-k}, x_n)$$
$$n\geqslant m, \quad 0\leqslant k\leqslant n-m,$$

并且当 $n\to\infty$ 时 $$\|x_n-x_{n+1}\|\to 0$$

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 有界，所以存在子列 $\{x_{n_k}\}$: $x_{n_k}\xrightarrow{w}z$.

考察 $D(x_{n_k}, T_z)\leqslant\|x_{n_k}-x_{n_k+1}\|+D(x_{n_k+1}, Tz)\leqslant\|x_{n_k}-x_{n_k+1}\|+H(Tx_{n_k}, Tz)$

而 $$H(Tx_{n_k}, Tz)\leqslant a\|x_{n_k}-z\|+b[\|x_{n_k}-x_{n_k+1}\|+D(z, Tz)]$$
$$+c[D(x_{n_k}, Tz)+D(z, Tx_{n_k})]$$

这里 a, b, c, 均指它们在 (x_{n_k}, z) 处的值.

从而 $$H(Tx_{n_k}, Tz)\leqslant a\|x_{n_k}-z\|+b\|x_{n_k}-x_{n_k+1}\|+b[D(x_{n_k}, Tz)+\|x_{n_k}-z\|]$$
$$+c[D(x_{n_k}, Tz)+\|z-x_{n_k}\|+\|x_{n_k}-x_{n_k+1}\|]$$

得

$$D(x_{n_k}, Tz)\leqslant\frac{a+b+c}{1-b-c}\|x_{n_k}-z\|+\frac{1+b+c}{1-b-c}\|x_{n_k}-x_{n_k+1}\|$$
$$\leqslant\|x_{n_k}-z\|+3\|x_{n_k}-x_{n_k+1}\| \tag{21}$$

因为 T_z 紧，存在 $z_k\in Tz$，满足

$$D(x_{n_k}, Tz)=\|x_{n_k}-z_k\|, \quad z_k\to z_\infty\in Tz.$$

从而 $$\|x_{n_k}-z_\infty\|\leqslant\|x_{n_k}-z_k\|+\|z_k-z_\infty\|\leqslant\|x_{n_k}-z\|+3\|x_{n_k}-x_{n_k+1}\|+\|z_k-z_\infty\|$$

于是 $$\overline{\lim_{k\to\infty}}\|x_{n_k}-z_\infty\|\leqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}\|x_{n_k}-z\|$$

由 Opial 空间的性质 $z=z_\infty\in Tz$　　证毕.

容易看出.

定理9 定理8中 X 如果是可分空间的共轭, *-Opial空间, K 是 X 中非空弱*闭子集,则相应的结论仍然成立.

参考文献

[1] F. E. Browder, Non-expansive nonlinear operators in a Banach space, *Proc. Nat. Acad. Sci.* U. S. A., **54** (1965), 1041—1044.

[2] W. A. Kirk, A fixed point theorem for mappings which do not increase distance., *Amer. Math. Monthly* **72** (1965), 1004—1006.

[3] Z. Opial, Weak convergence of the sequence of successive approximations for non-expansive mappings., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 591—597.

[4] S. Ishikawa, Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **59** (1976), 65—71.

[5] L. A. Karlovitz, On nonexpansive mappings., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **55** (1976), 321—325.

[6] L. A. Karlovitz, Existence of fixed points of nonexpansive mappings in a space without normal structure., *Pacific J. Math.*, **66** (1976), 153—159.

[7] B. E. Rhoades, A comparison of various definitions of contractive mappings., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **226** (1977), 257—290.

[8] 赵汉章,平均非扩张映象的不动点定理,数学学报, **22**:4 (1979), 459—470.

[9] E. L. Dozo, Multivalued nonexpansive mappings and Opial's condition., *Proc. Amer. Math. Soc.*, **38** (1973), 286—292.

[10] F. E. Browder, Semicontractive and semiaccretive nonlinear mappings in Banach spaces., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968), 660—665.

[11] W. G. Doston Jr., On the Mann iterative process., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **149** (1970), 65—73.

[12] S. B. Nadler Jr., Multivalued contraction mappings., *Pacific J. Math.*, **30** (1969), 475—488.

[13] B. K. Ray, On nonexpansive mappings in a metric space., *Nanta, Math.*, **7** (1974), 86—92.

[14] H. W. Engl, Weak convergence of mann iteration for nonexpansive mappings without convexity assumption., *Boll. U. M. I.* (5)14-A (1977), 471—475.

SOME FIXED POINT THEOREMS OF CONTRACTIVE TYPE MAPPINGS

Ni Luqun Yao Jingqi Zhao Hanzhang
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

1. Let X be the conjugate of a separable Banach space satifying the $*$-Opial condition, i. e., if $\{x_n\}\subset x$, $x_n\xrightarrow{w^*}x_\infty$, $x_\infty\neq y$, then

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\|x_n-x_\infty\|<\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\|x_n-y\|.$$

for rxample $X=l_1$.

Let K be a nonempty weak* closed convex subset of X.

The main results are:

Theorem 1. Suppose T is a continuous mappings of K into itself such that for every $x,\ y\in K$, $\|Tx-Ty\|\leqslant a\|x-y\|+b\{\|x-Tx\|+\|y-Ty\|\}+c\{\|x-Ty\|+\|y-Tx\|\}$ where real numbers $a,\ b,\ c\geqslant 0$ and $a+2b+2c=1$. Suppose also K is bounded.

Then T has at least one fixed point in K.

Theorem 2. Let T be a mapping of K into itself, and $a(x,\ y)$, $b(x,\ y)$, $c(x,\ y)$ be real functions such that for all $x,\ y\in K$

$$\|Tx-Ty\|\leqslant a(x,\ y)\|x-y\|+b(x,\ y)\{\|x-Tx\|+\|y-Ty\|\}$$
$$+c(x,\ y)\{\|x-Ty\|+\|y-Tx\|\}$$

and
$$a(xy,\ y)+2b(x,\ y)+2c(x,\ y)\leqslant 1$$

Suppose there exists $x\in K$, such that $O(x)=\{T^nx\}_{n=\infty}^{\infty}$ is bounded and

$$\inf_{y,z\in O(x)} c(y,\ z)>0$$

Then T has at least one fixed point z in K and $T^nx\xrightarrow{w^*}z$.

2. We denote $CL(x)=\{A;$ nonempty closed subset of X$\}$

$$K(x)=\{A;\ \text{nonempty compact subset of } x\}$$

here X is a complete metric space with metric d.

On $CL(X)$ and $K(X)$ we introduce the generalized Hausdorff distance $H(,)$.

The main results are:

Theorem 3. Suppose $\{T,\ S\}$ is a pair of set-valued mappings of X into $CL(X)$, which satisfies the following condition:

$$H(Tx,\ Sy)\leqslant \text{h Max}\left\{d(x,\ y),\ D(x,\ Tx),\ D(y,\ Sy),\ \frac{1}{2}[D(x,\ Sy)+D(y,\ Tx)]\right\}$$

for each $x,\ y\in X$, where $0<h<1$.

Then T and S have a common fixed point $z\in Tz\cap Sz$.

Theorem 4. Let set-valued mapping T: $(X, d)\to(K(X), H)$ be continuous and such that

$$H(Tx, Ty)<\mathrm{Max}\left\{d(x, y), D(x, Tx), D(y, Ty), \frac{1}{2}[D(x, Ty)+D(y, Tx)]\right\}$$

holds for each $x, y\in X$, $x\neq y$

If there exists $x_0\in X$ and one of its orbit sequences $O(T; x_0)=\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

(where $x_{n+1}\in Tx_x$, $d(x_{n+1}, x_n)=D(x_n, Tx_n)$)

has a cluster point, say z.

Then T has at least one fixed point $z\in Tz$.