数 学 年 刊
1 (1) 1980

关于丢番图方程 $x^4-Dy^2=1$ (II)

柯 召 孙 琦
(四川大学)

关于丢番图方程

$$x^4-Dy^2=1,\ D>0\ \text{且不是平方数}. \tag{1}$$

Ljunggren, Cohn 和本文作者都有过不少工作，现简述如下：

1．1942 年，Ljunggren[1] 证明了丢番图方程 (1) 最多只有二组正整数解 (x, y).

2．1966 年，Ljunggren[1] 还证明了 $D=p$ 是一个奇素数时，则方程 (1) 在 $p\neq 5, 29$ 时，没有正整数解，而在 $p=5$ 时，仅有正整数解 $(x, y)=(3, 4)$，在 $p=29$ 时，仅有正整数解 $(x, y)=(99, 1820)$.

3．1966 年和 1967 年，Cohn[2] 和 Bumby[3] 前后各自证明了当 D 使得方程 $x^2-Dy^2=-4$ 有整数解 $x\equiv y\equiv 1 \pmod 2$ 时，则 (1) 除开前面所提到的两组解外，没有其他的正整数解.

4．1967 年，Cohn[4] 证明了当 D 使得 $x^2-Dy^2=-4$ 没有解，而使 $x^2-Dy^2=4$ 有整数解 $x\equiv y\equiv 1 \pmod 2$ 时，则丢番图方程 (1) 除开 $D=725$ 仅有解 $(x, y)=(99, 364)$ 外，无其他的正整数解.

5．1975 年，我们[5]证明了，如果 $D\equiv 3 \pmod 8$，且当 $x^2-Dy^2=1$ 的基本解 $x_0+y_0\sqrt{D}$ 满足 $2|x_0$ 时，则 (1) 无正整数解.

6．1976 年，Cohn[6] 证明了，如果 D 使得 $x^2-Dy^2=2$ 或 -2 之一有整数解，则方程 (1) 除开 $D=6$ 有解 $(x, y)=(7, 20)$ 外，无其他的正整数解.

7．1978 年，我们[7]证明了，如果 $D\equiv 7 \pmod 8$，$D=pq$，p，q 是不同的素数，则在 $p\equiv 1 \pmod 8$，$q\equiv 7 \pmod 8$，$\left(\frac{q}{p}\right)=-1$ 或 $p\equiv 13 \pmod{24}$，$q\equiv 3 \pmod 8$，$\left(\frac{q}{p}\right)=-1$ 时，方程 (1) 均无正整数解.

8．1978 年，我们[8]还证明了，如果 $D=pq$，p，q 是不同的素数，则在 $p\equiv 17 \pmod{24}$，$q\equiv 3 \pmod 8$ 时，或 $p\equiv 5 \pmod{24}$，$q\equiv 23 \pmod{24}$ 时，或 $p\equiv 5 \pmod{24}$，$q\equiv 3 \pmod 8$，$\left(\frac{p}{q}\right)=1$ 时，方程 (1) 均无正整数解.

9．最近，我们[9]证明了 $D=2p$，p 是一个奇素数，则方程 (1) 除开 $p=3$，$x=7$，$y=20$ 外，无其他的正整数解.

综上所述，可以看出，Cohn 所有的结果，对方程 (1) 中的 D 的限制比较强，如文 [3, 4] 仅仅解决了 $D\equiv 5 \pmod 8$ 的一部分．Cohn 在文 [4] 中曾经希望对另外的 D 给出 (1) 的

本文 1979 年 10 月 3 日收到.

解答，他认为这将是十分困难的．虽然，用 Baker 的“有效方法”，对于给定的 D，可以给出(1)的解的上界，但是这个界往往太大，以致难以算出它的全部解，而且 Baker 的方法不能解决无穷多个 D 的情形．我们在文[5, 7, 8, 9]中，对于许多类型的 D(每类都有无穷多个)，给出了(1)的全部整数解．

本文将给出更为一般的结果：

定理 1 设 $D\not\equiv 7 \pmod 8$，$D=p_1p_2\cdots p_s$，$s\geqslant 2$，$p_i(i=1,\cdots,s)$ 是不同的奇素数，则当

(1) $p_1\equiv 1 \pmod 4$，且 $2p_1=a^2+b^2$，$a\equiv \pm 3 \pmod 8$，$b\equiv \pm 3 \pmod 8$ 或对某个 j，$2\leqslant j\leqslant s$，$\left(\frac{p_j}{p_1}\right)=-1$，这里 $\left(\frac{p_j}{p_1}\right)$ 表示 Legendre 符号，和(2) $p_i\equiv 7 \pmod 8$ $(i=2,\cdots,s)$ 或 $p_i\equiv 3 \pmod 8$ $(i=2,\cdots,s)$ 时，方程(1)无正整数解．

定理 2 设 $D=p_1p_2\cdots p_s$，$s\geqslant 2$，$p_i\equiv 3 \pmod 4$ $(i=1,\cdots,s)$ 是不同的奇素数，则方程(1)无正整数解．

定理 3 设 $D=2p_1p_2\cdots p_s$，$s\geqslant 2$，p_i $(i=1,\cdots,s)$ 是不同的奇素数，则当

(1) $p_1\equiv 1 \pmod 4$，$p_i\equiv 7 \pmod 8$ $(i=2,\cdots,s)$，且 $2p_1=a^2+b^2$，$a\equiv \pm 3 \pmod 8$，$b\equiv \pm 3 \pmod 8$ 或对某个 j，$2\leqslant j\leqslant s$，$\left(\frac{p_j}{p_1}\right)=1$ 时，

或(2) $p_1\equiv 5 \pmod 8$，$p_i\equiv 3 \pmod 8$ $(i=2,\cdots,s)$ 时，

或(3) $p_1\equiv 5 \pmod 8$，$p_i\equiv 7 \pmod 8$ $(i=2,\cdots,s)$ 时，

方程(1)均无正整数解．

定理 4 设 $D=2p_1\cdots p_s$，$s\geqslant 2$，$p_i\equiv 3 \pmod 4$ $(i=1,\cdots,s)$，则方程(1)无正整数解．

下面给出以上四个定理的证明．

定理 1 的证明：

如果(1)有解 $x\equiv 0 \pmod 2$，由(1)得 $D\equiv 7 \pmod 8$，与所设条件不合．

现设 $2\nmid x$，$(x^2-1, x^2+1)=2$，(1)给出

$$x^2+1=2u^2,\quad x^2-1=2D(2v)^2,\quad y=4uv. \tag{2}$$

或

$$x^2+1=2p_1u^2,\quad x^2-1=2p_2\cdots p_s(2v)^2,\quad y=4uv. \tag{3}$$

由(2)式得出

$$u^2-D(2v)^2=1. \tag{4}$$

由(4)可得

$$u+1=2lt^2,\quad u-1=2ks^2,\quad D=lk,\quad v=ts,\quad (l,k)=1,\quad (t,s)=1. \tag{5}$$

将 $u=2lt^2-1$ 代入 $x^2+1=2u^2$ 可得

$$(4lt^2-1+x)(4lt^2-1-x)=8l^2t^4. \tag{6}$$

设 $(4lt^2-1+x, 4lt^2-1-x)=\delta$，故 $\delta|2x$，而 $2\nmid x$，如果有 $r|\delta$，$r|x$，则由(6)得 $r|l$ 或 $r|t$，得出 $r|1$．因此，$\delta=2$，(6)给出

$$4lt^2-1\pm x=2e^2m^4,\quad 4lt^2-1\mp x=4f^2n^4,\quad mn=t,\quad ef=l. \tag{7}$$

其中 $(m,n)=1$，$(e,f)=1$，由(7)可得

$$4efm^2n^2-1=e^2m^4+2f^2n^4$$

即
$$(2fn^2-em^2)^2+1=2f^2n^4. \tag{8}$$
因为 $f|D$, 由(8)式知 $f=1$ 或 $f=p_1$.

对于 $f=1$ 的情形, (8) 给出
$$(2n^2-lm^2)^2+1=2n^4. \tag{9}$$
熟知[10], 丢番图方程 $y^2+1=2x^4$ 仅有两组正整数解$(x, y)=(1, 1)$和$(13, 239)$, 故(9)仅有整数解 $n=\pm1$, $2n^2-lm^2=\pm1$, 以及 $n=\pm13$, $2n^2-lm^2=\pm239$. 当 $n=\pm1$ 时, $lm^2=1$ 或 3, 前者给出 $l=1$, $m=\pm1$, 代入(7)得 $x=\pm1$, 故此时方程 (1) 无正整数解 x, y, 后者给出 $l=3$, $m=\pm1$, 代入(7)得 $x=\pm7$, 此时方程(1)给出 $D=6$, $y=\pm20$, 此非方程(1)在定理1所设条件下的解. 当 $n=\pm13$ 时, $lm^2=99$ 或 577, 前者得出 $l=11$, $m=\pm3$, $n=\pm13$, 代入(7)得 $x=\pm47321$, 再代入(2)得

$47321^2+1=2\cdot33461^2$, $47321^2-1=2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13^2\cdot239=2D(2v)^2$, 因为 $2\nmid D$, 此非方程 (1) 在定理 1 所设条件下的解. 后者得出 $l=577$, $m=\pm1$, $n=\pm13$, 代入 (7) 得 $x=\pm275807$, 由 (2), $275807^2-1=2^6\cdot3\cdot13^2\cdot17\cdot239\cdot577$, 而 $17\equiv577\equiv1 \pmod 4$, 仍然不是方程(1)在定理1所设条件下的解.

对于 $f=p_1$ 的情形, (8) 给出
$$4ep_1m^2n^2-1=e^2m^4+2p_1^2n^4. \tag{10}$$
如果 $e=1$, (10)给出
$$m^4-1=2(m^2-p_1n^2)^2. \tag{11}$$
熟知, 方程 $x^4-2y^2=1$ 仅有整数解 $x=\pm1$, $y=0$, 故(11)不可能.

如果 $e>1$, 由(10)知至少存在一个素数 p_j $(2\leqslant j\leqslant s)$, 使得 $\left(\frac{-2}{p_j}\right)=1$, 即
$$\left(\frac{2}{p_j}\right)=-1. \tag{12}$$
如果所有的 $p_i\equiv7 \pmod 8$ $(i=2, \cdots, s)$, 这将与(12)矛盾. 如果所有的 $p_i\equiv3 \pmod 8$ $(i=2, \cdots, s)$ 时, 则由(5), $u=2ks^2+1$, 代入 $x^2+1=2u^2$ 可得
$$(4ks^2+1+x)(4ks^2+1-x)=8k^2s^4,$$
由此可得
$$4ks^2+1\pm x=2e_1^2m_1^4,\quad 4ks^2+1\mp x=4f_1^2n_1^4,\quad e_1f_1=k,\quad m_1n_1=s, \tag{13}$$
其中 $(e_1, f_1)=1$, $(m_1, n_1)=1$, 由(13)可得
$$4e_1f_1m_1^2n_1^2+1=e_1^2m_1^4+2f_1^2n_1^4. \tag{14}$$
如果 $e_1=1$, 则由(14)得
$$m_1^4+1=2(m_1^2-f_1n_1^2)^2. \tag{15}$$
熟知, 方程 $x^4+y^4=2z^2$ 仅有整数解 $x=\pm1$, $y=\pm1$, 故(15)式仅有解 $m_1=\pm1$, $1-f_1n_1^2=\pm1$, 易知, 此时方程 (1) 无正整数解. 当 $e_1>1$ 时, 由 $(l, k)=1$ 和 (14) 知至少存在一个素数 $p_j(2\leqslant j\leqslant s)$, 使
$$\left(\frac{2}{p_j}\right)=1. \tag{16}$$
此与 $p_j\equiv3 \pmod 8$ $(j=2, \cdots, s)$ 矛盾.

以上证明了在定理1的条件下，(2)式不可能.

由于当 $2p_1=a^2+b^2$, $a\equiv\pm3 \pmod 8$, $b\equiv\pm3 \pmod 8$ 时，则 $x^2+1=2p_1u^2$ 无整数解*，即(3)式不可能；或者当有某个 $p_j\ (2\leqslant j\leqslant s)$，使 $\left(\frac{p_j}{p_1}\right)=-1$ 时，由(3)得

$$p_1u^2-p_2\cdots p_s(2v)^2=1. \tag{17}$$

对(17)式取模 p_j，得

$$(p_1u)^2\equiv p_1 \pmod{p_j},$$

故 $\left(\frac{p_1}{p_j}\right)=\left(\frac{p_j}{p_1}\right)=1$，与所设 $\left(\frac{p_j}{p_1}\right)=-1$ 不合，此时(3)也不成立. 证毕.

推论 设 $D=15D_1$, $D_1\not\equiv1 \pmod 8$, D_1 的任一素因数都是 $8k+3$ 的形状，则方程(1)无正整数解.

很明显，这个推论指出，适合定理1的条件的 D 有无穷多个.

理定2的证明：

当 $x\equiv0 \pmod 2$ 时，$(x^2-1,\ x^2+1)=1$，(1)给出

$$x^2-1=Du^2,\quad x^2+1=v^2,\quad uv=y. \tag{18}$$

由 $x^2+1=v^2$，给出 $x+v=\pm1$, $x-v=\mp1$，得 $x=0$，故此时方程(1)无正整数解.

当 $x\equiv1 \pmod 2$ 时，由(1)得

$$x^2+1=2u^2,\quad x^2-1=2D(2v)^2,\quad y=4uv. \tag{19}$$

再由(19)得

$$u^2-D(2v)^2=1. \tag{20}$$

(19)、(20)与(2)、(4)形状相同，类似定理1的证法可证此时方程(1)仍无正整数解.

证毕.

定理3的证明：

由(1)知 $x\equiv1 \pmod 2$，把(1)写成

$$(x^2+1)(x^2-1)=2hy^2,\quad h=p_1p_2\cdots p_s. \tag{21}$$

因为 $(x^2+1,\ x^2-1)=2$，由(21)可得

$$x^2-1=2p_2\cdots p_su^2,\quad x^2+1=4p_1v^2,\quad y=2uv. \tag{22}$$

或

$$x^2-1=4p_2\cdots p_su^2,\quad x^2+1=2p_1v^2,\quad y=2uv. \tag{23}$$

或

$$x^2-1=2hu^2,\quad x^2+1=4v^2,\quad y=2uv. \tag{24}$$

或

$$x^2-1=4hu^2,\quad x^2+1=2v^2,\quad y=2uv. \tag{25}$$

因为 $x^2+1\equiv2 \pmod 8$，故(22)和(24)不能成立.

由(23)的第二式知当 $2p_1=a^2+b^2$, $a\equiv\pm3 \pmod 8$, $b\equiv\pm3 \pmod 8$ 时无解. 又由(23)得 $p_1v^2-2p_2\cdots p_su^2=1$，故当存在某个 $p_j(2\leqslant j\leqslant s)$，使 $\left(\frac{p_j}{p_1}\right)=-1$ 时，(23)不可能. 当 $p_1\equiv5 \pmod 8$ 时，如有某个 $p_j(2\leqslant j\leqslant s)$，使 $\left(\frac{p_j}{p_1}\right)=-1$，则(23)不能成立，否则

* 这是文[11]中的结果，实际上，用高斯整数的性质，可以给出一个简短的证明.

有 $\left(\frac{p_2\cdots p_s}{p_1}\right)=1$, 而 $\left(\frac{-2}{p_1}\right)=-1$, 故(23)仍不成立.

由(25)可得

$$v^2-1=2hu^2. \tag{26}$$

由(26)可得

$$v-1=4h_1u_1^2,\ v+1=2h_2u_2^2,\ h=h_1h_2,\ u=2u_1u_2. \tag{27}$$

或

$$v-1=2h_1u_1^2,\ v+1=4h_2u_2^2,\ h=h_1h_2,\ u=2u_1u_2. \tag{28}$$

对于(27), 将 $v=4h_1u_1^2+1$ 代入 $x^2+1=2v^2$, 可得

$$(8h_1u_1^2+1)^2-x^2=32h_1^2u_1^4,$$

由于 $(8h_1u_1^2+1-x,\ 8h_1u_1^2+1+x)=2$, 上式给出

$$8h_1u_1^2+1\pm x=2h_3^2u_3^4,\ 8h_1u_1^2+1\mp x=16h_4^2u_4^4,\ h_1=h_3h_4,\ u_1=u_3u_4, \tag{29}$$

由(29)得

$$8h_3h_4u_3^2u_4^2+1=h_3^2u_3^4+8h_4^2u_4^4. \tag{30}$$

如果 $h_3=1$, (30)给出

$$u_3^4+1=2(u_3^2-2h_4u_4^2)^2,$$

故上式仅有解 $u_3=\pm1$, $u_4=0$ 和 $u_3=\pm1$, $h_4=1$, $u_4=\pm1$, 前者非方程(1)的正整数解, 后者得出 $7^4-1=6\cdot20^2$, 但 6 无 $4n+1$ 形状的素因数, 故非定理 3 所设条件下的解.

如果 $h_3>1$, 由(30)知, 存在某个 $j\ (1\leqslant j\leqslant s)$, 使 $\left(\frac{2}{p_j}\right)=1$, 故与 $p_1\equiv5\ (\mathrm{mod}\ 8)$ 和 $p_j\equiv3\ (\mathrm{mod}\ 8)$ $(j=2,\ \cdots,\ s)$ 矛盾.

如果 $p_j\equiv7\ (\mathrm{mod}\ 8)$ $(j=2,\ \cdots,\ s)$ 则将 $v=2h_2u_2^2-1$ 代入 $x^2+1=2v^2$, 可得

$$(4h_2u_2^2-1+x)(4h_2u_2^2-1-x)=8h_2^2u_2^4.$$

故得

$$4h_2u_2^2-1\pm x=2h^2u_5^4,\ 4h_2u_2^2-1\mp x=4h^2u_6^4,\ h_2=h_5h_6,\ u_2=u_5u_6. \tag{31}$$

由(31)得

$$2h_6^2u_6^4=(2h_6u_6^2-h_5u_5^2)^2+1. \tag{32}$$

故 $h_6=1$ 或 $h_6=p_1$, 如果 $h_6=1$, (32)给出

$$2u_6^4=(2u_6^2-h_5u_5^2)^2+1.$$

得出 $u_6=\pm1$, $2u_6^2-h_5u_5^2=\pm1$, 和 $u_6=\pm13$, $2u_6^2-h_5u_5^2=\pm239$, 由计算知, 均无定理 3 条件下方程(1)的解. 现设 $h_6=p_1$, (32)给出

$$4h_5p_1u_5^2u_6^2-1=h_5^2u_5^4+2p_1^2u_6^4. \tag{33}$$

如果 $h_5=1$, (33)给出

$$4p_1u_5^2u_6^2-1=u_5^4+2p_1^2u_6^4.$$

即

$$u_5^4-1=2(u_5^2-p_1u_6^2)^2.$$

上式仅有解 $u_5=\pm1$, $1-p_1u_6^2=0$, 此不可能. 如果 $h_5>1$, 由(33)存在某个 $p_j\ (2\leqslant j\leqslant s)$ 使得 $\left(\frac{-2}{p_j}\right)=1$, 即 $\left(\frac{2}{p_j}\right)=-1$, 与 $p_i\equiv7\ (\mathrm{mod}\ 8)$ $(i=2,\ \cdots,\ s)$ 矛盾.

对于(28), 将 $v=4h_2u_2^2-1$ 代入 $x^2+1=2v^2$, 可得

$$(8h_2u_2^2-1)^2-x^2=32h_2^2u_2^4.$$

故有　$8h_2u_2^2-1\pm x=2h_7^2u_7^4,\ 8h_2u_2^2-1\mp x=16h_8^2u_8^4,\ h_2=h_7h_8,\ u_2=u_7u_8.$

故得

$$8h_7h_8u_7^2u_8^2-1=h_7^2u_7^4+8h_8^2u_8^4. \tag{34}$$

对(34)取模8，得出矛盾结果，故(28)不可能．证毕．

由定理3立刻得

推论　设 $D=2pq$, $p\equiv5 \pmod 8$, $q\equiv3 \pmod 4$, p, q 是素数，则方程(1)无正整数解．

定理4的证明：

由 $x\equiv1 \pmod 2$ 和(1)可得

$$x^2-1=4p_1\cdots p_su^2,\quad x^2+1=2v^2,\quad y=2uv. \tag{35}$$

或

$$x^2-1=2p_1\cdots p_su^2,\quad x^2+1=4v^2,\quad y=2uv. \tag{36}$$

(36)式显然不可能．

由(35)可得

$$v^2-2p_1\cdots p_su^2=1. \tag{37}$$

如果令 $h=p_1\cdots p_s$，由(37)仍可得(27)或(28)．对于(28)用证定理3一样的方法可证(28)不可能．对于(27)，可将 $v=2h_2u_2^2-1$，代入 $x^2+1=2v^2$，类似定理1的证法可证此时，方程(1)无正整数解．　证毕．

参考文献

[1] Ljunggren, W., Some remarks on the diophantine equations $x^2-dy^4=1$ and $x^4-dy^2=1$, *J. London Math. Soc.*, **4** (1966), 542—544.

[2] Cohn, J. H. E., Eight diophantine equations, *Proc. London Math. Soc.*, **16** (1966), 153—156.

[3] Bunby, R. T., The diophantine equation $3x^4-2y^2=1$, *Math. Scand.*, **21** (1967), 144—148.

[4] Cohn, J. H. E., Five diophantine equations, *Math. Scand.*, **21** (1967), 61—70.

[5] 柯召，孙琦，关于不定方程 $x^4-Dy^2=1$，四川大学学报(自然科学版)，1 (1975), 57—61.

[6] Cohn, J. H. E., The diophantine equation $x^4-Dy^2=1$, *Quart. J. Math. Oxford* (3), **26** (1975), 279—281.

[7] 柯召，孙琦，关于丢番图方程 $x^4-Dy^2=1$，四川大学学报(自然科学版)，1 (1979)，1—4.

[8] 柯召，孙琦，关于丢番图方程 $x^4-pqy^2=1$，科学通报，**16** (1979)，721—723.

[9] 柯召，孙琦，关于丢番图方程 $x^4-2py^2=1$ 四川大学学报(自然科学版)，4 (1979)，5—9.

[10] Mordell, L. J., Dipphantine equations, p. 271.

[11] Liewen, V. H., The Quadratic form x^2-2py^2, *Journal of Number theory*, **10** (1978), 10—15.

ON THE DIOPHANTINE EQUATION $x^4-Dy^2=1$ (II)

Ko Chao Sun Chi
(*S. Chuan University*)

ABSTRACT

For the Diophantine equation

$$x^4-Dy^2=1, \tag{1}$$

where $D>0$ and is not a perfect square, we prove the following theorems in this paper.

Theorem 1. If $D\not\equiv 7 \pmod 8$, $D=p_1p_2\cdots p_s$, $s\geqslant 2$, where p_i $(i=1, \cdots, s)$ are distinct primes, $p_1\equiv 1 \pmod 4$ such that either $2p_1=a^2+b^2$, $a\equiv\pm 3 \pmod 8$, $b\equiv\pm 3 \pmod 8$ or there is a j $(2\leqslant j\leqslant s)$, for which Legendre symbal $\left(\frac{p_j}{p_1}\right)=-1$, and $p_i\equiv 7 \pmod 8$ $(i=2, \cdots, s)$ or $p_i\equiv 3 \pmod 8$ $(i=2, \cdots, s)$, then (1) has no solutions in positive integer x, y.

Theorem 2. If $D=p_1\cdots p_s$, $s\geqslant 2$, where p_i $(i=1, \cdots, s)$ are distinct primes, and $p_i\equiv 3 \pmod 4$ $(i=1, \cdots, s)$, then (1) has no solutions in positive integer x, y.

Theorem 3. The equation (1) with $D=2p_1\cdots p_s$ has no solutions in positive integer x, y, if

(1) $p_1\equiv \pmod 4$, $p_i\equiv 7 \pmod 8$ $(i=2, \cdots, s)$, such that either $2p_1=a^2+b^2$, $a\equiv\pm 3 \pmod 8$, $b\equiv\pm 3 \pmod 8$ or there is a j $(2\leqslant j\leqslant s)$, for which $\left(\frac{p_j}{p_1}\right)=-1$;

or

(2) $p_1\equiv 5 \pmod 8$, $p_i\equiv 3 \pmod 8$ $(i=2, \cdots, s)$;

or

(3) $p_1\equiv 5 \pmod 8$, $p_i\equiv 7 \pmod 8$ $(i=2, \cdots, s)$.

Corollary of theorem 3. If $D=2pq$, $p\equiv 5 \pmod 8$, $q\equiv 3 \pmod 4$, where p, q are distinct primes, then (1) has no solutions in positive integer x, y.

Theorem 4. If $D=2p_1\cdots p_s$, $p_i\equiv 3 \pmod 4$ $(i=1, \cdots, s)$, then (1) has no solutions in positive integer x, y.