数 学 年 刊
1 (1) 1980

关于亚纯函数的值分布

庄 圻 泰
(北京大学)

引 言

在本文中，亚纯函数是指于 $|z|<+\infty$ 为亚纯的函数；非为有理函数的亚纯函数称为超越亚纯函数；几个亚纯函数称为判别的亚纯函数，如果它们的任意两个都不恒等.

在 R. Nevanlinna[1] 所建立的亚纯函数的理论中，第二基本定理

$$(q-2)T(r, f)<\sum_{j=1}^{q} N(r, a_j)-N_1(r)+S(r)$$

的重要性是大家熟知的. 1929 年他提出将 q 个值 $a_j(j=1, 2, \cdots, q)$ 换为 q 个满足条件

$$T(r, \varphi_j)=o[T(r, f)] \quad (j=1, 2, \cdots, q) \tag{1}$$

的亚纯函数 $\varphi_j(z)(j=1, 2, \cdots, q)$ 以推广这个定理的问题. 在 $q=3$ 的情形，这个问题比较容易解决. 事实上，利用辅助函数

$$F=\frac{f-\varphi_1}{f-\varphi_2}\frac{\varphi_3-\varphi_2}{\varphi_3-\varphi_1}$$

及不等式 $$T(r, F)<N\left(r, \frac{1}{F}\right)+N\left(r, \frac{1}{F-1}\right)+N(r, F)+S(r),$$

R. Nevanlinna 得出不等式

$$[1-o(1)]T(r, f)<\sum_{j=1}^{3} N\left(r, \frac{1}{f-\varphi_j}\right)+S(r). \tag{2}$$

在 q 为任意的情形，他指出，如果 $\varphi_j(z)(j=1, 2, \cdots, q)$ 为多项式，则只须略微改变一下第二基本定理的证明方法，问题即可解决. 事实上，后来 J. Dufresnoy[2] 证明：若 $f(z)$ 为一超越亚纯函数并且 $P_j(z)(j=1, 2, \cdots, q)$ 为 d 次多项式，则有不等式

$$(q-d-2)T(r, f)<\sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f-P_j}\right)+S(r). \tag{3}$$

同时，R. Nevanlinna 指出：如果只假定 $\varphi_j(z)(j=1, 2, \cdots, q)$ 满足条件(1)，问题比较难解决.

在工作[3, a]中，我研究了上述问题并得到了比较满意的结果，但未给出应用. 本文的目的是，在 q 为任意的情形，对上述问题作更进一步的研究，并且在 $q=3$ 的情形证明一个较(2)更为精确的不等式；对这两种情形都给出所得定理的一些应用. 因此本文按 $q=3$ 的情形及 q 为任意的情形分为两部分.

本文 1978 年 8 月 30 日收到.

一、$q=3$ 的情形

1. 基本定理

定义 1 设 $f(z)$ 为一亚纯函数并设 $k\geqslant 2$ 为一正整数. 我们以 $\bar{n}^{(k)}(t, f)$ 表示函数 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant t$ 重级 $<k$ 的极点的个数，每一个这样的极点只计算一次；然后于 $r>0$ 定义

$$\bar{N}^{(k)}(r, f)=\int_0^r \frac{\bar{n}^{(k)}(t, f)-\bar{n}^{(k)}(0, f)}{t}dt+\bar{n}^{(k)}(0, f)\log r.$$

另外我们定义

$$\bar{N}^{(+\infty)}(r, f)=\bar{N}(r, f)=\int_0^r \frac{\bar{n}(t, f)-\bar{n}(0, f)}{t}dt+\bar{n}(0, f)\log r,$$

其中 $\bar{n}(t, f)$ 表示函数 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant t$ 的极点的个数，每一个极点只计算一次.

容易看出，当 $r>1$ 时，有

$$\bar{N}(r, f)\leqslant \bar{N}^{(k)}(r, f)+\frac{1}{k}N(r, f),$$

更有

$$\bar{N}(r, f)\leqslant \bar{N}^{(k)}(r, f)+\frac{1}{k}T(r, f)^*, \tag{4}$$

当 $k=+\infty$ 时，这个不等式仍成立.

定理 1 设 $f(z)$ 及 $\varphi_j(z)$ $(j=1, 2, 3)$ 为四个判别的亚纯函数，并假定函数

$$F(z)=\frac{f(z)-\varphi_1(z)}{f(z)-\varphi_3(z)}\,\frac{\varphi_2(z)-\varphi_3(z)}{\varphi_2(z)-\varphi_1(z)}$$

非为常数. 设每一个 k_j $(j=1, 2, 3)$ 为一 $\geqslant 2$ 的正整数或 $+\infty$，满足

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{k_j}<1,$$

则当 $r>1$ 时，有不等式

$$\left(1-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{k_j}\right)T(r, f)<\sum_{j=1}^{3}\bar{N}^{(k_j)}\left(r, \frac{1}{f-\varphi_j}\right)+12\sum_{j=1}^{3}T(r, \varphi_j)+S(r), \tag{5}$$

其中 $S(r)>0$ 并当 $1<r<R$ 时满足

$$S(r)<12\left\{\log^+ T(R, f)+\sum_{j=1}^{3}\log^+ T(R, \varphi_j)\right\}+12\log R+9\log^+\frac{1}{R-r}+C, \tag{6}$$

其中 $C>0$ 为一常数.

证 根据第二基本定理的一种形式[1]，当 $r>1$ 时，有

$$T(r, F)<\bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right)+\bar{N}\left(r, \frac{1}{F-1}\right)+\bar{N}(r, F)+S_1(r), \tag{7}$$

其中 $S_1(r)>0$ 并当 $1<r<R$ 时满足

$$S_1(r)<12\log^+ T(R, F)+12\log R+9\log^+\frac{1}{R-r}+C_1, \tag{8}$$

其中 $C_1>0$ 为一常数.

* $m(r, f)$, $N(r, f)$, $T(r, f)$ 等符号的定义参阅[1].

容易看出，当 $r>1$ 时有

$$\bar{N}(r, F)\leqslant\bar{N}\left(r, \frac{1}{f-\varphi_3}\right)+\bar{N}(r, \varphi_1)+\bar{N}(r, \varphi_3)+\bar{N}\left(r, \frac{\varphi_2-\varphi_3}{\varphi_2-\varphi_1}\right),$$

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{F}\right)\leqslant\bar{N}\left(r, \frac{1}{f-\varphi_1}\right)+\bar{N}(r, \varphi_1)+\bar{N}(r, \varphi_3)+\bar{N}\left(r, \frac{\varphi_2-\varphi_1}{\varphi_2-\varphi_3}\right),$$

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{F-1}\right)\leqslant\bar{N}\left(r, \frac{1}{f-\varphi_2}\right)+\bar{N}(r, \varphi_3)+\bar{N}(r, \varphi_2)+\bar{N}\left(r, \frac{\varphi_2-\varphi_1}{\varphi_1-\varphi_3}\right).$$

根据(4)有

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f-\varphi_j}\right)\leqslant\bar{N}^{(k_j)}\left(r, \frac{1}{f-\varphi_j}\right)+\frac{1}{k_j}T\left(r, \frac{1}{f-\varphi_j}\right),$$

而
$$T\left(r, \frac{1}{f-\varphi_j}\right)=T(r, f-\varphi_j)+h_j\leqslant T(r, f)+T(r, \varphi_j)+|h_j|+\log 2$$
$$(j=1, 2, 3).$$

另外有

$$\begin{aligned}\bar{N}\left(r, \frac{\varphi_2-\varphi_3}{\varphi_2-\varphi_1}\right)&\leqslant\bar{N}\left(r, \frac{1}{\varphi_2-\varphi_1}\right)+\bar{N}(r, \varphi_1)+\bar{N}(r, \varphi_3)\\&\leqslant T\left(r, \frac{1}{\varphi_2-\varphi_1}\right)+\bar{N}(r, \varphi_1)+\bar{N}(r, \varphi_3)\\&=T(r, \varphi_2-\varphi_1)+h+\bar{N}(r, \varphi_1)+\bar{N}(r, \varphi_3)\\&\leqslant T(r, \varphi_2)+T(r, \varphi_1)+\bar{N}(r, \varphi_1)+\bar{N}(r, \varphi_3)+|h|+\log 2.\end{aligned}$$

同样
$$\bar{N}\left(r, \frac{\varphi_2-\varphi_1}{\varphi_2-\varphi_3}\right)\leqslant T(r, \varphi_2)+T(r, \varphi_3)+\bar{N}(r, \varphi_3)+\bar{N}(r, \varphi_1)+|h'|+\log 2,$$

$$\bar{N}\left(r, \frac{\varphi_2-\varphi_1}{\varphi_1-\varphi_3}\right)\leqslant T(r, \varphi_1)+T(r, \varphi_3)+\bar{N}(r, \varphi_3)+\bar{N}(r, \varphi_2)+|h''|+\log 2.$$

由以上各不等式及(7)，当 $r>1$ 时，有

$$\begin{aligned}T(r, F)<&\sum_{j=1}^{3}\bar{N}^{(k_j)}\left(r, \frac{1}{f-\varphi_j}\right)+\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{k_j}\right)T(r, f)\\&+9\sum_{j=1}^{3}T(r, \varphi_j)+C_2+S_1(r),\end{aligned}\tag{9}$$

其中 $C_2>0$ 为常数.

为了完成定理 1 的证明，还需要以 $T(r, F)$ 及 $T(r, \varphi_j)(j=1, 2, 3)$ 界囿 $T(r, f)$，并以 $T(r, f)$ 及 $T(r, \varphi_j)(j=1, 2, 3)$ 界囿 $T(r, F)$.

我们先有

$$\begin{aligned}T(r, f)&\leqslant T(r, f-\varphi_3)+T(r, \varphi_3)+\log 2\\&=T\left(r, \frac{1}{f-\varphi_3}\right)+h^{(3)}+T(r, \varphi_3)+\log 2,\end{aligned}$$

然后利用关系式

$$1+\frac{\varphi_3-\varphi_1}{f-\varphi_3}=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\varphi_2-\varphi_3}F,$$

有
$$\begin{aligned}T\left(r, \frac{1}{f-\varphi_3}\right)&\leqslant T\left(r, \frac{1}{\varphi_3-\varphi_1}\right)+T\left(r, \frac{\varphi_3-\varphi_1}{f-\varphi_3}\right)\\&\leqslant T\left(r, \frac{1}{\varphi_3-\varphi_1}\right)+T\left(r, \frac{\varphi_2-\varphi_1}{\varphi_2-\varphi_3}F\right)+\log 2,\end{aligned}$$

故当 $r>1$ 时，有

$$T(r,f)\leqslant 3\sum_{j=1}^{3}T(r,\varphi_j)+T(r,F)+C_3, \tag{10}$$

其中 $C_3>0$ 为一常数.

另一方面，我们有

$$T(r,F)\leqslant T\left(r,\frac{f-\varphi_1}{f-\varphi_3}\right)+T\left(r,\frac{\varphi_2-\varphi_3}{\varphi_2-\varphi_1}\right),$$

然后利用关系式

$$\frac{f-\varphi_1}{f-\varphi_3}=1+\frac{\varphi_3-\varphi_1}{f-\varphi_3},$$

可知当 $r>1$ 时，有

$$T(r,F)\leqslant T(r,f)+3\sum_{j=1}^{3}T(r,\varphi_j)+C_4, \tag{11}$$

其中 $C_4>0$ 为一常数.

最后由(9)，(10)，(11)即得(5)及(6).

用同样方法可以证明定理 2.

定理 2 设 $f(z)$ 及 $\varphi_j(z)$ ($j=1, 2$) 为三个判别的亚纯函数并假定函数

$$F(z)=\frac{f(z)-\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)-\varphi_1(z)}$$

非为常数. 设 k_j ($j=1, 2, 3$) 满足定理 1 中的条件. 则当 $r>1$ 时，有不等式

$$\left(1-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{k_j}\right)T(r,f)<\overline{N}^{(k_1)}\left(r,\frac{1}{f-\varphi_1}\right)+\overline{N}^{(k_2)}\left(r,\frac{1}{f-\varphi_2}\right)$$
$$+\overline{N}^{(k_3)}(r,f)+7\sum_{j=1}^{2}T(r,\varphi_j)+S(r),$$

其中 $S(r)>0$ 并当 $1<r<R$ 时满足

$$S(r)<12\left\{\log^+T(R,f)+\sum_{j=1}^{2}\log^+T(R,\varphi_j)\right\}+12\log R+9\log^+\frac{1}{R-r}+C,$$

其中 $C>0$ 为一常数.

2. 基本定理的应用

下面，我们给出以上两个定理的一部分应用.

定义 2 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 为二实函数定义在一个区间 $x\geqslant x_0$ 并且 $g(x)>0$. 如果存在区间 $x\geqslant x_0$ 上一个外测度为有穷的点集 S，使

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\notin S}}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

那么我们写

$$f(x)=o_*[g(x)].$$

容易看出，如果定义在区间 $x\geqslant x_0$ 上的有穷个实函数 $f_j(x)$ ($j=1, 2, \cdots, n$) 都满足

$$f_j(x)=o_*[g(x)]\quad (j=1, 2, \cdots, n),$$

则

$$\sum_{j=1}^{n}f_j(x)=o_*[g(x)].$$

定义 3 设 $f(z)$ 为一超越亚纯函数. 我们以 $E(f)$ 表示满足条件

$$T(r,\varphi)=o_*[T(r,f)]$$

的亚纯函数 $\varphi(z)$ 的全体及值 ∞ 所成之集合. $E(f)$ 包括全体有理函数，特别包括所有的复数及 ∞. 下面我们以 ψ 表示 $E(f)$ 的元素. 为了叙述方便起见，我们定义，当 $\psi=\infty$ 时，

$$\overline{N}^{(k)}\left(r, \frac{1}{f-\psi}\right)=\overline{N}^{(k)}(r, f).$$

定理 3　设 $f(z)$ 为一超越亚纯函数并且 $\psi_j(j=1, 2, 3)$ 为集合 $E(f)$ 的三个判别的元素，$k_j(j=1, 2, 3)$ 满足定理 1 中的条件，则有不等式

$$\sum_{j=1}^{3}\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\overline{N}^{(k_j)}\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)}{T(r, f)}\geqslant 1-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{k_j}. \tag{12}$$

证　先假定 $\psi_j(j=1, 2, 3)$ 均非值 ∞，则对于 f, $\psi_j(j=1, 2, 3)$ 及 $k_j(j=1, 2, 3)$ 可以应用定理 1. 故当 $r>1$ 时，有不等式

$$\left(1-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{k_j}\right)T(r, f)<\sum_{j=1}^{3}\overline{N}^{(k_j)}\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)+12\sum_{j=1}^{3}T(r, \psi_j)+S(r), \tag{13}$$

其中 $S(r)>0$ 并且当 $1<r<R$ 时，有

$$S(r)<12\left\{\log^+T(R, f)+\sum_{j=1}^{3}\log^+T(R, \psi_j)\right\}+12\log R+9\log^+\frac{1}{R-r}+C.$$

于 $r>0$ 定义

$$\tau(r)=\max\{T(r, f),\ T(r, \psi_j)(j=1, 2, 3)\},$$

则

$$S(r)<48\log^+\tau(R)+12\log R+9\log^+\frac{1}{R-r}+C,$$

并且 $\tau(r)$ 于 $r>0$ 为连续、非减并且随 r 趋于 $+\infty$. 特别取

$$R=r+\frac{1}{\log\tau(r)},$$

则根据 Borel 的一个关于连续非减函数的定理[4,1]有

$$S(r)<A\{\log^+\tau(r)+\log r\}\leqslant A\left\{\log^+T(r, f)+\sum_{j=1}^{3}\log^+T(r, \psi_j)+\log r\right\},$$

其中 $A>0$ 为一常数. 当 r 充分大时，这个不等式成立，不过可能要除去一串区间其总长度为有穷，故有

$$S(r)=o_*[T(r, f)].$$

所以(13)可以写为

$$\left(1-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{k_j}\right)T(r, f)<\sum_{j=1}^{3}\overline{N}^{(k_j)}\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)+S_1(r),$$

其中

$$S_1(r)=o_*[T(r, f)],$$

即存在一个外测度为有穷的点集 σ，使

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\overline{\in}\sigma}}\frac{S_1(r)}{T(r, f)}=0,$$

故有

$$1-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{k_j}\leqslant\sum_{j=1}^{3}\varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\overline{\in}\sigma}}\frac{\overline{N}^{(k_j)}\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)}{T(r, f)}\leqslant\sum_{j=1}^{3}\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\overline{N}^{(k_j)}\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)}{T(r, f)}.$$

如果 $\psi_j(j=1, 2, 3)$ 之中有一个是值 ∞，例如 $\psi_3=\infty$，则根据定理 2，用同样方法仍可得不等式(12).

显然由不等式(12)可以断定在它的左边的和数中最少有一项

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\overline{N}^{(k_j)}\left(r,\ \dfrac{1}{f-\psi_j}\right)}{T(r,\ f)}\geqslant\frac{1}{3}\left(1-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{k_j}\right),$$

故更有

$$\lim_{r\to+\infty}\overline{n}^{(k_j)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi_j}\right)=+\infty.$$

另一方面作为满足定理1中条件的 $k_j(j=1,\ 2,\ 3)$ 的特例有:

(1) $k_1=k_2=k_3=4$;

(2) $k_1=k_2=3,\ k_3=4$;

(3) $k_1=2,\ k_2=k_3=5$.

故由定理1可立即推出下列系理:

系理1 设 $f(z)$ 为一超越亚纯函数,则

1° 对于集合 $E(f)$ 的每一个元素 ψ, 有

$$\lim_{r\to+\infty}\overline{n}^{(4)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi}\right)=+\infty,$$

最多除去 $E(f)$ 的两个例外元素.

2° 如果存在集合 $E(f)$ 的一个元素 ψ_0, 使

$$\lim_{r\to+\infty}\overline{n}^{(4)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi_0}\right)<+\infty,$$

则对于集合 $E(f)-(\psi_0)$ 的每一个元素 ψ, 有

$$\lim_{r\to+\infty}\overline{n}^{(3)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi}\right)=+\infty,$$

最多除去 $E(f)-(\psi_0)$ 的一个例外元素.

3° 如果存在集合 $E(f)$ 的两个元素 ψ_0 及 ψ_1, 使

$$\lim_{r\to+\infty}\overline{n}^{(5)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi_j}\right)<+\infty\quad(j=0,\ 1),$$

则对于集合 $E(f)-(\psi_0,\ \psi_1)$ 的每一个元素 ψ, 有

$$\lim_{r\to+\infty}\overline{n}^{(2)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi}\right)=+\infty.$$

这个系理推广并且精密化了关于亚纯函数的 Picard 定理.

定义4 设 $f(z)$ 为一超越亚纯函数并设 ρ 为 $f(z)$ 的级. 分别两种情形:

(1) $0\leqslant\rho<+\infty$. 在此情形下,可以构造一个函数 $\rho(r)$ 满足

1) $\rho(r)$ 在一区间 $r\geqslant r_0$ 为单调并分段可导;

2) $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r)=\rho,\ \lim\limits_{r\to+\infty}\rho'(r)r\log r=0$;

3) $\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{T(r,\ f)}{r^{\rho(r)}}=1$.

特别当 $\rho>0$ 时, $\rho(r)$ 即称为函数 $f(z)$ 的一个精确级[5,a][3,b]. 以下我们称

$$U(r)=r^{\rho(r)}$$

为连系于函数 $f(z)$ 的一个型函数. 由1)及2)可以推出,对于常数 $h>1$, 有

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{U(hr)}{U(r)}=h^{\rho}.\tag{14}$$

(2) $\rho=+\infty$. 在此情形下，可以构造一个函数 $\rho(r)$ 满足[3,b]

1) $\rho(r)$ 在一区间 $r\geqslant r_0$ 为连续、非减并且随 r 趋于 $+\infty$;

2) 命 $U(r)=r^{\rho(r)}$, 当 r 充分大时，有

$$U\left(r+\frac{1}{[\log U(r)]^2}\right)<e^2U(r);\tag{15}$$

3) $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\dfrac{T(r,\ f)}{U(r)}=1$.

以下我们也称 $U(r)$ 为连系于函数 $f(z)$ 的一个型函数，由 3) 容易推出

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log T(r,\ f)}{\rho(r)\log r}=1,$$

因此，$\rho(r)$ 称为函数 $f(z)$ 的一个级[6].

对于一个超越亚纯函数 $f(z)$ (无论它的级 ρ 为有穷或无穷)和与它相连系的一个型函数 $U(r)$, 我们定义 $E(f,\ U)$ 为满足条件

$$T(r,\ \varphi)=o[U(r)]$$

的亚纯函数 $\varphi(z)$ 的全体及值 ∞ 所成之集合. 如果 $0<\rho<+\infty$, 则 $E(f,\ U)$ 包括级 $<\rho$ 的亚纯函数及满足条件

$$T(r,\ \varphi)=o[T(r,\ f)]\tag{16}$$

的亚纯函数 $\varphi(z)$. 如果 $\rho=+\infty$, $E(f,\ U)$ 包括满足条件(16)的亚纯函数 $\varphi(z)$, 并且包括有穷级亚纯函数及满足条件

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log T(r,\ \varphi)}{\rho(r)\log r}<1$$

的无穷级亚纯函数. 在一般情形下，$E(f,\ U)$ 恒包括所有复数及值 ∞.

定理 4 设 $f(z)$ 为一超越亚纯函数，$U(r)$ 为连系于 $f(z)$ 的一个型函数，$\psi_j(j=1,2,3)$ 为集合 $E(f,\ U)$ 的三个判别的元素并且 $k_j(j=1,\ 2,\ 3)$ 满足定理 1 中的条件，则有不等式

$$\sum_{j=1}^{3}\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\overline{N}^{(k_j)}\left(r,\ \dfrac{1}{f-\psi_j}\right)}{U(r)}\geqslant 1-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{k_j}.\tag{17}$$

证　先假定 $\psi_j(j=1,\ 2,\ 3)$ 均非值 ∞, 则对于 f, $\psi_j(j=1,\ 2,\ 3)$ 及 $k_j(j=1,\ 2,\ 3)$ 可以应用定理 1, 故当 $r>1$ 时仍有不等式(13). 为了估计 $S(r)$, 先注意当 r 充分大时，有

$$S(r)<12\{4\log U(R)+\log 2\}+12\log R+9\log^+\frac{1}{R-r}+C.$$

然后按照函数 $f(z)$ 的级为有穷或无穷，分别取 $R=2r$ 或

$$R=r+\frac{1}{\{\log U(r)\}^2},$$

即得

$$S(r)<A\{\log U(r)+\log r\},$$

其中 $A>0$ 为一常数. 故由(13), 当 r 充分大时，有

$$\left(1-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{k_j}\right)T(r,\ f)<\sum_{j=1}^{3}\overline{N}^{(k_j)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi_j}\right)+o[U(r)].$$

以 $U(r)$ 除这个不等式的两边，然后取上极限，即得(17).

如果 $\psi_j(j=1,\ 2,\ 3)$ 之中有一个是值 ∞, 例如 $\psi_3=\infty$, 则可根据定理 2 证之.

不等式(17)左边的和数中最少有一项

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\overline{N}^{(k_j)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi_j}\right)}{U(r)}\geqslant\frac{1}{3}\left(1-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{k_j}\right). \tag{18}$$

另一方面, $\overline{N}^{(k_j)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi_j}\right)\leqslant T\left(r,\ \frac{1}{f-\psi_j}\right)=T(r,\ f)+o[U(r)]$,

故有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\overline{N}^{(k_j)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi_j}\right)}{U(r)}\leqslant 1. \tag{19}$$

由(18)及(19)可以断定

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log\overline{N}^{(k_j)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi_j}\right)}{\log U(r)}=1. \tag{20}$$

如果函数 $f(z)$ 的级 ρ 满足 $0<\rho\leqslant+\infty$, 则由(20)又可推出

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log\overline{n}^{(k_j)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi_j}\right)}{\log U(r)}=1.$$

故有下列系理2.

系理 2 设 $f(z)$ 为一超越亚纯函数其级 ρ 满足 $0<\rho\leqslant+\infty$, $U(r)$ 为连系于 $f(z)$ 的一个型函数, 则

1° 对于集合 $E(f,\ U)$ 的每一个元素 ψ, 有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log\overline{n}^{(4)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi}\right)}{\log U(r)}=1,$$

最多除去 $E(f,\ U)$ 的两个例外元素.

2° 如果存在集合 $E(f,\ U)$ 的一个元素 ψ_0, 使

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log\overline{n}^{(4)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi_0}\right)}{\log U(r)}<1,$$

则对于集合 $E(f,\ U)-(\psi_0)$ 的每一个元素 ψ 有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log\overline{n}^{(3)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi}\right)}{\log U(r)}=1,$$

最多除去 $E(f,\ U)-(\psi_0)$ 的一个例外元素.

3° 如果存在集合 $E(f,\ U)$ 的两个元素 ψ_0 及 ψ_1 使

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log\overline{n}^{(5)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi_j}\right)}{\log U(r)}<1\quad(j=0,\ 1),$$

则对于集合 $E(f,\ U)-(\psi_0,\ \psi_1)$ 的每一个元素 ψ, 有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log\overline{n}^{(2)}\left(r,\ \frac{1}{f-\psi}\right)}{\log U(r)}=1.$$

这个系理推广并且精密化了关于亚纯函数的 Borel 定理.

二、q 为任意的情形

1. 基本定理

定义 5 如果按照一个法则对于每一个亚纯函数 f 应上了一个亚纯函数 $L(f)$，那么我们就简称 $L(f)$ 为一算子. 我们说 $L(f)$ 是线性的，如果

1° 对于任意两个亚纯函数 f_1 及 f_2，有

$$L(f_1+f_2)=L(f_1)+L(f_2);$$

2° 对于任意的一个亚纯函数 f 及任意的一个复数 C，有

$$L(Cf)=CL(f).$$

在第二个性质中，特别取 $C=0$ 就可以推出：如果一个亚纯函数 f 恒等于零，那么 $L(f)$ 也恒等于零.

对于线性算子可以作下列三个运算：

(1) 如果 $L_1(f)$ 及 $L_2(f)$ 是两个线性算子，则 $L(f)=L_1(f)+L_2(f)$ 也是一个线性算子；

(2) 如果 $L(f)$ 是一个线性算子并且 g 是一个亚纯函数，则 $l(f)=gL(f)$ 也是一个线性算子；

(3) 如果 $L_1(f)$ 及 $L_2(f)$ 是两个线性算子，则 $L(f)=L_2\{L_1(f)\}$ 也是一个线性算子.

以上三个事实都容易验证.

作为线性算子的例子有：

$L(f)=f$，

$L(f)=f'$（f 的导数），

$L(f)=f^{(n)}$（f 的 n 阶导数），

$L(f)=g_0f^{(n)}+g_1f^{(n-1)}+\cdots+g_nf$，其中 $g_j(j=0,1,\cdots,n)$

为亚纯函数.

定理 5 设 $L(f)$ 为一线性算子，$f(z)$ 为一亚纯函数并且 $\varphi_j(z)\,(j=1,2,\cdots,q;\,q\geqslant 2)$ 为 q 个判别的亚纯函数. 假定 $L[f(z)]$ 不恒等于零并且 $L[\varphi_j(z)]\,(j=1,2,\cdots,q)$ 均恒等于零，则当 $r>0$ 时，有不等式

$$m(r,f)+\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{f-\varphi_j}\right)\leqslant 2T(r,f)-\widetilde{N}(r)+S(r),\tag{21}$$

其中
$$\widetilde{N}(r)=2N(r,f)-N\{r,L(f)\}+N\left\{r,\frac{1}{L(f)}\right\},$$

$$S(r)=m\left\{r,\frac{L(f)}{f}\right\}+\sum_{j=1}^{q}m\left\{r,\frac{L(f-\varphi_j)}{f-\varphi_j}\right\}+q\sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant q}m\left(r,\frac{1}{\varphi_{j_1}-\varphi_{j_2}}\right)+d,$$

其中 d 为一常数.

证　作辅助函数

$$F(z)=\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{f(z)-\varphi_j(z)},$$

在[3, a]中有不等式

$$m(r, F) \geqslant \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-\varphi_j}\right) - q \sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant q} m\left(r, \frac{1}{\varphi_{j_1}-\varphi_{j_2}}\right)$$
$$-q\log\{2q+q^2(q-1)\} - \frac{q}{2\pi}\log 3. \tag{22}$$

另一方面，由恒等式

$$F = \frac{1}{f}\frac{f}{L(f)}\sum_{j=1}^{q}\frac{L(f-\varphi_j)}{f-\varphi_j}$$

得 $$m(r, F) \leqslant m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left\{r, \frac{f}{L(f)}\right\} + \sum_{j=1}^{q} m\left\{r, \frac{L(f-\varphi_j)}{f-\varphi_j}\right\} + \log q,$$

但 $$m\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + a_1,$$

$$m\left\{r, \frac{f}{L(f)}\right\} = m\left\{r, \frac{L(f)}{f}\right\} + N\left\{r, \frac{L(f)}{f}\right\} - N\left\{r, \frac{f}{L(f)}\right\} + a_2$$
$$= m\left\{r, \frac{L(f)}{f}\right\} + \left\{N\left(r, \frac{1}{f}\right) - N(r, f)\right\}$$
$$+\left(N\{r, L(f)\} - N\left\{r, \frac{1}{L(f)}\right\}\right) + a_2,$$

其中 a_1 及 a_2 为常数，故有

$$m(r, F) \leqslant 2T(r, f) - m(r, f) - \tilde{N}(r) + m\left\{r, \frac{L(f)}{f}\right\}$$
$$+\sum_{j=1}^{q} m\left\{r, \frac{L(f-\varphi_j)}{f-\varphi_j}\right\} + \log q + a. \tag{23}$$

由(22)及(23)即得(21).

在定理5中特别取 $L(f)=f'$，即得 R. Nevanlinna 的第二基本定理的一种形式[1]. 定理5清楚地显示出线性算子在上述 R. Nevanlinna 提出的问题中所起的作用.

定义 6 设 $f(z)$ 为一亚纯函数，p 为一正整数，我们定义

$$N_p(r, f) = \int_0^r \frac{n_p(t, f) - n_p(0, f)}{t}\,dt + n_p(0, f)\log r,$$

其中 $n_p(t, f)$ 表示函数 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant t$ 的极点的个数，每一个极点计算的次数为 $\min(m, p)$，其中 m 为极点的重级.

特别有 $$N_1(r, f) = \overline{N}(r, f).$$

定义 7 设 $\Phi_k(z)$ $(k=1, 2, \cdots, p;\ p\geqslant 1)$ 为 p 个线性无关的亚纯函数，以 $E(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$ 表示具有形状 $\sum_{k=1}^{p} C_k\Phi_k(z)$ 的亚纯函数所成的集合，其中 C_k $(k=1, 2, \cdots, p)$ 为常数，并以 $E_1(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$ 表示 $E(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$ 与值 ∞ 的和集

$$E_1(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p) = E(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)U(\infty).$$

定理 6 设 $\Phi_k(z)$ $(k=1, 2, \cdots, p;\ p\geqslant 1)$ 为 p 个线性无关的亚纯函数，$f(z)$ 为一亚纯函数不属于 $E(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$，$\varphi_j(z)$ $(j=1, 2, \cdots, q;\ q\geqslant 2)$ 为 $E(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$ 的 q 个判别的元素，则当 $r>1$ 时，有不等式

$$m(r, f) + \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f-\varphi_j}\right) < 2T(r, f) + A\sum_{k=1}^{p} T(r, \Phi_k) + N(r) + S(r), \tag{24}$$

其中 $$N(r)=p\overline{N}(r, f)-N(r, f)-\sum_{j=1}^{q}\left\{N\left(r, \frac{1}{f-\varphi_j}\right)-N_p\left(r, \frac{1}{f-\varphi_j}\right)\right\}$$

而 $S(r)>0$ 并且当 $1<r<R$ 时，有

$$S(r)<a\left\{\log^+ T(R, f)+\sum_{k=1}^{p}\log^+ T(R, \Phi_k)\right\}+b\log R+c\log^+\frac{1}{R-r}+d, \tag{25}$$

其中 A, a, b, c, d 均为正的常数.

证　设 $\Delta(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$ 为 $\Phi_k(z)\ (k=1, 2, \cdots, p)$ 的 Wronskian 行列式，则 $\Delta(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$ 不恒等于零. 定义一个线性算子

$$L(f)=(-1)^p\frac{\Delta(f, \Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)}{\Delta(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)}, \tag{26}$$

其中 $\Delta(f, \Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$ 为 f, $\Phi_k\ (k=1, 2, \cdots, p)$ 的 Wronskian 行列式，则 $L\{f(z)\}$ 不恒等于零并且 $L(\varphi_j)\ (j=1, 2, \cdots, q)$ 均恒等于零. 故根据定理 5 有不等式 (21). 但根据[3, a]中已得的结果，对于由 (26) 所定义的线性算子 $L(f)$，当 $r>1$ 时，不等式 (21) 中 $\tilde{N}(r)$ 及 $S(r)$ 满足不等式

$$-\tilde{N}(r)+S(r)\leqslant N(r)+\sigma(r)+S_1(r),$$

式中 $\sigma(r)$ 满足

$$\sigma(r)\leqslant A\sum_{k=1}^{p}T(r, \Phi_k)+\alpha,$$

其中 $A>0$ 及 α 为常数. 而 $S_1(r)$，当 $1<r<R$ 时，满足

$$S_1(r)<a\left\{\log^+ T(R, f)+\sum_{k=1}^{p}\log^+ T(R, \Phi_k)\right\}+b\log R+c\log^+\frac{1}{R-r}+d,$$

其中 a, b, c, d 为正的常数，故有 (24).

定义 8　设 $f(z)$ 为一超越亚纯函数，p 为一正整数，我们定义

$$\lambda_p(f)=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{p\overline{N}(r, f)-N_p(r, f)}{T(r, f)}.$$

显然 $$0\leqslant\lambda_p(f)\leqslant p-1.$$

$\lambda_p(f)$ 的下限 0 显然可以达到，例如当 $f(z)$ 为整函数时. 下面我们举一个例子来说明 $\lambda_p(f)$ 的上限 $p-1$ 也可以达到. 考虑亚纯函数

$$f_0(z)=\frac{1}{e^z-1},$$

我们有 $$T(r, f_0)=T(r, e^z)+O(1)=\frac{r}{\pi}+O(1).$$

另一方面，$f_0(z)$ 的极点的重级都等于 1 并且

$$\overline{N}(r, f_0)=\frac{r}{\pi}+O(\log r),$$

故有 $$\lambda_p(f_0)=p-1.$$

值得给出 $\lambda_p(f)=0$ 的下列几个充分条件：

(1) $p=1$,

(2) $\varlimsup_{r\to+\infty}\dfrac{\overline{N}(r, f)}{T(r, f)}=0$,

(3) 存在一个正数 r_0 使在区域 $|z|>r_0$ 内 $f(z)$ 的极点的重级均 $\geqslant p$.

定理 7　设 $f(z)$ 为一超越亚纯函数，$\Phi_k(z)(k=1, 2, \cdots, p;\ p\geqslant 1)$ 为 p 个线性无关的亚纯函数．假定

$$T(r, \Phi_k)=o_*[T(r, f)] \quad (k=1, 2, \cdots, p), \tag{27}$$

则对于集合 $E_1(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$ 的任意 q 个判别的元素 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q;\ q\geqslant 3)$，当 $r>1$ 时，有不等式

$$\{q-2-\lambda_p(f)\}T(r, f)<\sum_{j=1}^{q} N_p\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)^* +o_*[T(r, f)]. \tag{28}$$

证　先假定 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q)$ 均属于集合 $E(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$．由(27)，函数 $f(z)$ 不属于 $E(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$，故根据定理 6 有

$$\sum_{j=1}^{q} T\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)<2T(r, f)+\sum_{j=1}^{q} N_p\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)+p\overline{N}(r, f)-N_p(r, f)$$
$$+A\sum_{k=1}^{p} T(r, \Phi_k)+S(r).$$

又
$$T(r, f)\leqslant T\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)+T(r, \psi_j)+h_j \quad (j=1, 2, \cdots, q),$$

其中 $h_j(j=1, 2, \cdots, q)$ 为常数，

$$\frac{p\overline{N}(r, f)-N_p(r, f)}{T(r, f)}\leqslant \sup_{t\geqslant r} \frac{p\overline{N}(t, f)-N_p(t, f)}{T(t, f)}=\lambda_p(f)+o(1),$$

故得

$$\{q-2-\lambda_p(f)\}T(r, f)<\sum_{j=1}^{q} N_p\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)+o(1)T(r, f)$$
$$+\sum_{j=1}^{q} T(r, \psi_j)+h+A\sum_{j=1}^{q} T(r, \Phi_k)+S(r). \tag{29}$$

由(27)，有
$$T(r, \psi_j)=o_*[T(r, f)] \quad (j=1, 2, \cdots, q).$$

另外根据(25)，利用定理 3 证明中的一个方法，可知

$$S(r)=o_*[T(r, f)],$$

故有(28)．

现在假定 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q)$ 之中有一个，例如 ψ_q，为值 ∞，则根据定理 6 有

$$T(r, f)+\sum_{j=1}^{q-1} T\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)<2T(r, f)+\sum_{j=1}^{q} N_p\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)$$
$$+p\overline{N}(r, f)-N_p(r, f)+A\sum_{k=1}^{p} T(r, \Phi_k)+S(r) \tag{30}$$

故仍有(28)．

在定理 7 中，特别取 $p=d+1$ 并且

$$\Phi_k(z)=z^{k-1} \quad (k=1, 2, \cdots, d+1),$$

即可得出 J. Dufresnoy 的结果(3)．

定理 8　设 $f(z)$ 为一超越亚纯函数，$U(r)$ 为连系于 $f(z)$ 的一个型函数，$\Phi_k(z)(k=1, 2, \cdots, p;\ p\geqslant 1)$ 为 p 个线性无关的亚纯函数．假定

$$T(r, \Phi_k)=o[U(r)] \quad (k=1, 2, \cdots, p), \tag{31}$$

* 当 $\psi=\infty$ 时，定义 $N_p\left(r, \frac{1}{f-\psi}\right)=N_p(r, f)$．

则对于集合 $E_1(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$ 的任意 q 个判别的元素 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q; q\geqslant 3)$，当 $r>1$ 时，有不等式

$$\{q-2-\lambda_p(f)\}T(r, f)<\sum_{j=1}^{q}N_p\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)+o[U(r)]. \tag{32}$$

证　先假定 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q)$ 均属于集合 $E(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$，由(31)，函数 $f(z)$ 不属于 $E(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$，故仍有不等式(29)．根据(31)，有

$$T(r, \psi_j)=o[U(r)] \quad (j=1, 2, \cdots, q).$$

另外，根据(25)，用定理 4 证明中的方法，可以证明

$$S(r)=o[U(r)],$$

故有(32)．

如果 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q)$ 之中有一个为值 ∞，则可根据(30)用同法证明．

定义 9　不难看出，当 $r>1$ 时，有

$$p\overline{N}(r, f)-N_p(r, f)\leqslant(p+1)\overline{N}(r, f)-N_{p+1}(r, f),$$

故由定义 8，有

$$\lambda_p(f)\leqslant\lambda_{p+1}(f).$$

我们定义

$$\lambda(f)=\lim_{p\to+\infty}\lambda_p(f),\quad 0\leqslant\lambda(f)\leqslant+\infty.$$

$\lambda(f)=0$，如果函数 $f(z)$ 满足下列两个条件之一：

(1) $\overline{\lim_{r\to+\infty}}\dfrac{\overline{N}(r, f)}{T(r, f)}=0$,

(2) 对于每一个正整数 p，存在一个正数 r_p，使在区域 $|z|>r_p$ 内 $f(z)$ 的极点的重级均 $\geqslant p$.

定义 10　设 $f(z)$ 为一超越亚纯函数．我们以 $e(f)$ 表示满足条件

$$T(r, \varphi)=o[T(r, f)]$$

的亚纯函数 $\varphi(z)$ 的全体及值 ∞ 所成之集合．设 ψ 为 $e(f)$ 的一个元素．如果 ψ 不是值 ∞，我们定义

$$\lambda_p(f, \psi)=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{p\overline{N}\left(r, \dfrac{1}{f-\psi}\right)-N_p\left(r, \dfrac{1}{f-\psi}\right)}{T(r, f)},$$

$$\lambda(f, \psi)=\lim_{p\to+\infty}\lambda_p(f, \psi).$$

如果 $\psi=\infty$，我们定义

$$\lambda(f, \psi)=\lambda(f).$$

定理 9　设 $f(z)$ 为一超越亚纯函数．假定存在集合 $e(f)$ 的一个元素 ψ_0，使

$$\lambda(f, \psi_0)<+\infty,$$

则对于集合 $E(f)$ 的任意 q 个判别的元素 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q; q\geqslant 3)$，当 $r>1$ 时，有不等式

$$\{q-2-\lambda(f, \psi_0)\}T(r, f)<\sum_{j=1}^{q}N\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)^{*}+o_*[T(r, f)], \tag{33}$$

* 当 $\psi=\infty$ 时，定义 $N\left(r, \dfrac{1}{f-\psi}\right)=N(r, f)$.

其中 $E(f)$ 具有定义 3 中的意义.

证 先考虑 $\psi_0=\infty$ 的情形. 由于 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q)$ 是判别的, 存在一个正整数 $h(1\leqslant h\leqslant q)$, 使在 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q)$ 中有 h 个异于值 ∞ 并且线性无关. 事实上 $h=1$ 即有此性质. 设 p 是这样的正整数 h 的最大者, 则存在 $\psi_{j_k}(k=1, 2, \cdots, p)$ 异于值 ∞ 并线性无关, 并且 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q)$ 都属于集合 $E_1(\psi_{j_1}, \psi_{j_2}, \cdots, \psi_{j_p})$. 又按假定

$$T(r, \psi_{j_k})=o_*[T(r, f)] \quad (k=1, 2, \cdots, p),$$

故根据定理 7, 有不等式(28). 由于

$$\lambda_p(f)\leqslant\lambda(f),\ N_p\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)\leqslant N\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right) \quad (j=1, 2, \cdots, q),$$

故更有(33).

现在设 ψ_0 不是值 ∞. 作辅助函数

$$F(z)=\frac{1}{f(z)-\psi_0(z)}, \tag{34}$$

$F(z)$ 亦为一超越亚纯函数. 我们有

$$T(r, F)=T(r, f)+o[T(r, f)], \tag{35}$$

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{T(r, F)}{T(r, f)}=1, \tag{36}$$

故有

$$\lambda_p(f, \psi_0)=\lambda_p(F),\ \ \lambda(f, \psi_0)=\lambda(F). \tag{37}$$

另一方面, 对于集合 $E(f)$ 的每一个元素 ψ 应上集合 $E(F)$ 的一个元素 Ψ 如下: 若 $\psi=\psi_0$, 则 $\Psi=\infty$; 若 $\psi=\infty$, 则 $\Psi=0$; 若 ψ 与 ψ_0 及 ∞ 均为判别的, 则 $\Psi=\dfrac{1}{\psi-\psi_0}$. 由(36), 显然 Ψ 属于 $E(F)$ 并有

$$N\left(r, \frac{1}{F-\Psi}\right)\leqslant N\left(r, \frac{1}{f-\psi}\right)+o_*[T(r, f)]. \tag{38}$$

另外, 如果 ψ_1 与 ψ_2 是判别的, 则相应的 Ψ_1 与 Ψ_2 也是判别的.

现在设 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q;\ q\geqslant3)$ 为 $E(f)$ 的 q 个判别的元素, $\Psi_j(j=1, 2, \cdots, q)$ 为相应的 $E(F)$ 的 q 个判别的元素; 由(37), 根据以上结果, 有

$$\{q-2-\lambda(F)\}T(r, F)<\sum_{j=1}^{q}N\left(r, \frac{1}{F-\Psi_j}\right)+o_*[T(r, F)]. \tag{39}$$

最后由(35)—(39)五个关系式即得(33).

定理 10 设 $f(z)$ 为一超越亚纯函数, $U(r)$ 为连系于 $f(z)$ 的一个型函数. 假定存在集合 $e(f)$ 的一个元素 ψ_0, 使

$$\lambda(f, \psi_0)<+\infty,$$

则对于集合 $E(f, U)$ 的任意 q 个判别的元素 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q;\ q\geqslant3)$, 当 $r>1$ 时, 有不等式

$$\{q-2-\lambda(f, \psi_0)\}T(r, f)<\sum_{j=1}^{q}N\left(r, \frac{1}{f-\psi_j}\right)+o[U(r)], \tag{40}$$

其中 $E(f, U)$ 具有定义 4 中的意义.

证 分别两种情形:

1° $\psi_0=\infty$，对此情形，只须用证明定理 9 第一种情形的方法．不同的地方只是现在有

$$T(r,\ \psi_{j_k})=o[U(r)]\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ p),$$

故根据定理 8，由(32)即得(40)．

2° ψ_0 不是值 ∞．对此情形，只须用证明定理 9 第二种情形的方法，我们仍考虑式(34)定义的辅助函数 $F(z)$．由(36)，$U(r)$ 也是连系于 $F(z)$ 的一个型函数．然后对于 $E(f,\ U)$ 每一个元素 ψ，同样应上 $E(F,\ U)$ 的一个元素 Ψ，满足

$$N\left(r,\ \frac{1}{F-\Psi}\right)\leqslant N\left(r,\ \frac{1}{f-\psi}\right)+o[U(r)].$$

现在仍有(39)，只是其中 $o_*[T(r,\ F)]$ 应换为 $o[J(r)]$，故仍有(40)．

2．基本定理的应用

下面，我们给出以上几个定理的部分应用．

(1) 定理 7 的应用

设 $f(z)$ 为一超越亚纯函数，$\Phi_k(z)\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ p;\ p\geqslant 1)$ 为 p 个线性无关的亚纯函数满足条件(27)．对于集合 $E_1(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \cdots,\ \Phi_p)$ 的每一个元素 ψ，我们应上三个数 $\delta(\psi)$，$\Theta(\psi)$ 及 $\mu(\psi)$ 并分别定义如下：

1) $\delta(\psi)$．

若 $\psi=\infty$，我们定义

$$\delta(\psi)=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{m(r,\ f)}{T(r,\ f)}=1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N(r,\ f)}{T(r,\ f)}.$$

若 ψ 不是值 ∞，则

$$T(r,\ \psi)=o_*[T(r,\ f)],$$

$$T\left(r,\ \frac{1}{f-\psi}\right)=T(r,\ f)+h(r),\quad |h(r)|\leqslant T(r,\ \psi)+|c|+\log 2,$$

其中 c 为一常数．设 σ 为区间 $r>0$ 上的一个无界点集，使于 σ 有 $T(r,\ f)>0$，并且

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\in\sigma}}\frac{T(r,\ \psi)}{T(r,\ f)}=0, \tag{41}$$

则有

$$\varliminf_{\substack{r\to+\infty\\ r\in\sigma}}\frac{m\left(r,\ \frac{1}{f-\psi}\right)}{T(r,\ f)}=1-\varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\in\sigma}}\frac{N\left(r,\ \frac{1}{f-\psi}\right)}{T(r,\ f)}.$$

我们定义

$$\delta(\psi)=\inf_{\sigma}\left\{\varliminf_{\substack{r\to+\infty\\ r\in\sigma}}\frac{m\left(r,\ \frac{1}{f-\psi}\right)}{T(r,\ f)}\right\}=1-\sup_{\sigma}\left\{\varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\in\sigma}}\frac{N\left(r,\ \frac{1}{f-\psi}\right)}{T(r,\ f)}\right\},$$

其中 inf 及 sup 都是对于所有使(41)成立的区间 $r>0$ 上的无界点集 σ 取的．特别，如果 ψ 满足

$$T(r,\ \psi)=o[T(r,\ f)], \tag{42}$$

则

$$\delta(\psi)=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{m\left(r,\ \frac{1}{f-\psi}\right)}{T(r,\ f)}=1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N\left(r,\ \frac{1}{f-\psi}\right)}{T(r,\ f)}.$$

显然恒有

$$0\leqslant\delta(\psi)\leqslant 1.$$

2) $\Theta(\psi)$.

若 $\psi=\infty$, 我们定义

$$\Theta(\psi)=1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N_p(r,f)}{T(r,f)}.$$

若 ψ 不是值 ∞, 我们定义

$$\Theta(\psi)=1-\sup_{\sigma}\left\{\varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\in\sigma}}\frac{N_p\left(r,\dfrac{1}{f-\psi}\right)}{T(r,f)}\right\},$$

其中 sup 的意义同上. 特别, 若 ψ 满足(42), 则

$$\Theta(\psi)=1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N_p\left(r,\dfrac{1}{f-\psi}\right)}{T(r,f)}.$$

我们恒有

$$0\leqslant\Theta(\psi)\leqslant1.$$

3) $\mu(\psi)$.

若 $\psi=\infty$, 我们定义

$$\mu(\psi)=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{N(r,f)-N_p(r,f)}{T(r,f)}.$$

若 ψ 不是值 ∞, 我们定义

$$\mu(\psi)=\inf_{\sigma}\left\{\varliminf_{\substack{r\to+\infty\\ r\in\sigma}}\frac{N\left(r,\dfrac{1}{f-\psi}\right)-N_p\left(r,\dfrac{1}{f-\psi}\right)}{T(r,f)}\right\},$$

其中 inf 的意义同上. 特别, 若 ψ 满足(42), 则

$$\mu(\psi)=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{N\left(r,\dfrac{1}{f-\psi}\right)-N_p\left(r,\dfrac{1}{f-\psi}\right)}{T(r,f)}.$$

我们恒有

$$0\leqslant\mu(\psi)\leqslant1.$$

以下我们证明: 对于集合 $E_1(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p)$ 的任意 q 个判别的元素 ψ_j $(j=1, 2, \cdots, q)$, 有

$$\sum_{j=1}^{q}\mu(\psi_j)+\sum_{j=1}^{q}\delta(\psi_j)\leqslant\sum_{j=1}^{q}\Theta(\psi_j)\leqslant2+\lambda_p(f). \tag{43}$$

事实上, 不难证明不等式

$$\mu(\psi)+\delta(\psi)\leqslant\Theta(\psi).$$

所以不等式(43)的第一部分成立. 为了证明不等式(43)的第二部分, 不妨设 $q\geqslant3$. 根据定理7, 有

$$q-2-\lambda_p(f)<\sum_{j=1}^{q}\frac{N_p\left(r,\dfrac{1}{f-\psi_j}\right)}{T(r,f)}+\frac{o_*[T(r,f)]}{T(r,f)}. \tag{44}$$

先假定 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q)$ 均非值 ∞. 存在区间 $r>0$ 上的一个无界点集 σ_0, 使于 σ_0 有 $T(r,f)>0$ 并且

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\in\sigma_0}}\frac{T(r,\psi_j)}{T(r,f)}=0\quad(j=1, 2, \cdots, q),$$

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\in\sigma_0}}\frac{o_*[T(r,f)]}{T(r,f)}=0.$$

由(44)有

$$q-2-\lambda_p(f)\leqslant\sum_{j=1}^{q}\overline{\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\in\sigma_0}}}\frac{N_p\left(r,\dfrac{1}{f-\psi_j}\right)}{T(r,f)}\leqslant\sum_{j=1}^{q}\sup_{\sigma}\left\{\overline{\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\in\sigma}}}\frac{N_p\left(r,\dfrac{1}{f-\psi_j}\right)}{T(r,f)}\right\}.$$

如果 $\psi_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ q)$ 之中有一个为值 ∞，用相同的方法亦可证明不等式(43)的第二部分.

现在设 ψ 为集合 $E_1(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \cdots,\ \Phi_p)$ 的一个元素，并定义 $m(\psi)$ 如下：

若 $\psi=\infty$，则 $m(\psi)$ 为函数 $f(z)$ 的极点的重级的最小者；如果 $f(z)$ 没有极点，则 $m(\psi)=+\infty$.

若 ψ 不是值 ∞，则 $m(\psi)$ 为函数 $f(z)-\psi(z)$ 的零点的重级的最小者；如果 $f(z)-\psi(z)$ 没有零点，则 $m(\psi)=+\infty$.

不难证明恒有

$$\Theta(\psi)\geqslant1-\frac{p}{m(\psi)}.$$

于是，由(43)，有下列结果：对于集合 $E_1(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \cdots,\ \Phi_p)$ 的任意 q 个判别的元素 $\psi_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ q)$，有

$$\sum_{j=1}^{q}\left\{1-\frac{p}{m(\psi_j)}\right\}\leqslant2+\lambda_p(f). \tag{45}$$

特别，如果存在 $E_1(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \cdots,\ \Phi_p)$ 的 q 个判别的元素 $\psi_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ q)$，使

$$m(\psi_j)\geqslant p+1\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ q),$$

则

$$q\leqslant(p+1)\{2+\lambda_p(f)\}. \tag{46}$$

(2) 定理 8 的应用

设 $f(z)$ 为一超越亚纯函数，$U(r)$ 为连系于 $f(z)$ 的一个型函数，$\Phi_k(z)(k=1,\ 2,\ \cdots,\ p;\ p\geqslant1)$ 为 p 个线性无关的亚纯函数满足条件(31). 对于集合 $E_1(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \cdots,\ \Phi_p)$ 的每一个元素 ψ，我们应上三个数 $\delta_v(\psi)$，$\Theta_v(\psi)$ 及 $\mu_v(\psi)$，其定义如下：

1) $\delta_v(\psi)$

若 $\psi=\infty$，我们定义

$$\delta_v(\psi)=1-\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{N(r,f)}{U(r)}.$$

由关系式

$$\frac{m(r,f)}{U(r)}+\frac{N(r,f)}{U(r)}=\frac{T(r,f)}{U(r)},$$

得

$$\delta_v(\psi)\geqslant\underline{\lim}_{r\to+\infty}\frac{m(r,f)}{U(r)}.$$

显然

$$0\leqslant\delta_v(\psi)\leqslant1.$$

若 ψ 不是值 ∞，则

$$T(r,\psi)=o[U(r)],$$

$$T\left(r,\frac{1}{f-\psi}\right)=T(r,f)+o[U(r)]. \tag{47}$$

我们定义
$$\delta_v(\psi)=1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N\left(r,\dfrac{1}{f-\psi}\right)}{U(r)},$$
仍有
$$\delta_v(\psi)\geqslant\varliminf_{r\to+\infty}\frac{m\left(r,\dfrac{1}{f-\psi}\right)}{U(r)},$$
$$0\leqslant\delta_v(\psi)\leqslant1.$$

关于亏量的定义，G. Valiron[5,b] 曾建议用 N/U 代替 N/T，因此我们用符号 δ_v.

2) $\Theta_v(\psi)$

我们定义
$$\Theta_v(\psi)=1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N_p\left(r,\dfrac{1}{f-\psi}\right)}{U(r)},$$
显然
$$0\leqslant\Theta_v(\psi)\leqslant1.$$

3) $\mu_v(\psi)$

我们定义
$$\mu_v(\psi)=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{N\left(r,\dfrac{1}{f-\psi}\right)-N_p\left(r,\dfrac{1}{f-\psi}\right)}{U(r)}.$$
显然
$$0\leqslant\mu_v(\psi)\leqslant1.$$

由不等式
$$\mu_v(\psi)+\delta_v(\psi)\leqslant\Theta_v(\psi)$$
及定理 8，可得：对于集合 $E_1(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \cdots,\ \Phi_p)$ 的任意 q 个判别的元素 $\psi_j\,(j=1,\ 2,\ \cdots,\ q)$，有
$$\sum_{j=1}^{q}\mu_v(\psi_j)+\sum_{j=1}^{q}\delta_v(\psi_j)\leqslant\sum_{j=1}^{q}\Theta_v(\psi_j)\leqslant2+\lambda_p(f).\tag{48}$$

下面，我们证明恒有
$$\Theta_v(\psi)\geqslant1-\frac{p}{m(\psi)}.\tag{49}$$

先设 $\psi=\infty$. 如果函数 $f(z)$ 没有极点，则(49)的两边均等于 1. 如果函数 $f(z)$ 有极点，则
$$\frac{N_p(r,f)}{U(r)}=\frac{N_p(r,f)}{N(r,f)}\,\frac{N(r,f)}{U(r)}\leqslant\frac{p}{m(\psi)}\,\frac{N(r,f)}{U(r)}\leqslant\frac{p}{m(\psi)}\,\frac{T(r,f)}{U(r)},$$
$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N_p(r,f)}{U(r)}\leqslant\frac{p}{m(\psi)}.$$

若 ψ 不是值 ∞，则根据(47)，用同法可证(49).

由(48)及(49)又可得出(45)及(46).

(3) 定理 9 的应用

定义 11 设 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 为二超越亚纯函数. 我们以 $n(t,\ f_1,\ f_2)$ 表示在圆 $|z|\leqslant t$，$f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 的公共极点的个数，每一个公共极点 z_0 计算的次数为 $\min(m_1,\ m_2)$，其中 m_1 及 m_2 分别是极点 z_0 对于 $f_1(z)$ 及对于 $f_2(z)$ 的重级. 然后于 $r>0$ 定义

$$N(r, f_1, f_2)=\int_0^r \frac{n(t, f_1, f_2)-n(o, f_1, f_2)}{t}dt+n(o, f_1, f_2)\log r,$$

及
$$\Delta(r, f_1, f_2)=N(r, f_1)+N(r, f_2)-2N(r, f_1, f_2).$$

当下列两个条件之一满足时，$\Delta(r, f_1, f_2)$ 恒等于零：

1° 函数 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 没有极点，

2° 函数 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 的极点相同并且极点的重级也相同.

定理 11 设 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 为二判别的超越亚纯函数. 假定存在集合 $e(f_1)$ 的一个元素 φ_1 及集合 $e(f_2)$ 的一个元素 φ_2，使

$$\lambda(f_1, \varphi_1)<+\infty,\quad \lambda(f_2, \varphi_2)<+\infty.$$

令
$$\Lambda=\max\{\lambda(f_1, \varphi_1), \lambda(f_2, \varphi_2)\},$$

则对于集合 $E(f_1)\cap E(f_2)$ 的任意 q 个判别的元素 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q;\ q\geqslant 5)$，当 $r>1$ 时，有不等式

$$(q-4-\Lambda)\{T(r, f_1)+T(r, f_2)\}<\sum_{j=1}^{q}\Delta\left(r, \frac{1}{f_1-\psi_j}, \frac{1}{f_2-\psi_j}\right)^{*}+o_*[T(r, f_1)+T(r, f_2)]. \tag{50}$$

证　分别两种情形：

1) $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q)$ 均非值 ∞.

根据定理 9，当 $r>1$ 时，有

$$(q-2-\Lambda)T(r, f_k)<\sum_{j=1}^{q}N\left(r, \frac{1}{f_k-\psi_j}\right)+o_*[T(r, f_k)]\quad (k=1, 2),$$

故有
$$(q-2-\Lambda)\{T(r, f_1)+T(r, f_2)\}<\sum_{j=1}^{q}\Delta\left(r, \frac{1}{f_1-\psi_j}, \frac{1}{f_2-\psi_j}\right)+2\sum_{j=1}^{q}N\left(r, \frac{1}{f_1-\psi_j}, \frac{1}{f_2-\psi_j}\right)+o_*[T(r, f_1)]+o_*[T(r, f_2)].$$

不难证明，当 $r>1$ 时，有

$$\sum_{j=1}^{q}N\left(r, \frac{1}{f_1-\psi_j}, \frac{1}{f_2-\psi_j}\right)\leqslant N\left(r, \frac{1}{f_1-f_2}\right)+\sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant q}N\left(r, \frac{1}{\psi_{j_1}-\psi_{j_2}}\right)=N\left(r, \frac{1}{f_1-f_2}\right)+o_*[T(r, f_1)],$$

$$N\left(r, \frac{1}{f_1-f_2}\right)\leqslant T(r, f_1)+T(r, f_2)+h,$$

其中 h 为一常数. 故有(50).

2) $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q)$ 之中有一个为值 ∞.

不妨设 $\psi_q=\infty$. 取一个复数 a 与 $\varphi_1, \varphi_2, \psi_j(j=1, 2, \cdots, q-1)$ 均为判别的，并作二辅助函数

$$F_k(z)=\frac{1}{f_k(z)-a}\quad (k=1, 2), \tag{51}$$

---

* 当 $\psi=\infty$ 时，定义 $\Delta\left(r, \frac{1}{f_1-\psi}, \frac{1}{f_2-\psi}\right)=\Delta(r, f_1, f_2)$.

则 $F_k(z)(k=1, 2)$ 也是两个判别的超越亚纯函数. 下面我们证明, 如果令

$$\Phi_k=\frac{1}{\varphi_k-a}\quad (k=1, 2),$$

则 $\Phi_k(k=1, 2)$ 分别属于集合 $e(F_k)(k=1, 2)$, 并有

$$\lambda(F_k, \Phi_k)=\lambda(f_k, \varphi_k)\quad (k=1, 2). \tag{52}$$

为了证明这个事实, 分别两种情形:

1° $\varphi_1=\infty$. 这时 $\Phi_1=0$. 然后根据(36)有

$$\lambda_p(F_1, \Phi_1)=\lambda_p(f_1),\quad \lambda(F, \Phi_1)=\lambda(f_1)=\lambda(f_1, \varphi_1).$$

2° φ_1 不是值 ∞. 这时有 $\Phi_1=\dfrac{1}{\varphi_1-a}$, 显然属于 $e(F_1)$. 根据(36), 并有

$$\frac{1}{F_1-\Phi_1}=\left(-1+\frac{\varphi_1-a}{\varphi_1-f_1}\right)(\varphi_1-a),$$

$$\frac{1}{\varphi_1-f_1}=\frac{1}{\varphi_1-a}\left(1+\frac{1}{\varphi_1-a}\,\frac{1}{F_1-\Phi_1}\right).$$

然后, 根据不等式

$$\overline{N}(r, g_1g_2)\leqslant\overline{N}(r, g_1)+\overline{N}(r, g_2),$$

$$N_p(r, g_1g_2)\leqslant N_p(r, g_1)+N_p(r, g_2),$$

其中 g_1 及 g_2 为任意两个亚纯函数并且 $r>1$, 得

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{F_1-\Phi_1}\right)=\overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1-\varphi_1}\right)+h(r), \tag{53}$$

$$N_p\left(r, \frac{1}{F_1-\Phi_1}\right)=N_p\left(r, \frac{1}{f_1-\varphi_1}\right)+h_p(r), \tag{54}$$

式中 $|h(r)|$ 及 $|h_p(r)|$ 均 $\leqslant 2T(r, \varphi_1)+|C|$, 其中 C 为一常数. 由(53), (54)及(36), 得

$$\lambda_p(F_1, \Phi_1)=\lambda_p(f_1, \varphi_1),\quad \lambda(F_1, \Phi_1)=\lambda(f_1, \varphi_1),$$

故当 $k=1$ 时, (52)成立. 同理, 当 $k=2$ 时, (52)亦成立.

令

$$\Psi_j=\frac{1}{\psi_j-a}\quad (j=1, 2, \cdots, q).$$

根据定理 9 的证明中所得的结果, $\Psi_j(j=1, 2, \cdots, q)$ 是集合 $E(F_1)\cap E(F_2)$ 的 q 个判别的元素, 并且当 $r>1$ 时, 有

$$N\left(r, \frac{1}{F_k-\Psi_j}\right)\leqslant N\left(r, \frac{1}{f_k-\psi_j}\right)+o_*[T(r, f_k)]$$
$$(k=1, 2;\ j=1, 2, \cdots, q). \tag{55}$$

现在我们证明, 当 $r>1$ 时, 有不等式

$$N\left(r, \frac{1}{f_1-\psi_j}, \frac{1}{f_2-\psi_j}\right)\leqslant 2N\left(r, \frac{1}{\psi_j-a}\right)+N\left(r, \frac{1}{F_1-\Psi_j}, \frac{1}{F_2-\Psi_j}\right)$$
$$(j=1, 2, \cdots, q). \tag{56}$$

当 $j=q$ 时, (56)显然成立.

当 $1\leqslant j\leqslant q-1$ 时, 则有

$$\psi_j-f_k=(f_k-a)(\psi_j-a)(F_k-\Psi_j),\quad \psi_j-a=(\psi_j-f_k)+(f_k-a)$$
$$(k=1, 2).$$

设 z_0 为任意一点. 定义三个数 $m(z_0)$, $M(z_0)$ 及 $\mu(z_0)$ 如下:

如果 z_0 是 $f_k-\psi_j(k=1,2)$ 的一个公共零点，则 $m(z_0)=\min(m_1, m_2)$，其中 $m_k(k=1,2)$ 分别是 z_0 对于 $\psi_j-f_k(k=1,2)$ 的重级．如果 z_0 不是 $\psi_j-f_k(k=1,2)$ 的一个公共零点，则 $m(z_0)=0$．类似地定义 $M(z_0)$，只是将 $f_k-\psi_j(k=1,2)$ 换为 $F_k-\Psi_j(k=1,2)$．

如果 z_0 是 ψ_j-a 的一个零点，则 $\mu(z_0)$ 为 z_0 的重级，否则 $\mu(z_0)=0$．

容易看出，为了证明(56)，只须证明不等式

$$m(z_0)\leqslant 2\mu(z_0)+M(z_0). \tag{57}$$

下面，我们给出(57)的证明．假定 z_0 是 $f_k-\psi_j(k=1,2)$ 的一个公共零点并分别两种情形：

① z_0 不是 ψ_j-a 的一个零点，则 z_0 不是 $f_k-a(k=1,2)$ 的零点，故 z_0 为 $F_k-\Psi_j(k=1,2)$ 的一个公共零点并有

$$m(z_0)\leqslant M(z_0).$$

② z_0 是 ψ_j-a 的一个零点，则 z_0 是 $f_k-a(k=1,2)$ 的一个公共零点．设对于 f_k-a $(k=1,2)$，z_0 的重级分别为 $\mu_k(k=1,2)$．如果等式 $\mu(z_0)=\mu_k(k=1,2)$ 不同时成立，则 $m(z_0)\leqslant\mu(z_0)$．如果等式 $\mu(z_0)=\mu_k(k=1,2)$ 同时成立，则 $m(z_0)\leqslant 2\mu(z_0)$，若 $M(z_0)=0$；而 $m(z_0)=2\mu(z_0)+M(z_0)$，若 $M(z_0)>0$．

将第一种情形的结果应用到 $F_k(k=1,2)$，$\Phi_k(k=1,2)$ 及 $\Psi_j(j=1,2,\cdots,q)$，则当 $r>1$ 时，有

$$(q-4-\Delta)\{T(r,F_1)+T(r,F_2)\}<\sum_{j=1}^{q}\Delta\left(r,\frac{1}{F_1-\Psi_j},\frac{1}{F_2-\Psi_j}\right)+o_*[T(r,F_1)+T(r,F_2)].$$

再由(55)，(56)及(51)，则对第二种情形仍有(50)．

现在，我们给出定理 11 对于唯一性问题的一个应用．

设 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 为二超越亚纯函数．对于集合 $E(f_1)\cap E(f_2)$ 的每一个元素 ψ 应上一个数 $l(\psi)$，并定义如下：

若 $\psi=\infty$，则定义

$$l(\psi)=1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\Delta(r,f_1,f_2)}{T(r,f_1)+T(r,f_2)}.$$

若 ψ 不是值 ∞，则定义

$$l(\psi)=1-\sup_{\sigma}\left\{\varlimsup_{\substack{r\to+\infty\\ r\in\sigma}}\frac{\Delta\left(r,\frac{1}{f_1-\psi},\frac{1}{f_2-\psi}\right)}{T(r,f_1)+T(r,f_2)}\right\},$$

其中，σ 为区间 $r>0$ 上的无界点集，使于 σ 有 $T(r,f_1)+T(r,f_2)>0$，并且

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ r\in\sigma}}\frac{T(r,\psi)}{T(r,f_1)+T(r,f_2)}=0.$$

特别，如果 ψ 满足条件

$$T(r,\psi)=o[T(r,f_1)+T(r,f_2)],$$

则有
$$l(\psi)=1-\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\Delta\left(r,\frac{1}{f_1-\psi},\frac{1}{f_2-\psi}\right)}{T(r,f_1)+T(r,f_2)}.$$

易知恒有
$$0\leqslant l(\psi)\leqslant 1.$$

利用前面已经用过的一个方法，根据定理 11，可以证明下列事实：

如果 $f_1(z)$, $f_2(z)$, φ_1, φ_2 及 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q)$满足定理 11 中的条件，则

$$\sum_{j=1}^{q} l(\psi_j) \leqslant 4+\varLambda.$$

由此可以立即推出：若存在集合 $E(f_1)\cap E(f_2)$的 $5+[\varLambda]$个判别的元素 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, 5+[\varLambda])$，使

$$l(\psi_j)=1 \quad (j=1, 2, \cdots, 5+[\varLambda]),$$

则函数 $f_1(z)$与 $f_2(z)$恒等，其中$[\varLambda]$为 $\varLambda$ 的整数部分.

(4) 定理 10 的应用

定理 12 设 $f_1(z)$及 $f_2(z)$为二判别的超越亚纯函数，$U_1(r)$及 $U_2(r)$分别为连系于 $f_1(z)$及 $f_2(z)$的型函数. 假定存在集合 $e(f_1)$的一个元素 φ_1 及集合 $e(f_2)$的一个元素 φ_2，使

$$\lambda(f_1, \varphi_1)<+\infty, \quad \lambda(f_2, \varphi_2)<+\infty.$$

令

$$\varLambda=\max\{\lambda(f_1, \varphi_1), \lambda(f_2, \varphi_2)\},$$

则对于集合 $E(f_1, U_1)\cap E(f_2, U_2)$ 的任意 q 个判别的元素 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q;\ q\geqslant 5)$，当 $r>1$ 时，有不等式

$$(q-4-\varLambda)\{T(r, f_1)+T(r, f_2)\}<\sum_{j=1}^{q} \varDelta\left(r, \frac{1}{f_1-\psi_j}, \frac{1}{f_2-\psi_j}\right) +o[U_1(r)+U_2(r)].$$

这个定理是定理 10 的一个推论. 它的证明与定理 11 的证明相似，故不详述.

以下我们给出定理 12 对于唯一性问题的一个应用.

设 $f_1(z)$及 $f_2(z)$为二超越亚纯函数，$U_1(r)$及 $U_2(r)$分别为连系于 $f_1(z)$及 $f_2(z)$的型函数. 令

$$L=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{T(r, f_1)+T(r, f_2)}{U_1(r)+U_2(r)},$$

显然 $L\leqslant 1$. 以下我们恒假定 $L>0$. 这个条件肯定满足，如果极限

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{U_2(r)}{U_1(r)}, \quad \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{U_1(r)}{U_2(r)}$$

不全等于 $+\infty$. 特别，如果这两个极限中有一个等于零，则 $L=1$. 当函数 $f_1(z)$及 $f_2(z)$的级不相同时，这个特别情况就发生.

对于集合 $E(f_1, U_1)\cap E(f_2, U_2)$的每一个元素 ψ 应上一个数

$$l_v(\psi)=1-\frac{1}{L}\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\varDelta\left(r, \frac{1}{f_1-\psi}, \frac{1}{f_2-\psi}\right)}{U_1(r)+U_2(r)}.$$

显然

$$0\leqslant l_v(\psi)\leqslant 1,$$

并且根据定理 12 有下列事实：

如果 $f_1(z)$, $f_2(z)$, $U_1(r)$, $U_2(r)$, φ_1, φ_2 及 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, q)$满足定理 12 中的条件及 $L>0$，则

$$\sum_{j=1}^{q} l_v(\psi_j)\leqslant 4+\varLambda.$$

由此可以立即推出：若存在集合 $E(f_1, U_1)\cap E(f_2, U_2)$的 $5+[\varLambda]$ 个判别的元素

$\psi_j(j=1, 2, \cdots, 5+[\Lambda])$，使

$$l_v(\psi_j)=1 \quad (j=1, 2, \cdots, 5+[\Lambda]),$$

则函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 恒等.

最后考虑具有下列形状的线性算子

$$L(f)=g_0 f^{(n)}+g_1 f^{(n-1)}+\cdots+g_n f,$$

其中 $g_j(j=0, 1, \cdots, n)$ 为亚纯函数. 所有这样的线性算子成为一个集合 S. 容易看出，如果对于 S 中的线性算子作前面所说的三种运算，那么所得的线性算子仍旧属于 S. 一个有趣的问题是：是否存在一个线性算子不属于 S?

参考文献

[1] Nevanlinna, R., Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[2] Dufresnoy, J., Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes voisines d'une fonction méromorphe donnée, C. R. Acad. Sc., **208** (1939), 255.

[3] Chuang Chi-tai (庄圻泰), a. Une généralisation d'une inégalité de Nevanlinna, Scientia Sinica, **13** (1964), 887—895; b. Sur les fonctions-types, *Scientia Sinica*, **10** (1961), 171—181.

[4] Borel, É., Sur les zéros des fonctions entières, *Acta Math.*, **20** (1897).

[5] Valiron, G., a. Lectures on the general theory of integral functions, Toulouse, (1923); b. Valeurs exceptionnelles et valeurs déficientes des fonctions méromorphes, *C. R. Acad. Sc.*, **225** (1947), 556—558.

[6] Hiong King-lai (熊庆来), Sur les fonctions entières et les fonctions méromorphes d'ordre infini, *Journ. de Math.*, **14** (1935).

ON THE DISTRIBUTION OF THE VALUES OF MEROMORPHIC FUNCTIONS

(CHUANG CHI-TAI)
(*Beijing University*)

ABSTRACT

In the theory of meromorphic functions the importance of the second fundamental theorem

$$(q-2)T(r, f) < \sum_{j=1}^{q} N(r, a_j) - N_1(r) + S(r)$$

is well known. In 1929, R. Nevanlinna proposed to generalize this theorem in replacing the values $a_j(j=1, 2, \cdots, q)$ by meromorphic functions $\varphi_j(z)(j=1, 2, \cdots, q)$ satisfying the condition:

$$T(r, \varphi_j) = o[T(r, f)] \quad (j=1, 2, \cdots q). \tag{1}$$

R. Nevanlinna himself solved this problem for the case $q=3$. For general value of q, it was treated by J. Dufresnoy in the particular case when φ_j $(j=1, 2, \cdots, q)$ are polynomials, and by the author in the general case when φ_j $(j=1, 2, \cdots, q)$ satisfy the condition (1).

The object of this paper is to study the same problem under weaker conditions on φ_j $(j=1, 2, \cdots, q)$, namely,

$$T(r, \varphi_j) = o_*[T(r, f)] \text{ or } T(r, \varphi_j) = o[U(r)],$$

where the first condition means that there exists a set s of values of r of finite exterior measure such that

$$\lim_{\substack{r\to+\infty \\ r\bar{\in} s}} \frac{T(r, \varphi_j)}{T(r, f)} = 0,$$

and in the second condition $U(r)$ is type-function associated to the function $f(z)$, In this way, generalizations of the second fundamental theorem are obtained, which have various applications.