数 学 年 刊
1 (1) 1980

一个变系数的波动方程的 Cauchy 问题之解

陆 启 铿
(中国科学院数学研究所)

殷 慰 萍
(中国科技大学数学系)

引 言

在[1]中，曾研究过具有最大对称性的物理时空，现在命之为 $\mathfrak{M}_K$，其中 K 代表曲率．进一步的问题自然是要研究这些时空的波动方程的解．当 $K=0$，这是熟知的经典的常系数的波动方程，它的讨论在数学物理微分方程的书中都有的．当 $K\neq 0$ 时，$\mathfrak{M}_K$ 中的波动方程是变系数的，它的 Cauchy 问题的解的具体表达式还未见到过．由于 $K>0$ 与 $K<0$ 情形的解决方法都是一样的，我们这里仅讨论 $K>0$ 的情形．在此情形可以经变数的变换化为下面的方程(5)．这个方程在单位超球内是椭圆型的，它的讨论已包含在[2]中．此方程在单位超球内外一起而言，是混合型的，当 $n=2$ 时在[3]中曾讨论过，而当 n 为一般时，在[4]中亦有讨论．本文仅讨论在单位超球外部，此方程是双曲型的，但只纯粹从数学的角度讨论，其物理解释，以后有机会时再讨论．

本文所用的方法是经典的 Hadamard 方法[5,6]，但有两处地方稍加变更：第一我们所用的基本解与 Hadamard 所用的有所不同；第二我们的降维方法亦非沿用 Hadamard 的方法．这是由于我们研究的方程是具体的方程，它的基本解可以从解测地线微分方程及利用空间的最大对称性具体地得出．降维法也可以不用一般的复杂的方法[5]．由于物理上有兴趣的是维数 $n=4$，是偶维，需用降维法处理，其 Cauchy 问题解的具体表达式见本文之末．

我们考虑常曲率劳伦兹空间 $\mathfrak{M}_K$

$$1+K\eta_{pq}x^px^q>0 \tag{1}$$

中的波动方程

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{|\tilde g|}\,\tilde g^{jk}\frac{\partial u}{\partial x^k}\right)=0 \tag{2}$$

其中，K 为实常数，$(\eta_{pq})=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1\end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{aligned}&\tilde g^{jk}=(1+K\eta_{pq}x^px^q)(\eta_{jk}+Kx^jx^k)\\&\tilde g_{jk}=\frac{\eta_{jk}}{1+K\eta_{pq}x^px^q}-\frac{K\eta_{jp}x^p\eta_{kq}x^q}{(1+K\eta_{pq}x^px^q)^2}\\&|\tilde g|=|\det(\tilde g_{jk})|=|1+K\eta_{pq}x^px^q|^{-(n+1)}\end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

本文 1978 年 8 月 30 日收到．

这里使用了符号省略.

我们研究方程(2)的 Cauchy 问题. 而且只考虑 $K>0$ 的情形(其他情形与此类似). 这时,作变换

$$\tilde{x}^i=\sqrt{K}x^i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

在这变换下 $\mathfrak{M}_K$ 与相应的波动方程恰巧变成为在(1), (2)及(2′)中令 $K=1$ 的情况. 因此,在下面只讨论 $K=1$ 的情形. 这时作变换

$$\left.\begin{aligned}&x_i=\frac{x^i}{x^n},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\\&x_n=\frac{1}{x^n}.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

在这变换下 $\mathfrak{M}_1$ 变成 $\mathfrak{M}$

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2>1.$$

方程(2)变成

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{|g|}\,g^{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=0\tag{4}$$

其中

$$g^{jk}=(1-|x|^2)(\delta_{jk}-x_jx_k)$$

$$g_{jk}=\frac{x_jx_k}{(|x|^2-1)^2}-\frac{\delta_{jk}}{|x|^2-1}$$

$$|g|=|\det(g_{jk})|=(|x|^2-1)^{-(n+1)}$$

显然,方程(4)在空间 $\mathfrak{M}$ 内是正规双曲型. 我们研究方程(4)的 Cauchy 问题

$$\text{I.}\quad\begin{cases}\displaystyle\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{|g|}\,g^{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=0,\\ U\Big|_{x\in S}=U_0(x),\quad \dfrac{du}{d\nu}\Big|_{x\in S}=U_1(x).\end{cases}$$

其中 S 为空向曲面, U_0, U_1 是连续 n 次可微函数, $\dfrac{du}{d\nu}$ 表示函数 u 对于方程(4)的在曲面 S 上的补法线方向微商(这里所用术语见[1]). 习知, 问题 I 的解存在且唯一. 本文目的是把这解具体求出来, 众所周知, 偏微分方程各种定解问题中, 将解用显式表示出来的情形是非常罕见的, 也是相当困难的, 然而研究微分方程的根本目的却是把解求出来. 饶有兴趣的是,对问题 I 我们得到了解的具体表达式. 本文, 我们首先求出方程(2)及(4)的非 Hadamard 意义下的基本解, 然后利用它把问题 I 的解用瑕积分的有限部分表示出来, 最后对具体给出了的空向曲面我们把瑕积分的有限部分化成通常的积分.

一、方程(2)与(4)的基本解

方程(2)等价于下列方程

$$(1+\eta_{pq}x^px^q)\left[(\eta_{jk}+x^jx^k)\frac{\partial^2u}{\partial x^j\partial x^k}+2x^j\frac{\partial u}{\partial x^j}\right]=0.\tag{5}$$

习知, 为了求正规双曲型的基本解, 必须求出特征锥面, 而特征锥面与测地距离有密切关系, 因此, 我们首先求出空间 $\mathfrak{M}_1$ 中线元为: $ds^2=\tilde{g}_{jk}dx^jdx^k$ 的测地线, 此即要解测地线方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x^j}{dt^2}+\widetilde{\Gamma}^j_{kl}(x)\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}=0,\\&x^j(0)=a^j,\ x^j(1)=b^j.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

其中
$$\widetilde{\Gamma}^j_{kl}(x)=\frac{1}{2}\widetilde{g}^{jp}\left(\frac{\partial\widetilde{g}_{kp}}{\partial x^l}+\frac{\partial\widetilde{g}_{lp}}{\partial x^k}-\frac{\partial\widetilde{g}_{kj}}{\partial x^p}\right).$$

经计算
$$\widetilde{\Gamma}^j_{kl}(x)=-\frac{(\delta_{lj}\eta_{kr}+\delta_{kj}\eta_{lr})x^r}{1+\eta_{pq}x^px^q}.$$

于是(6)可化为

$$\frac{d^2x^j}{dt^2}-\frac{2\eta_{kl}x^k\dfrac{dx^l}{dt}}{1+\eta_{pq}x^px^q}\frac{dx^j}{dt}=0,$$

即
$$\frac{d}{dt}\left(\log\frac{dx^j}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\log(1+\eta_{pq}x^px^q)=0.$$

积分之后有
$$\frac{dx^j}{dt}=(1+\eta_{pq}x^px^q)A^j.$$

其中 A^j 为积分常数，由此有

$$\frac{dx^1}{A^1}=\frac{dx^2}{A^2}=\cdots=\frac{dx^n}{A^n}.\tag{7}$$

因而得

定理 空间 $\mathfrak{M}_1$ 的测地线是直线.

当 $A^n\neq0$ 时，由(7)积分得到直线方程为

$$x^\alpha=\frac{A^\alpha}{A^n}x^n+B^\alpha,\quad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.\tag{8}$$

其中 B^α 为积分常数，要此直线经过 a、b 两点，便要求

$$\frac{A^\alpha}{A^n}=\frac{b^\alpha-a^\alpha}{b^n-a^n},\quad B^\alpha=\frac{a^\alpha b^n-b^\alpha a^n}{b^n-a^n}\tag{9}$$

先求原点与 c 点之间的测地距离 $\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(0,\ c)$. 当 $c^n\neq0$ 时，据(8)、(9)则原点与 c 点之间的测地线能表达为

$$x^\alpha=\frac{c^\alpha}{c^n}x^n,\quad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$$

原点与 c 点之间的测地距离定义为

$$\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(0,\ c)=\int_0^1\left|\widetilde{g}_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right|^{\frac{1}{2}}dt=\int_0^{c^n}\left|\widetilde{g}_{jk}\frac{dx^j}{dx^n}\frac{dx^k}{dx^n}\right|^{\frac{1}{2}}dx^n.$$

由于沿测地线有

$$\frac{dx^j}{dx^n}=\frac{c^j}{c^n}=\frac{x^j}{x^n}.$$

所以有
$$\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(0,\ c)=\int_0^{c^n}\left|\frac{\eta_{jk}c^jc^k}{1+\eta_{pq}c^pc^q\left(\dfrac{x^n}{c^n}\right)^2}-\frac{(\eta_{jk}c^jc^k)^2\left(\dfrac{x^n}{c^n}\right)^2}{\left[1+\eta_{pq}c^pc^q\left(\dfrac{x^n}{c^n}\right)^2\right]^2}\right|^{\frac{1}{2}}\frac{dx^n}{c^n}$$

$$=\int_0^{c^n}\frac{|\eta_{jk}c^jc^k|^{\frac{1}{2}}d\left(\dfrac{x^n}{c^n}\right)}{1+|\eta_{pq}c^pc^q|\left(\dfrac{x^n}{c^n}\right)^2}=\frac{1}{2}\log\frac{1+|\eta_{jk}c^jc^k|^{\frac{1}{2}}}{1-|\eta_{jk}c^jc^k|^{\frac{1}{2}}}.$$

现求任两点 a 与 b 之间的测地距离 $\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(a,\ b)$. 为此,我们指出,下列变换

$$y^j=\sqrt{1+\eta_{pq}x^px^q}\ \frac{(x^k-a^k)B^j_k}{1+\eta_{rs}a^rx^s},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{10}$$

其中 a^j 与 B^j_k 为常数,适合

$$1+\eta_{pq}a^pa^q>0,\ \eta_{pq}B^p_jB^q_k=\eta_{jk}-\frac{\eta_{jr}\eta_{ks}a^ra^s}{1+\eta_{pq}a^pa^q}. \tag{11}$$

将 $\mathfrak{M}$ 变为 $\mathfrak{M}_1$. 参阅[2].

作变换(10),此变换将 a 点映为原点,设它把 b 点映为 c 点,则有

$$c^j=\sqrt{1+\eta_{pq}a^pa^q}\ \frac{(b^k-a^k)B^j_k}{1+\eta_{pq}a^pb^q} \tag{12}$$

由于测地线及测地距离经 $\mathfrak{M}_1$ 的运动群不变,因此有

$$\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(a,\ b)=\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(0,\ c)=\frac{1}{2}\log\frac{1+|\eta_{jk}c^jc^k|^{\frac{1}{2}}}{1-|\eta_{pq}c^pc^q|^{\frac{1}{2}}}. \tag{13}$$

由(12)式,有

$$\eta_{jk}c^jc^k=(1+\eta_{pq}a^pa^q)\frac{\eta_{jk}(a^r-b^r)(a^s-b^s)B^j_rB^k_s}{(1+\eta_{il}a^ib^l)^2}.$$

应用(11)的第二式,有

$$\begin{aligned}\eta_{jk}c^jc^k=&\frac{1+\eta_{pq}a^pa^q}{(1+\eta_{il}a^ib^l)^2}\Big[\eta_{rs}(a^r-b^r)(a^s-b^s)\\&-\frac{1}{1+\eta_{\mu\nu}a^\mu a^\nu}\cdot\eta_{rp}\eta_{sq}a^pa^q(a^r-b^r)(a^s-b^s)\Big]\\=&\frac{1}{(1+\eta_{il}a^ib^l)^2}\{\eta_{rs}(a^r-b^r)(a^s-b^s)+\eta_{pq}a^pa^q\eta_{rs}b^rb^s-(\eta_{pq}a^pa^q)^2\}.\end{aligned}$$

令

$$\widetilde{\varphi}(a,\ b)=\frac{\eta_{rs}(a^r-b^r)(a^s-b^s)+\eta_{pq}a^pa^q\eta_{rs}b^rb^s-(\eta_{pq}a^pa^q)^2}{(1+\eta_{il}a^ib^l)^2} \tag{14}$$

由此得出点 a 与点 b 之间测地距离为

$$\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(a,\ b)=\frac{1}{2}\log\frac{1+|\widetilde{\varphi}(a,\ b)|^{\frac{1}{2}}}{1-|\widetilde{\varphi}(a,\ b)|^{\frac{1}{2}}}. \tag{15}$$

经计算,易知

$$\widetilde{\varphi}(a,\ b)=\left(\frac{1+\eta_{pq}a^pa^q}{1+\eta_{il}a^ib^l}\right)^2\widetilde{g}_{rs}(a)(a^r-b^r)(a^s-b^s). \tag{16}$$

由于 $\widetilde{\varphi}(a,\ b)=\widetilde{\varphi}(b,\ a)$, 故有

$$\widetilde{\varphi}(a,\ b)=\left(\frac{1+\eta_{pq}b^pb^q}{1+\eta_{il}a^ib^l}\right)^2\widetilde{g}_{rs}(b)(a^r-b^r)(a^s-b^s). \tag{17}$$

因此,方程(5)的特征锥面就是使下式成立的所有 x 的集合所形成的超曲面

$$\widetilde{\Gamma}^{\frac{1}{2}}(x,\ a)=0,$$

据(13)此即

$$\widetilde{\varphi}(x,\ a)=0,$$

据(16)此即

$$\widetilde{g}_{jk}(a)(x^j-a^j)(x^k-a^k)=0. \tag{18}$$

点 x 与点 a 之间测地距离的平方为

$$\widetilde{\Gamma}(x,\ a)=\left[\frac{1}{2}\log\frac{1+|\widetilde{\varphi}(x,\ a)|^{\frac{1}{2}}}{1-|\widetilde{\varphi}(x,\ a)|^{\frac{1}{2}}}\right]^2. \tag{19}$$

在变换(3)下，$\mathfrak{M}_1$ 变为 $\mathfrak{M}$，方程(2)变为方程(4)，易知，$\mathfrak{M}$ 中任意点 x 与点 a 之间的测地距离的平方为

$$\Gamma(x,\ a)=\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+|\varphi|^{\frac{1}{2}}}{1-|\varphi|^{\frac{1}{2}}}\right)^2. \tag{20}$$

此时，以 $ds^2=\sum\limits_{j,k=1}^{n}g_{jk}dx_j dx_k$ 为线元，其中

$$\varphi=\varphi(x,\ a)=1-\frac{(|x|^2-1)(|a|^2-1)}{(ax'-1)^2}. \tag{21}$$

显然方程(4)等价于

$$\sum_{j,k=1}^{n}g^{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}+2(|x|^2-1)\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial u}{\partial x_j}=0. \tag{22}$$

不难看出方程(22)的特征锥面为 $\varphi(x,\ a)=0$. 下面我们求方程(4)的基本解. 令 $u=u(\varphi)$，方程(22)化为

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2-\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2\right]+\frac{du}{d\varphi}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}\right.$$
$$\left.-\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_j\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}-2\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right]=0. \tag{23}$$

经计算得

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2-\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2=\frac{4(|a|^2-1)}{(ax'-1)^2}\varphi(\varphi-1),$$
$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}-\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_j\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}-2\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=\frac{2(|a|^2-1)}{(ax'-1)^2}(3\varphi-n).$$

因此(23)式化为

$$2\varphi(\varphi-1)\frac{d^2u}{d\varphi^2}+(3\varphi-n)\frac{du}{d\varphi}=0. \tag{24}$$

令 $u=\varphi^{\frac{2-n}{2}}W(\varphi)$，方程(24)化为

$$\varphi(1-\varphi)\frac{d^2W}{d\varphi^2}+\left[\frac{4-n}{2}-\left(\frac{7-2n}{2}\right)\varphi\right]\frac{dW}{d\varphi}-\frac{(n-2)(n-3)}{4}W=0.$$

这是超几何方程，其解为

$$W=F\left(1-\frac{n}{2},\ \frac{3}{2}-\frac{n}{2},\ 2-\frac{n}{2},\ \varphi\right).$$

当 n 为偶数时，此解无意义. 因此，当 n 为奇数 $2m+1$ 时，我们得到(24)式的解为

$$u=\varphi^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)}F\left(-m+\frac{1}{2},\ -m+1,\ -m+\frac{3}{2},\ \varphi\right).$$

当 n 为偶数 $2m$ 时，直接从(24)式，用递推方法，求得其解为

$$u(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{1-\varphi}}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^k(2m-3)!!(m-k-1)!}{2^{k-1}(2m-2k-1)!!(m-1)!}\left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right)^{m-k}$$
$$+(-1)^{m-1}\frac{(2m-3)!!}{2^{m-1}(m-1)!}\log\frac{\varphi}{(1+\sqrt{1-\varphi})^2}.$$

因此，方程(4)的基本解如下

当 $n=2m+1$ 时，

$$v(x,\ a)=\varphi^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)}F\left(-m+\frac{1}{2},\ -m+1,\ -m+\frac{3}{2},\ \varphi\right), \tag{25}$$

当 $n=2m$ 时，

$$v(x,\ a)=\frac{1}{\sqrt{1-\varphi}}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^k(2m-3)!!(m-k-1)!}{2^{k-1}(2m-2k-1)!!(m-1)!}\left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right)^{m-k}$$
$$+(-1)^{m-1}\frac{(2m-3)!!}{2^{m-1}(m-1)!}\log\frac{\varphi}{(1+\sqrt{1-\varphi})^2}. \tag{25'}$$

二、方程(4)的 Cauchy 问题的解

设正规双曲型微分算子

$$L(u)\equiv\sum_{j,k=1}^{n}A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}+\sum_{j=1}^{n}B_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+Cu.$$

其共轭算子为

$$M(v)\equiv\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2(A_{jk}v)}{\partial x_j\partial x_k}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(B_jv)+Cv.$$

习知，当 $n=2m+1$(奇数)时，$M(v)=0$ 的 Hadamard 意义下的基本解有如下形状

$$\tilde{v}(x,\ a)=\frac{V}{\tilde{\Gamma}^{m-\frac{1}{2}}}.$$

其中

1. $\tilde{\Gamma}(x,\ a)$是以 $ds^2=\sum_{j,k=1}^{n}B_{jk}dx_jdx_k$ 为线元的空间中，点 x 与点 a 之间的测地距离的平方，这里$(B_{jk})=(A_{jk})^{-1}$.

2. 当 $x=a$ 时，$V|_{x=a}=|\varDelta_a|^{-\frac{1}{2}}$，这里 $\varDelta_a=\det(A_{jk})|_{x=a}$.

当基本解求得时，方程 $L(u)=f$ 的 Cauchy 问题解的表达式，Hadamard 已经在[5]中求出.

但是我们现在所得到的方程(4)(自共轭的)的基本解(25)并不是 Hadamard 意义下的基本解，因为形如(25)的基本解 $v(x,\ a)$ 显然不满足上述两点. 因此，对方程(4)的 Cauchy 问题就不能直接应用 Hadamard 的解的表达公式，下面，我们从形如(25)的基本解出发，导出问题 I 的解的具体表达式.

设以 a 为顶点的特征锥面 $\Gamma(x,\ a)=0$(即 $\varphi(x,\ a)=0$)与空向曲面 S 形成一封闭曲面，如是得一闭域 T. 其界面为 $\varphi=0$ 及 S_0，在 T 内挖去一个以 a 为中心的小球，设此球面与 T 交于一小块曲面为 Σ，余下部分为 T'.

由于方程(4)是自共轭的齐次方程，设 u 是问题 I 的解，则形如(25)的基本解 $v(x,\ a)$ 也是方程(4)的共轭方程(即(4)自己)的基本解. 在 T' 上，应用基本公式，我们就得到

$$\iint_{\Sigma+\Gamma+S_0}\left(v\frac{du}{d\nu}-u\frac{dv}{d\nu}\right)ds=0 \tag{26}$$

其中 $\frac{d}{d\nu}$ 是方程(4)的补法线方向导数(参阅[6]第三册第 42 页)，而且有

$$\iint_{\Gamma}\left(v\frac{du}{d\nu}-u\frac{dv}{d\nu}\right)ds=0.$$

(参阅[6]第三册第 43 页)

当 Σ 趋向于 a 时，有

$$\lim_{\Sigma\to a}\iint_{\Sigma}v\frac{du}{d\nu}ds=0,\ \lim_{\Sigma\to a}\iint_{\Sigma}\frac{u\dfrac{dF}{d\nu}}{\varphi^{m-\frac{1}{2}}}ds=0.$$

(参阅[6]第三册第 43 页).

因此，(26)式就化为

$$\iint_{S_0}\left(v\frac{du}{d\nu}-u\frac{dv}{d\nu}\right)ds+\frac{2m-1}{2}\iint_{\Sigma}\frac{uF\dfrac{d\varphi}{d\nu}}{\varphi^{m+\frac{1}{2}}}ds=0. \tag{27}$$

由(20)可见
$$\frac{d\Gamma}{d\varphi}=\Gamma^{\frac{1}{2}}\varphi^{-\frac{1}{2}}(1-\varphi)^{-1},$$

$$\frac{d\varphi}{d\nu}=\frac{d\varphi}{d\Gamma}\frac{d\Gamma}{d\nu}=\Gamma^{-\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(1-\varphi)\frac{d\Gamma}{d\nu}.$$

由定义
$$\frac{d\Gamma}{d\nu}=\sqrt{|g|}\sum_{j,k=1}^{n}g^{jk}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_k}\pi_j=\sqrt{|g|}\frac{d\Gamma}{d\nu_1}.$$

其中 $\dfrac{d}{d\nu_1}$ 为方程(22)的补法线方向导数，$\pi=(\pi_1, \cdots, \pi_n)$ 是曲面上点 x 处的单位法向量，而 $\Gamma(x, a)$ 是以 $ds^2=\sum\limits_{j,k=1}^{n}g_{jk}dx_jdx_k$ 为线元的点 x 与点 a 之间的测地距离的平方，而且当 $\varphi\to 0$ 时，有 $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\Gamma}{\varphi}=1$. 因此，当 $\Sigma\to a$(即 $\varphi\to 0$)时，有

$$\lim_{\Sigma\to a}\sqrt{|g|}\,uF\varphi^{\frac{1}{2}}\Gamma^{-\frac{1}{2}}(1-\varphi)=\sqrt{|g(a)|}u(a),$$

$$\lim_{\Sigma\to a}\iint_{\Sigma}\frac{\dfrac{d\Gamma}{u\nu_1}ds}{\varphi^{m+\frac{1}{2}}}=\lim_{\Sigma\to a}\iint_{\Sigma}\frac{\dfrac{d\Gamma}{d\nu_1}ds}{\Gamma^{m+\frac{1}{2}}}=\frac{(-1)^m 2\Pi\Omega_{2m-2}}{(2m-1)\sqrt{|D_a|}}.$$

其中 $|D_a|=|\det(g_{jk}(a))|=|g(a)|$，$\Omega_{2m-2}$ 是 $2m-2$ 维单位超球的面积. 这样，(27)式变为

$$\iint_{S_0}\left(v\frac{du}{d\nu}-u\frac{dv}{d\nu}\right)ds+(-1)^m\Pi\Omega_{2m-2}u(a)=0,$$

即

$$(-1)^m\Pi\Omega_{2m-2}u(a)=\iint_{S_0}\left(u\frac{dv}{d\nu}-v\frac{du}{d\nu}\right)ds=\iint_{S_0}\left(u_0\frac{dv}{d\nu}-vu_1\right)ds. \tag{28}$$

仿照[6]中第三册第 46 页到第 48 页，可以验证(28)确是问题 I 的解. 因此我们得到了方程(4)的 Cauchy 问题，即问题 I 的解的具体表达式(28). 这是当 $n=2m+1$(奇数)时的情形，当 $n=2m$ 为偶数时，利用降维法.

此时，Cauchy 问题为

$$\text{II.}\quad\begin{cases}\displaystyle\sum_{j,k=1}^{2m}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{|g|}\,g^{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=0,\\ u\Big|_{x\in S}=u_0,\ \dfrac{du}{d\nu}\Big|_{x\in S}=u_1.\end{cases}$$

其中 S 为空向曲面，设其方程为 $G(x_1, \cdots, x_{2m})=0$，很显然，问题 II 的解也必然为如下问题的解

$$\text{III.}\ \begin{cases}\displaystyle\sum_{j,k=1}^{2m+1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{|g|}\,g^{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=0,\\ u\Big|_{x\in S'}=u_0(x_1, \cdots, x_{2m}),\ \dfrac{du}{d\nu}\Big|_{x\in S'}=u_1(x_1, \cdots, x_{2m}).\end{cases}$$

其中 S' 为如下方程所表示的曲面

$$\begin{cases}G(x_1, x_2, \cdots, x_{2m})=0,\\ x_{2m+1}\ \text{任意},\end{cases}$$

这是 $2m+1$ 维空间中的一个柱面.

由上可知，问题 III 的解可以由(28)表示，而问题 III 的解是唯一的，因此由(28)所表示的解也就是问题 II 的解，而且此解与最后一个变量无关，因此. 我们对 $n=2m$ 的情况得到问题 II 的解的如下表达式

$$(-1)^m\Pi\Omega_{2m-2}u(a)=\iint\limits_{S_0'}\left(u_0\frac{dv}{d\nu}-u_1v\right)ds. \tag{28'}$$

其中 a 是 $2m$ 维空间中的点，$v(x, a)$是方程(4)的基本解具有(25)的形式，但其中 $a=(a_1, \cdots, a_{2m}, 0)$. S_0' 是 $\Gamma(x, a)=0$ 与 S' 之交在 S' 上所范围的一部分曲面.

这样，我们对于方程(4)的 Cauchy 问题给出了它的解的具体表达形式(28)及(28)′，式中的积分都是 Hadamard 意义下的瑕积分的有限部分. 当空向曲面 S 具体给出时，可以把这种瑕积分的有限部分化为通常的积分. 下面，当我们取 S 为超球面时，给出(28)及(28)′的通常积分的表达式.

三、方程(4)的 Cauchy 问题的解(续)

1. 设 n 为奇数，即当 $n=2m+1$ 时，S 为超球面

$$x_1^2+\cdots+x_{2m+1}^2=r^2,\quad r>1.$$

下面我们把(28)式化为通常积分.

因 $$\frac{dv}{d\nu}=\frac{dv}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\nu}=\left[-\frac{2m-1}{2}\varphi^{-\frac{2m+1}{2}}F+\varphi^{-\frac{2m-1}{2}}\frac{dF}{d\varphi}\right]\frac{d\varphi}{d\nu}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\nu}&=\sum_{j,k=1}^{n}\sqrt{g}\,g^{jk}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\pi_j=-(|x|^2-1)^{-\frac{n-1}{2}}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\delta_{jk}-x_jx_k)\pi_j\\&=-(|x|^2-1)^{-\frac{n-1}{2}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(I-x'x)\pi'.\end{aligned}$$

其中 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$，所以有

$$\frac{dv}{d\nu}=\left[\frac{2m-1}{2}\varphi^{-\frac{2m+1}{2}}F-\varphi^{-\frac{2m-1}{2}}\frac{dF}{d\varphi}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial x}(I-x'x)\pi'(|x|^2-1)^{-m}.$$

其中 $\pi=|x|^{-1}(x_1, \cdots, x_{2m+1})$. 我们作变换

$$y=xQ,$$

使得 Q 满足条件

$$QQ'=I^{(n)},\quad aQ=(|a|,\ 0,\ \cdots,\ 0). \tag{29}$$

这是绕原点的一个旋转，它把 a 点转到$(|a|,\ 0,\ \cdots,\ 0)$，在这旋转下，超球面上的面积元素不变，而且有

$$\varphi=1-(|a|y_1-1)^{-2}(|a|^2-1)(|y|^2-1),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(I-x'x)\pi'(|x|^2-1)^{-m}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(I-y'y)y'|y|^{-1}(|y|^2-1)^{-m},$$

$$u_0=u_0(yQ'),\quad u_1=u_1(yQ').$$

以此代入(28)，并将 y 仍记为 x，则(28)变为

$$(-1)^m\pi\Omega_{2m-2}u(a)=\iint\limits_{S_0}\Big\{u_0(xQ')\Big[\frac{2m-1}{2}\varphi^{-\frac{2m+1}{2}}F-\varphi^{-\frac{2m-1}{2}}\frac{dF}{d\varphi}\Big] \cdot(|x|^2-1)^{-m}|x|^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(I-x'x)x'-u_1(xQ')\varphi^{-\frac{2m-1}{2}}F\Big\}ds. \tag{30}$$

其中 Q 满足(29)，

$$\varphi=1-(|a|x_1-1)^{-2}(|a|^2-1)(|x|^2-1). \tag{31}$$

S_0 是超球面 S 的一部分，其边界是此超球面与以$(|a|,\ 0,\ \cdots,\ 0)$为顶点的特征锥面的交集.

作变换 $\quad x_1=\Big(r^2-\sum\limits_{i=1}^{2m}\lambda_i^2\Big)^{\frac{1}{2}},\quad x_j=\lambda_{j-1},\quad j=2,\ \cdots,\ 2m+1.$

记 $\lambda_0=\Big(r^2-\sum\limits_{i=1}^{2m}\lambda_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$，由(31)式可知

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\frac{2(|a|^2-1)(r^2-1)}{(|a|\lambda_0-1)^3}|a|-\frac{2(|a|^2-1)}{(|a|\lambda_0-1)^2}\lambda_0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=-\frac{2(|a|^2-1)}{(|a|\lambda_0-1)^2}\lambda_{i-1},\quad i=2,\ 3,\ \cdots,\ 2m+1.$$

在这变换下，经计算，(30)变为

$$(-1)^m\pi\Omega_{2m-2}u(a)=\iint\limits_{\sum\limits_{i=1}^{2m}\lambda_i^2\le\rho_0^2}\Big\{u_0(\lambda Q')\Big[\frac{2m-1}{2}\varphi^{-\frac{2m+1}{2}}F-\varphi^{-\frac{2m-1}{2}}\Big(\frac{dF}{d\varphi}+\frac{2m-1}{2}F\Big) +\varphi^{-\frac{2m-3}{2}}\frac{dF}{d\varphi}\Big](r^2-1)^{-m}\frac{2(|a|\lambda_0-r^2)}{\lambda_0(|a|\lambda_0-1)} -u_1(\lambda Q')v\frac{r}{\lambda_0}\Big\}d\lambda_1\cdots d\lambda_{2m}. \tag{32}$$

其中 $\lambda=(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_{2m})$，$\varphi=1-(|a|\lambda_0-1)^{-2}(|a|^2-1)(r^2-1)$.

令

$$\rho_0=\begin{cases}|a|^{-1}(\sqrt{|a|^2-1}-\sqrt{r^2-1}), & \text{当 } |a|>r>1 \text{ 时},\\ |a|^{-1}(\sqrt{r^2-1}-\sqrt{|a|^2-1}), & \text{当 } 1<|a|<r \text{ 时},\end{cases} \tag{33}$$

作极坐标变换

$$\lambda_1=\rho\cos\theta_1,$$
$$\lambda_2=\rho\sin\theta_1\cos\theta_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\lambda_{2m-1}=\rho\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2m-2}\cos\theta_{2m-1},$$
$$\lambda_{2m}=\rho\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_{2m-2}\sin\theta_{2m-1}.$$

其中 $0<\rho\leqslant\rho_0$, $0\leqslant\theta_{2m-1}\leqslant 2\Pi$, $0\leqslant\theta_i\leqslant\Pi$, $i=1, 2, \cdots, 2m-2$. 在此变换下

$$u_0=u_0((\rho,\ \theta)Q'),\quad u_1=u_1((\rho,\ \theta)Q'),$$

$$d\lambda_1\cdots d\lambda_{2m}=\rho^{2m-1}d\rho\dot{\Omega}_{2m-2}.$$

其中 $\dot{\Omega}_{2m-2}=\sin^{2m-2}\theta_1\sin^{2m-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{2m-2}d\theta_1d\theta_2\cdots d\theta_{2m-1}$. 这是 $2m-1$ 维空间中的单位超球面 Ω_{2m-2} 的面积元素，这时(32)式变为:

$$\begin{aligned}(-1)^m\Pi\Omega_{2m-2}u(a)=\int_{\Omega_{2m-2}}\dot{\Omega}_{2m-2}\int_0^{\rho_0}\Big\{u_0\Big[\frac{2m-1}{2}\varphi^{-\frac{2m+1}{2}}F-\varphi^{-\frac{2m-1}{2}}\Big(\frac{dF}{d\varphi}+\frac{2m-1}{2}F\Big)\\ +\varphi^{-\frac{2m-3}{2}}\frac{dF}{d\varphi}\Big](r^2-1)^{-m}\frac{2(|a|\sqrt{r^2-\rho^2}-r^2)}{\sqrt{r^2-\rho^2}(|a|\sqrt{r^2-\rho^2}-1)}\rho^{2m-1}\\ -u_1\varphi^{-\frac{2m-1}{2}}F\frac{r\rho^{2m-1}}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\Big\}d\rho,\end{aligned}\tag{34}$$

其中 $\varphi=(|a|\sqrt{r^2-\rho^2}-1)^{-2}[(|a|\sqrt{r^2-\rho^2}-1)^2-(|a|^2-1)(r^2-1)]$.

再作变数代换，$t=|a|\sqrt{r^2-\rho^2}-1$ 并记

$$\alpha_1=|a|r-1,\quad \beta_1=\sqrt{(|a|^2-1)(r^2-1)}.\tag{35}$$

在这变换下

$$\varphi=t^{-2}(t^2-\beta_1^2),\quad \frac{2(|a|\sqrt{r^2-\rho^2}-r^2)(r^2-1)^{-m}}{\sqrt{r^2-\rho^2}(|a|\sqrt{r^2-\rho^2}-1)}=\frac{2|a|(t-r^2+1)(r^2-1)^{-m}}{t(t+1)},$$

$$\rho^{2m-1}d\rho=-|a|^{-2m}(t+1)(|a|^2r^2-(t+1)^2)^{m-1}dt,$$

$$\frac{r}{\sqrt{r^2-\rho^2}}=\frac{|a|r}{t+1}.$$

并令

$$\left.\begin{aligned}F_1&=\frac{(2m-1)(t-r^2+1)(|a|^2r^2-(t+1)^2)^{m-1}t^{2m}F}{|a|^{2m-1}(r^2-1)^m(t+\beta_1)^{\frac{2m+1}{2}}},\\ F_2&=-\frac{2(t-r^2+1)(|a|^2r^2-(t+1)^2)^{m-1}}{|a|^{2m-1}(r^2-1)^m(t+\beta_1)^{\frac{2m-1}{2}}}t^{2m-2}\Big(\frac{dF}{d\varphi}+\frac{2m-1}{2}F\Big),\\ F_3&=\frac{2(t-r^2+1)(|a|^2r^2-(t+1)^2)^{m-1}}{|a|^{2m-1}(r^2-1)^m(t+\beta_1)^{\frac{2m-3}{2}}}t^{2m-4}\frac{dF}{d\varphi},\\ F_4&=\frac{r(|a|^2r^2-(t+1)^2)^{m-1}}{|a|^{2m-1}(t+\beta_1)^{\frac{2m-1}{2}}}t^{2m-1}F.\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

这样，易见(34)式化为

$$\begin{aligned}(-1)^m\Pi\Omega_{2m-2}u(a)=\int_{\Omega_{2m-2}}\dot{\Omega}_{2m-2}\int_{\beta_1}^{\alpha_1}\Big[\frac{u_0F_1}{(t-\beta_1)^{\frac{2m+1}{2}}}+\frac{(u_0F_2+u_1F_4)}{(t-\beta_1)^{\frac{2m-1}{2}}}\\ +\frac{u_0F_3}{(t-\beta_1)^{\frac{2m-3}{2}}}\Big]dt.\end{aligned}\tag{37}$$

由于有

$$\int_{\beta_1}^{\alpha_1}\frac{A(t)dt}{(t-\beta_1)^{p+\frac12}}=\sum_{i=0}^{p-1}\frac{A^{(i)}(\beta_1)(\alpha_1-\beta_1)^{i-p+\frac12}}{i!\left(i-p+\frac12\right)}+\int_{\beta_1}^{\alpha_1}\frac{\widetilde{A}(t)dt}{(t-\beta_1)^{p+\frac12}},\tag{38}$$

其中
$$\widetilde{A}(t)=A(t)-\sum_{i=0}^{p-1}\frac{A^{(i)}(\beta_1)(t-\beta_1)^i}{i!}.$$
所以(37)式都可按照(38)式化为通常积分.

2．当 $n=2m$ 偶数时，取 S' 为如下柱面
$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{2m}^2=r^2>1,\\ x_{2m+1}\text{ 任意}.\end{cases}$$
下面我们把表达式(28)′化为通常的积分．由于在(28)′中 $a=(a_1,\ \cdots,\ a_{2m},\ 0)$．我们取 Q_1 满足
$$Q_1Q_1'=I,\quad (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2m})Q_1=(|a|,\ 0,\ \cdots,\ 0).$$
从而与1．一样，可以假设在(28)′的右端 $a=(|a|,\ 0,\ \cdots,\ 0)$．这时
$$u_0=u_0((x_1,\ \cdots,\ x_{2m})Q_1'),\quad u_1=u_1(x_1,\ \cdots,\ x_{2m})Q_1').$$
此时，(28)′化为
$$(-1)^m \Pi\Omega_{2m-2}u(a)=\iint_{S_0'}\Big[u_0\frac{dv}{d\nu}-u_1v\Big]ds. \tag{39}$$
其中 $u_0,\ u_1$ 如上述，$\varphi=(|a|x_1-1)^{-2}[(|a|x_1-1)^2-(|a|^2-1)(|x|^2-1)]$，$S_0'$ 为 $\varphi=0$ 在 S' 上所范围的曲面．

由于
$$\frac{dv}{d\nu}=-(|x|^2-1)^{-m}\frac{dv}{d\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(I-x'x)\pi',$$
其中
$$\pi=\Big(\sum_{i=1}^{2m}x_i^2\Big)^{-\frac{1}{2}}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{2m},\ 0).$$
作圆柱坐标
$$\begin{aligned}&x_1=r\cos\theta_1,\\&x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\&\cdots\cdots\\&x_{2m-1}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2m-2}\cos\theta_{2m-1},\\&x_{2m}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2m-2}\sin\theta_{2m-1},\\&x_{2m+1}=t.\end{aligned}$$
这时，(39)式化为
$$\begin{aligned}(-1)^m\pi\Omega_{2m-2}u(a)=&\int_{\Omega_{2m-3}}\dot{\Omega}_{2m-3}\int_0^{\theta_0}r^{2m-1}\sin^{2m-2}\theta_1\,d\theta_1\int_0^{\sqrt{\alpha}}\Big\{\frac{4u_0(|a|\cos\theta_1-r)}{(|a|r\cos\theta_1-1)}\\&\cdot(t^2+r^2-1)^{-m}(1-\varphi)\Big[\frac{2m-1}{2}\varphi^{-\frac{2m+1}{2}}F-\varphi^{-\frac{2m-1}{2}}\frac{dF}{d\varphi}\Big]\\&-u_1v\Big\}dt.\end{aligned}\tag{40}$$
其中 $u_0,\ u_1$ 与 t 无关，而且
$$\sqrt{\alpha}=\sqrt{\frac{(|a|r\cos\theta_1-1)^2-(|a|^2-1)(r^2-1)}{|a|^2-1}},$$
$$\theta_0=\cos^{-1}\Big(\frac{1+(|a|^2-1)^{\frac{1}{2}}(r^2-1)^{\frac{1}{2}}}{|a|r}\Big).$$
记 $\beta=\dfrac{|a|^2-1}{(|a|r\cos\theta_1-1)^2}$，则 φ 可写为 $\varphi=\beta(\alpha-t^2)$．由于

$$F=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_i(-m+1)_i}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i}\varphi^i=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_i(-m+1)_i}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i}\beta^i(\alpha-t^2)^i,$$

$$\frac{dF}{d\varphi}=-\frac{(m-1)(2m-1)}{2m-3}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i(-m+2)_i}{\left(-m+\frac{5}{2}\right)_i}\beta^i(\alpha-t^2)^i,$$

这样，(40)化为

$$\begin{aligned}(-1)^m\Pi\Omega_{2m-2}u(a)=&\int_{\Omega_{2m-3}}\dot{\Omega}_{2m-3}\int_0^{\theta_0}r^{2m-1}\sin^{2m-2}\theta_1\,d\theta_1\\
&\cdot\int_0^{\sqrt{\alpha}}\Bigg\{\frac{4u_0(|a|\cos\theta_1-r)(t^2+r^2-1)^{-m}}{(|a|r\cos\theta_1-1)(\alpha-t)^{\frac{1}{2}}}\\
&\cdot\Bigg[\frac{2m-1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_i(-m+1)_i}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i}\beta^{i-\frac{2m+1}{2}}(\alpha-t^2)^{i-m}\\
&-\frac{2m-1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_i(-m+1)_i}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i}\beta^{i-\frac{2m-1}{2}}(\alpha-t^2)^{i-m+1}\\
&+\frac{(m-1)(2m-1)}{2m-3}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i(-m+2)_i}{\left(-m+\frac{5}{2}\right)_i}\beta^{i-\frac{2m-1}{2}}(\alpha-t^2)^{i-m+1}\\
&-\frac{(m-1)(2m-1)}{2m-3}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i(-m+2)_i}{\left(-m+\frac{5}{2}\right)_i}\beta^{i-\frac{2m-3}{2}}(\alpha-t^2)^{i-m+2}\Bigg]\\
&-\frac{u_1}{(\alpha-t^2)^{\frac{1}{2}}}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_i(-m+1)_i}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i}\beta^{i-\frac{2m-1}{2}}(\alpha-t^2)^{i-m+1}\Bigg\}dt.\end{aligned}\tag{41}$$

其中　$(N)_0=1,\ (N)_i=N(N+1)\cdots(N+i-1),\ (i>0).$

根据 Hadamard 所定义的瑕积分的有限部分的性质，若已知

$$\int_0^{\sqrt{\alpha}}(t^2+r^2-1)^{-m}(\alpha-t^2)^{-\frac{1}{2}}dt=f(\alpha,\ r^2-1).\tag{42}$$

则有

$$\int_0^{\sqrt{\alpha}}\frac{(t^2+r^2-1)^{-m}(\alpha-t^2)^{-\frac{1}{2}}}{(\alpha-t^2)^k}dt=(-1)^k\frac{2^k\partial^k f}{(2k-1)!!\partial\alpha^k}.\tag{43}$$

下面我们就来求(42)式中积分之值．作变换

$$s=\frac{t}{\sqrt{\alpha-t^2}},$$

并记 $l=r^2-1$，则有

$$\int_0^{\sqrt{\alpha}}(t^2+r^2-1)^{-m}(\alpha-t^2)^{-\frac{1}{2}}dt=\int_0^{+\infty}\frac{(1+s^2)^{m-1}}{[(\alpha+l)s^2+l]^m}ds.$$

根据 Hermitian 方法，我们求得

$$\int_0^{\infty}\frac{(1+s^2)^{m-1}}{[(\alpha+l)s^2+l]^m}ds=\frac{\Pi b_0}{2l\sqrt{l+\alpha}}$$

$$=\frac{\Pi b_0}{2(r^2-1)\sqrt{r^2+\alpha-1}}=f.$$

其中

$$b_0=\frac{\det A_0}{\det A},$$

$$A=\begin{bmatrix} l^{m-1} & c_{m-1}^1 l^{m-2}(\alpha+l) & \cdots & c_{m-1}^i l^{m-1-i}(\alpha+l)^i & \cdots & c_{m-1}^{m-2} l(\alpha+l)^{m-2} & (\alpha+l)^{m-1} \\ l & (-2m+3)(\alpha+l) & & & & & \\ & 3l & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & (-2m+1+2i)(\alpha+l) & & & \\ & & & (2i+1)l & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & -3(\alpha+l) & \\ & & & & & (2m-3)l & -(\alpha+l) \end{bmatrix}.$$

即 A 的第一行元素一般式是 $c_{m-1}^k l^{m-1-k}(\alpha+l)^k$，$(k=0, 1, 2, \cdots, m-1)$. A 的主对角线上的元素除了第一个元素外，其余元素一般式是 $(-2m+1+2i)(\alpha+l)$，$(i=1, 2, \cdots, m-1)$，A 的次对角线元素一般式是 $(2i+1)l$，$(i=0, 1, 2, \cdots, m-2)$. A 的其余位置是零. A_0 是 A 的第一列元素依次换为 $c_{m-1}^i(i=0, 1, 2, \cdots, m-1)$ 之后而成的方阵. 因此，(41)式变为

$$(-1)^m\Pi\Omega_{2m-2}u(a)=\int_{\Omega_{2m-2}}\dot{\Omega}_{2m-3}\int_0^{\theta_0}r^{2m-1}\sin^{2m-2}\theta_1\left\{\frac{4u_0(|a|\cos\theta_1-r)}{|a|r\cos\theta_1-1}\right.$$

$$\cdot\left[\frac{2m-1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_i(-m+1)_i(-1)^{m-i}2^{m-i}}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i(2m-2i-1)!!}\beta^{i-\frac{2m-1}{2}}\frac{\partial^{(m-i)}f}{\partial\alpha^{(m-i)}}\right.$$

$$-\frac{2m-1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_i(-m+1)_i(-1)^{m-i-1}2^{m-i-1}}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i(2m-2i-3)!!}\beta^{i-\frac{2m-1}{2}}\frac{\partial^{(m-i-1)}f}{\partial\alpha^{(m-i-1)}}$$

$$+\frac{(m-1)(2m-1)}{2m-3}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i(-m+2)_i(-1)^{m-i-1}2^{m-i-1}}{\left(-m+\frac{5}{2}\right)_i(2m-2i-3)!!}\beta^{i-\frac{2m-1}{2}}\frac{\partial^{(m-i-1)}f}{\partial\alpha^{(m-i-1)}}$$

$$-\frac{(m-1)(2m-1)}{2m-3}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_i(-m+2)_i(-1)^{m-i-2}2^{m-i-2}}{\left(-m+\frac{5}{2}\right)_i(2m-2i-5)!!}\beta^{i-\frac{2m-3}{2}}\frac{\partial^{(m-i-2)}f}{\partial\alpha^{(m-i-2)}}\Bigg]$$

$$-u_1\frac{\left(-m+\frac{1}{2}\right)_{m-1}(-m+1)_{m-1}}{\left(-m+\frac{3}{2}\right)_{m-1}}\frac{\Pi}{2}\beta^{-\frac{1}{2}}\Bigg\}d\theta_1. \tag{44}$$

其中　$$\beta=\frac{|a|^2-1}{(|a|r\cos\theta_1-1)^2},\quad \alpha=\frac{(|a|r\cos\theta_1-1)^2-(|a|^2-1)(r^2-1)}{|a|^2-1},$$

$$f=\frac{\Pi}{2(r^2-1)\sqrt{r^2+\alpha-1}}\frac{\det A_0}{\det A},\quad \theta_0=\cos^{-1}\left(\frac{1+(|a|^2-1)^{\frac{1}{2}}(r^2-1)^{\frac{1}{2}}}{|a|r}\right),$$

$$u_0=u_0((r,\theta)Q_1'),\quad u_1=u_1((r,\theta)Q_1'),$$

$$Q_1Q_1'=I,\quad (a_1,\cdots,a_{2m})Q_1=(|a|,0,\cdots,0).$$

当 $m=2$ 时，

$$\Pi\Omega_2u(a)=\int_{\Omega_1}\dot{\Omega}_1\int_0^{\theta_0}\Bigg\{\frac{4\Pi u_0r^3(|a|\cos\theta_1-r)}{(|a|r\cos\theta_1-1)(r^2-1)^2}\sin^2\theta_1\Bigg[\frac{3}{4}\beta^{-\frac{1}{2}}(r^2+\alpha-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{3}{4}\beta^{-\frac{5}{2}}(r^2+\alpha-1)^{-\frac{5}{2}}-\frac{3}{2}\beta^{-\frac{3}{2}}(r^2+\alpha-1)^{-\frac{3}{2}}\Bigg]$$

$$+\frac{3}{2}\Pi u_1r^3\sin^2\theta_1\beta^{-\frac{1}{2}}\Bigg\}d\theta_1.$$

以上不论1与2都是关于当 $|a|>r>1$ 时的情况，当 $r>|a|>1$ 时，含有 $\frac{dv}{d\nu}$ 的一式与上述情况含有 $\frac{dv}{d\nu}$ 的一式相差一负号，其余相同.

参　考　文　献

[1] 陆启铿、邹振隆、郭汉英，典型时空的运动效应和宇观红移现象．物理学报 **23** (1974)，225—238

[2] 华罗庚、陆启铿，中国科学 **8** (1959)，1031—1094.

[3] 华罗庚，从单位圆谈起科学出版社，(1977).

[4] 吉新华、陈德泉(内部资料).

[5] J. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem.

[6] 吴新谋，数学物理方程(第二、三册)科学出版社，(1959).

THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A WAVE EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

LU QIKENG (LOO K. H.)
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

YIN WEIPING
(*University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

Let $\mathfrak{M}_K$ denote the space of Lorentz with constant curvature:

$$1+K\eta_{pq}x^p x^q$$

where K is a constant and $\eta=(\eta_{pq})=\operatorname{diag}[1, \cdots, 1, -1]$, We have considered the wave equation with variable coefficients

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{|\tilde{g}|}\,\tilde{g}^{jk}\frac{\partial u}{\partial x^k}\right)=0$$

in $\mathfrak{M}_K$, where

$$|\tilde{g}|=|1+K\eta_{pq}x^p x^q|^{-(n+1)}, \quad \tilde{g}^{jk}=(1+K\eta_{pq}x^p x^q)(\eta_{jk}+Kx^j x^k)$$

and found the explicit solution of the Cauchy problem for equation (1).