数 学 年 刊
1 (1) 1980

可列马尔科夫过程的 U 区间

杨 向 群
（湘潭大学）

§1. U 区间的定义

设 $E=\{0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$，$\bar{E}=E\cup\{\infty\}$. 考虑定义于完备概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的、取值于 $\bar{E}$ 的时间齐次连续参数马氏链 $X=\{x(t), t<\sigma\}$，X 的转移概率标准，X 右连续即以概率 1 有

$$\lim_{s\downarrow t} x(s)=x(t),\ t<\sigma. \tag{1.1}$$

X 可取值"∞"但

$$P(x(t)=\infty)=0 \quad (t\geqslant 0), \tag{1.2}$$

记这样的过程 X 的全体为 $\mathscr{H}(\bar{E})$.

由(1.1)，X 的一切状态都稳定，即其 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})(i, j\in E)$满足

$$\sum_{j\neq i} q_{ij}\leqslant -q_{ii}=q_i<\infty \tag{1.3}$$

记 H 为使上式成立等号的 i 全体，称 H 为保守状态集，称 $J=E-H$ 为非保守状态集.

由(1.2)，不失一般性，今后我们将假定：对每个 $\omega\in\Omega$,

$$x(r, \omega)\in E \text{ 对一切 } r\in R\cap[0, \sigma(\omega)), \tag{1.4}$$

其中 R 表示$[0, \infty)$中一切有理数.

定义 1.1 称 $t\in(0, \sigma(\omega))$为 $X(\omega)$的连续点，如果

$$\lim_{s\uparrow t} x(s, \omega)=x(t, \omega)\in E. \tag{1.5}$$

全体连续点集记为 $G(\omega)$. 称 $D(\omega)=(0, \sigma(\omega))-G(\omega)$为 $X(\omega)$的间断点集. 称 $t\in(0, \sigma(\omega))$为 $X(\omega)$的跳跃点，如果存在 $\varepsilon>0$ 使 $x(u, \omega)$在$[t-\varepsilon, t)$和$[t, t+\varepsilon)$中分别取 E 中不同的常数. 全体跳跃点集记为 $T(\omega)$. 称 $t\in(0, \sigma(\omega)]$为 $X(\omega)$的飞跃点，如果 $t=\sigma(\omega)$，或 $t<\sigma(\omega)$，但对任意 $\varepsilon>0$，$(t-\varepsilon, t+\varepsilon)\cap T(\omega)$为无穷集. $X(\omega)$的飞跃点全体记为 $\Gamma(\omega)$.

熟知，$X(\omega)$有第一个跳跃点 $\rho(\omega)$以及第一个飞间断 $\tau(\omega)$，$\tau(\omega)\geqslant\rho(\omega)>0$.

为方便计，以后我们约定：$0\in D(\omega)\cap T(\omega)\cap\Gamma(\omega)$. 如果 $\sigma(\omega)<\infty$，约定 $\sigma(\omega)\in D(\omega)$；如果 $\sigma(\omega)<\infty$ 且 $x(\sigma(\omega)-0, \omega)\in J$（非保守状态集），我们也约定 $\sigma(\omega)\in T(\omega)$.

易见 $D(\omega)$和 $\Gamma(\omega)$是闭集.

对每个 $s\in(0, \sigma(\omega))$，可定义

本文 1978 年 10 月 14 日收到.

$$\left.\begin{aligned}\mu_s(\omega)&=\max\{D(\omega)\cap[0,\ s]\},\\ \nu_s(\omega)&=\min\{D(\omega)\cap[s,\ \sigma(\omega)]\},\\ \lambda_s(\omega)&=\max\{\Gamma(\omega)\cap[0,\ s]\},\\ \eta_s(\omega)&=\min\{\Gamma(\omega)\cap[s,\ \sigma(\omega)]\},\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

对 $s=0$, 定义

$$\nu_0(\omega)=\rho(\omega),\ \eta_0(\omega)=\tau(\omega),\ \mu_0(\omega)=0,\ \lambda_0(\omega)=0.$$

分别称 $\mu_s(\omega)$、$\lambda_s(\omega)$、$\nu_s(\omega)$、$\eta_s(\omega)$ 为 s 前的最后一个间断点、s 前的最后一个飞跃点、s 后的第一个间断点、s 后的第一个飞跃点. 设 $s\in(0,\ \sigma(\omega))$, 显然. 如果 $s\in D(\omega)$ $(s\in\Gamma(\omega))$, 则有 $\mu_s(\omega)=\nu_s(\omega)=s$, $(\lambda_s(\omega)=\eta_s(\omega)=s)$; 如果 $s\notin D(\omega)$ $(s\notin\Gamma(\omega))$, 则 $\mu_s(\omega)<s<\nu_s(\omega)$, $(\lambda_s(\omega)<s<\eta_s(\omega))$.

定义 1.2 称 $[\lambda,\ \eta)$ 为 $X(\omega)$ 的一个 U 区间, 如果 $\lambda,\ \eta\in\Gamma(\omega)$, 且 $(\lambda,\ \eta)\cap\Gamma(\omega)=\phi$ (空集). $X(\omega)$ 的 U 区间全体记为 $\mathscr{U}(\omega)$.

由[2]II § 7 定理 5 的系知如 $[\lambda,\ \eta)$ 为 U 区间, 则 $(\lambda,\ \eta)$ 中的不连续点是跳跃点.

定义 1.3 设 $[\lambda,\ \eta)\in\mathscr{U}(\omega)$, $M\subset\overline{E}$, $N\subset\overline{E}$. 如果 $x(\lambda,\ \omega)\in M$, 称 $[\lambda,\ \eta)$ 为 ${}_MU$ 区间; 如果 $x(\eta-0,\ \omega)\in N$, 称 $[\lambda,\ \eta)$ 为 U_N 区间.

类似可定义 ${}_MU_N$ 区间, ${}_iU$ 区间等等. 记 $X(\omega)$ 的 ${}_MU$ 区间全体为 ${}_M\mathscr{U}(\omega)$. 类似记号 $\mathscr{U}_N(\omega)$、${}_i\mathscr{U}(\omega)$ 等等自明.

我们将约定: 对任意 $M\subset\overline{E}$, $X(\omega)$ 的第一个 U 区间 $[0,\ \tau(\omega))\in{}_M\mathscr{U}(\omega)$.

由[2]II § 15 定理 6, 对几乎一切 $\omega\in\Omega$, $X(\omega)$ 没有 U_{F-J} 区间. 换言之, 如 $X(\omega)$ 有 U_E 区间, 它必是 U_J 区间.

由[2]II § 6 定理 2, 对任意固定的 $t>0$, 以概率 1, 如果 $t\in(0,\ \sigma(\omega))$, 则有

$$\lambda_t(\omega)\leqslant\mu_t(\omega)<t<\nu_t(\omega)\leqslant\eta_t(\omega),\tag{1.7}$$

从而易知对几乎一切 $\omega\in\Omega$,

$$\lambda_r(\omega)<r<\eta_r(\omega),\text{对一切 } r\in R\cap(0,\ \sigma(\omega)),\tag{1.8}$$

$$\{[\lambda_r(\omega),\ \eta_r(\omega)):\ r\in R\cap[0,\ \sigma(\omega))\}=\mathscr{U}(\omega).\tag{1.9}$$

于是 $\mathscr{U}(\omega)$ 是可列集.

记

$$\mathscr{U}^\tau(\omega)=\{[\lambda,\ \eta):\ [\lambda,\ \eta)\in\mathscr{U}(\omega),\ \lambda\geqslant\tau(\omega)\}.\tag{1.10}$$

对 $M\subset\overline{E}$, $N\subset\overline{E}$, 类似记号 ${}_M\mathscr{U}^\tau(\omega)$, $\mathscr{U}_N^\tau(\omega)$ 等等自明.

记

$$C(\omega)=\bigcup_{[\lambda,\eta)\in\mathscr{U}(\omega)}[\lambda,\ \eta).\tag{1.11}$$

类似记号 ${}_MC(\omega)$、${}_MC^\tau(\omega)$、$C_N(\omega)$、$C_N^\tau(\omega)$ 等等自明.

§ 2. U 区间分析

定义 2.1 设 $t\in\Gamma(\omega)$. 如存在 $\varepsilon>0$ 使 $(t,\ t+\varepsilon)\cap\Gamma(\omega)=\phi$, 称 t 为 $X(\omega)$ 的右孤立飞跃点. 全体右孤立飞跃点集记为 $\Gamma^r(\omega)$. 记 $\Gamma_M^r(\omega)=\{t:\ t\in\Gamma^r(\omega),\ x(t,\ \omega)\in M\}$, $\Gamma_M^{r+}(\omega)=\{t:$ 存在严格下降的 $t_n\in\Gamma_M^r(\omega)$ 使 $t_n\downarrow t\}$, $\overline{\Gamma}_M^{r+}(\omega)=\Gamma_M^r(\omega)\cup\Gamma_M^{r+}(\omega)$ 并称为

$\Gamma^r_M(\omega)$的右闭包.

类似可以定义左孤立飞跃点集 $\Gamma^l(\omega)$, $\Gamma^l_M(\omega)=\{t: t\in\Gamma^l(\omega), x(t-0, \omega)\in M\}$、$\Gamma^{l-}_M(\omega)=\{t$: 存在严格上升的 $t_n\in\Gamma^l_M(\omega)$ 使 $t_n\uparrow t\}$ 以及 $\Gamma^l_M(\omega)$ 的左闭包 $\overline{\Gamma}^{l-}_M(\omega)=\Gamma^l_M(\omega)\cup\Gamma^{l-}_M(\omega)$.

约定 $0\in\Gamma^l(\omega)\cap\Gamma^r(\omega)$, 如 $\sigma(\omega)<\infty$, 则 $\sigma(\omega)\in\Gamma^r(\omega)$.

定理 2.1

$$\Gamma^l(\omega)=\{\eta: [\lambda, \eta)\in\mathscr{U}(\omega)\}\cup\{0\}, \tag{2.1}$$

$$\Gamma^r(\omega)=\{\lambda: [\lambda, \eta)\in\mathscr{U}(\omega)\}\cup\{\sigma(\omega): \sigma(\omega)<\infty\}. \tag{2.2}$$

证 只证(2.2). 右方集含于 $\Gamma^r(\omega)$ 中是显然的. 设 $t\in\Gamma^r(\omega)$ 并且 $t\neq\sigma(\omega)$. 依定义存在 $\varepsilon>0$ 使 $(t, t+\varepsilon)\cap\Gamma(\omega)=\phi$, 故任取 $r\in(t, t+\varepsilon)\cap R$, $t=\lambda_r^{(\omega)}<r<\eta_r(\omega)$. 由(1.9)知 $t\in$(2.2)右方集. 证毕.

定理 2.2

$$\Gamma(\omega)=\overline{\Gamma}^{r+}(\omega)=\overline{\Gamma}^{l-}(\omega).$$

证 $\overline{\Gamma}^{r+}(\omega)\subset\Gamma(\omega)$是明显的. 设 $t\in\Gamma(\omega)$, 如 $t=0$ 或 $t=\sigma(\omega)$, 显然 $t\in\Gamma^r(\omega)$. 如 $t\in(0, \sigma(\omega))$ 并且 $t\notin\Gamma^r(\omega)$, 可任取严格下降的 $r_n\downarrow t$, $r_n\in R\cap(0, \sigma(\omega))$. 依 λ_{r_n} 的定义有 $t\leqslant\lambda_{r_n}(\omega)<r_n$. 因 $t\notin\Gamma^r(\omega)$, 故 $t<\lambda_{r_n}(\omega)<r_n$. 于是存在 r_n 的子列 r'_n 使 $\lambda_{r'_n}(\omega)$ 严格下降. 当 $r'_n\downarrow t$ 时, $\lambda_{r'_n}(\omega)\downarrow t$. 由定理 2.1, $\lambda_{r_n}(\omega)\in\Gamma^r(\omega)$. 于是 $t\in\Gamma^{r+}(\omega)$. 所以 $\Gamma(\omega)\subset\overline{\Gamma}^{r+}(\omega)$, 从而 $\Gamma(\omega)=\overline{\Gamma}^{r+}(\omega)$. 对 $\Gamma(\omega)=\overline{\Gamma}^{l-}(\omega)$的证明类似. 证毕.

定理 2.3

$$S_E(\omega)=C_1(\omega)\cup\{\lambda: \lambda\in\Gamma^r(\omega), x(\lambda, \omega)\in E\}\subset C(\omega) \tag{2.3}$$

$$[0, \sigma(\omega))-C(\omega)\subset S_\infty(\omega)\subset\Gamma(\omega). \tag{2.4}$$

$$\mu\{C_1(\omega)\}=\mu\{C(\omega)\}=\sigma(\omega) \tag{2.5}$$

其中: μ 为勒贝格测度, 对 $K\subset\overline{E}$, 记号

$$S_K(\omega)=\{t: t\in[0, \sigma(\omega)), x(t, \omega)\in K\} \tag{2.6}$$

$$C_1(\omega)=\bigcup_{[\lambda, \eta)\in\mathscr{U}(\omega)}(\lambda, \eta) \tag{2.7}$$

证 (2.3)中"$\subset$"明显, $S_\infty(\omega)\subset\Gamma(\omega)$也明显. 设 $t\in S_E(\omega)$, 则必存在 $i\in E$, t 属于 $X(\omega)$ 的某 i-区间$[a, b)$中. 任取 $r\in[a, b)\cap R$, 则 $t\in[a, b)\subset[\lambda_r(\omega), \eta_r(\omega))$. 此时或者 $t\in(\lambda_r(\omega), \eta_r(\omega)\subset C_1(\omega)$, 或者 $t=\lambda_r(\omega)\in\Gamma^r(\omega)$, 而 $x(t, \omega)=i\in E$, 因此 $S_E(\omega)\subset C_1(\omega)\cup\{\lambda: \lambda\in\Gamma^r(\omega), x(\lambda, \omega)\in E\}$, 反包含是明显的. (2.3)得证, 从而得(2.4). 因 $[0, \sigma(\omega))=S_E(\omega)\cup S_\infty(\omega)$. $\mu\{S_\infty(\omega)\}=0$, 见[2]II § 5 定理 1. 由 (2.4) 即可得 (2.5). 证毕.

系 $$\mu\{\Gamma(\omega)\}=0.$$

证 因 $\Gamma(\omega)\subset[0, \sigma(\omega))-C_1(\omega)$, 由(2.5)即得 $\mu\{\Gamma(\omega)\}=0$.

定理 2.4 令

$$A(\omega)=S_E(\omega)-\Gamma(\omega), \tag{2.8}$$

用 $\mathscr{U}(A(\omega))$表示 $A(\omega)$中最大区间所成的集合, 见[1]定义 2.1, 则

$$\mathscr{U}(A(\omega))=\mathscr{U}(\omega). \tag{2.9}$$

证　设$[\lambda,\ \eta)\in\mathscr{U}(A(\omega))$. 依定义$(\lambda,\ \eta)\subset A(\omega)$以及$A(\omega)$的定义(2.8), 有$(\lambda,\ \eta)\cap\Gamma(\omega)=\phi$. 因而任取$t\in(\lambda,\ \eta)$有$x(t,\ \omega)\in E$, $(\lambda,\ \eta)\subset(\lambda_t(\omega),\ \eta_t(\omega))\subset A(\omega)$. 由$[\lambda,\ \eta)$的最大性, $[\lambda,\ \eta)=[\lambda_t(\omega),\ \eta_t(\omega))\in\mathscr{U}(\omega)$.

设$[\lambda,\ \eta)\in\mathscr{U}(\omega)$. 依定义$(\lambda,\ \eta)\cap\Gamma(\omega)=\phi$, 因而$(\lambda,\ \eta)\subset A(\omega)$. 如果$[\lambda',\ \eta')\supset[\lambda,\ \eta)$, 且$(\lambda',\ \eta')\subset A(\omega)$, 则$\lambda'\leqslant\lambda<\eta\leqslant\eta'$且对任意$s\in(\lambda',\ \eta')$, 有$s\notin\Gamma(\omega)$. 因而对任意$t\in(\lambda,\ \eta)$, 有$\lambda_t(\omega)\leqslant\lambda'$, $\eta'\leqslant\eta_t(\omega)$. 而$\lambda,\ \eta\in\Gamma(\omega)$, 故又有$\lambda=\lambda_t(\omega)$, $\eta=\eta_t(\omega)$. 因而$\lambda'=\lambda=\lambda_t(\omega)$, $\eta'=\eta=\eta_t(\omega)$. $[\lambda,\ \eta)$的最大性得证, 从而$[\lambda,\ \eta)\in\mathscr{U}(A(\omega))$. 定理证毕.

定理 2.5　设$M\subset\bar{E}$, $N\subset\bar{E}$, J为非保守状态集. 下列诸集都是$\mathscr{F}$可测集

$F_1=\{\omega$: $\mathscr{U}(\omega)$中有最后一个U区间, 它是U_N区间$\}$,

$F_2=\{\omega$: $\mathscr{U}(\omega)=\mathscr{U}_N(\omega)\}$,

$F_3=\{\omega$: $\mathscr{U}(\omega)$中有最后一个U区间, 除最后一个外, $\mathscr{U}(\omega)$中其余区间都是U_N区间$\}$,

$F_4=\{\omega$: $\mathscr{U}^\tau(\omega)={}_M\mathscr{U}^\tau(\omega)\}$,

$F_5=\{\omega$: $\mathscr{U}(\omega)$中至多有一个U_J区间, 倘有, 它是最后一个U区间$\}$,

$F_6=\{\omega$: $\mathscr{U}(\omega)$中至少有一个U_J区间, 而且它不是最后一个U区间$\}$.

由于$u(\omega)$中的U区间在$[0,\ \infty)$中的位置有前后之别, 因而上面说的"最后一个"其意义是明显的.

证　$\mathscr{F}_t^0$表由$\{x(u)$: $u\leqslant t\}$产生的 Borel 域. 显然, 对$r\geqslant 0$, $k\in\bar{E}$, 有

$$\{x(\eta_r-0)=k\}\in\mathscr{F}_\infty^0. \tag{2.10}$$

次证

$$\{x(\lambda_r)=k\}\in\mathscr{F}_r^0. \tag{2.11}$$

实际上, 当$K\neq\infty$时, 由(1.4), 有

$$\begin{aligned}\{x(\lambda_r)=k\}&=\{x(\lambda_r)=k,\ \lambda_r<r\}\\&=\bigcup_{N=1}^\infty\bigcap_{n=N}^\infty\bigcup_{m=0}^{2^n-2}\Big\{x\Big(\frac{m+1}{2^n}r\Big)=k,\ \Big[\frac{m+1}{2^n}r,\ r\Big)\cap T(\omega)\\&\quad\text{为有穷集},\Big[\frac{m-1}{2^n}r,\ \frac{m+1}{2^n}\Big)\cap T(\omega)\text{为无穷集}\Big\}\in\mathscr{F}_r^0,\\&\quad\{x(\lambda_r)=\infty\}=(r<\sigma)-\bigcup_{K\in E}\{x(\lambda_r)=k\}\in\mathscr{F}_r^0.\end{aligned}$$

于是

$$F_1=\bigcup_{r\in R}\{r<\sigma,\ \eta_r=\sigma,\ x(\eta_r-0)\in N\}\in\mathscr{F}_\infty^0.$$

$$F_2=\bigcap_{r\in R}\{(\sigma\leqslant r)\cup(r<\sigma,\ x(\eta_r-0)\in N)\}\in\mathscr{F}_\infty^0.$$

$$\begin{aligned}F_3=\bigcup_{r\in R}\{&(\sigma\leqslant r)\cup(r<\sigma,\ \eta_r=\sigma)\cup(r<\sigma,\ \eta_r<\sigma,\\&x(\eta_r-0)\in N)\}\in\mathscr{F}_\infty^0,\end{aligned}$$

$$F_4=\bigcap_{r\in R}\{(\sigma\leqslant r)\cup(r<\tau)\cup(\tau\leqslant r<\sigma,\ x(\lambda_r)\in M\}\in\mathscr{F}_\infty^0,$$

$$F_6=\bigcup_{r\in R}\{\eta_r<\sigma,\ x(\eta_r-0)\in J\}\in\mathscr{F}_\infty^0,$$

$$F_5=\Omega-F_6\in\mathscr{F}_\infty^0.$$

证毕.

§3. U 区间与柯氏向后、向前方程组

设 $M\subset\bar{E}$, $N\subset\bar{E}$, $S\subset E$. 令

$$\xi_{MS}=\begin{cases}\inf\{t:\ \tau\leqslant t<\sigma,\ x(\lambda_t)\in M,\ x(t)\in S\},\\ \sigma,\ \text{如上集合为空集};\end{cases}\tag{3.1}$$

$$\zeta_{SN}=\begin{cases}\sup\{t:\ 0\leqslant t<\sigma,\ x(t)\in S,\ x(\eta_t-0)\in N\},\\ 0,\ \text{如上集合为空集};\end{cases}\tag{3.2}$$

$$\delta_S=\begin{cases}\inf\{t:\ \tau\leqslant t<\sigma,\ t\in\Gamma,\ x(t)\in S\},\\ \sigma,\ \text{如上集合为空集},\end{cases}\tag{3.3}$$

式中, τ 为 X 的第一个飞跃点, Γ 为 X 的飞跃点集.

引理 3.1 设 S 为有穷集,则(3.1)、(3.3)中的 inf 可用 min 代替.

证 设 $t_n\downarrow\xi_{MS}$, $\tau\leqslant t_n<\sigma$, $x(\lambda_{t_n})\in M$, $x(t_n)\in S$. 因 S 有限,故由右连续性

$$x(\xi_{MS})=\lim_{n\to\infty}x(t_n)\in S.$$

因此 ξ_{MS} 属于某 $i(\in S)$ 区间 $[a,b)$ 中, 当 n 充分大时, $t_n\in[a,b)$. 因而 $x(\xi_{MS})=x(t_n)$, $\lambda_{\xi_{MS}}=\lambda_{t_n}$, 于是 $x(\lambda_{\xi_{MS}})=x(\lambda_{t_n})\in M$, 即(3.1)中的 inf 可用 min 代替. 其余的证明类似. 证毕.

引理 3.2

$$\xi_{MS}=\inf\{\xi_{Mj}:\ j\in S\}=\inf\{\xi_{KS}:\ k\in M\}=\inf\{\xi_{Kj}:\ k\in M,\ j\in S\},\tag{3.4}$$

$$\zeta_{SN}=\sup\{\zeta_{Sj}:\ j\in N\}=\sup\{\zeta_{KN}:\ k\in S\}=\sup\{\zeta_{Kj}:\ k\in S,\ j\in N\},\tag{3.5}$$

$$\delta_S=\inf\{\delta_K:\ k\in S\}.\tag{3.6}$$

证 令

$$A_{MS}=\{t:\ \tau\leqslant t<\sigma,\ x(\lambda_t)\in M,\ x(t)\in S\},\tag{3.7}$$

显然 $A_{Mj}\subset A_{MS}(j\in S)$, 故 $\xi_{Mj}\geqslant\xi_{MS}(j\in S)$. 另一方面, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $t\in A_{MS}=\bigcup_{j\in S}A_{Mj}$ 使 $t<\xi_{MS}+\varepsilon$. 故存在 $j\in S$ 使 $t\in A_{Mj}$, 从而 $\xi_{Mj}\leqslant t<\xi_{MS}+\varepsilon$, 即 $\xi_{MS}=\inf\{\xi_{Mj}:\ j\in S\}$ 得证. 其余证明类似.

引理 3.3 若 ξ_{MS}, δ_S 是 X 的可选时, 则 ζ_{SN} 是随机变量.

证 由引理 3.2, 只需对 $k\in\bar{E}$, $j\in E$ 证明 ξ_{Kj}、δ_j 为可选时, ζ_{Kj} 为随机变量即可. 实际上, 注意(2.11), 对任意 $u\geqslant 0$, 有

$$(\xi_{Kj}<u<\sigma)=\bigcup_{\substack{r<u\\ r\in R}}\{\tau\leqslant r<\sigma,\ x(\lambda_r)=k,\ x(r)=j,\ u<\sigma\}\in\mathscr{F}_u^0.$$

其次

$$(\delta_j<u<\sigma)=\bigcup_{\substack{r<u\\ r\in R}}\Big\{(\tau\leqslant r<\sigma,\ x(r)=j)\cap\Big[\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\bigcup_{v=1}^{2^m-1}\Big(x(t)\text{在}\left[\frac{v-1}{2^m}r,\ \frac{v}{2^m}r\right)\text{中有无穷多个跳跃点},\ x(t)\text{在}\left[\frac{v}{2^m}r,\ r\right)\text{中取常值}\ j\Big)\Big]\Big\}\in\mathscr{F}_u^0,$$

$$(\zeta_{Kj}>u)=\bigcup_{\substack{r\in R\\ r>u}}\{0\leqslant r<\sigma,\ x(r)=k,\ x(\eta_r-0)=j\}\in\mathscr{F}^0_\infty.$$

由[1]的(4.3)式即得，ξ_{MS}、δ_S 是 X 的可选时，ζ_{SN} 是随机变量. 证毕.

定义3.1 称过程 X 为

(1) 纯自 M 流入，如果 $P(\mathscr{U}^\tau={}_M\mathscr{U}^\tau)=1$;

(2) 纯流出到 N，如果 $P(\mathscr{U}=\mathscr{U}_N)=1$;

(3) 拟流出到 N，如果 $P(\Omega_0)=1$. 这里

$$\Omega_0=(F_2-F_1)\cup F_3=\{\mathscr{U}\text{ 中没有最后一个 }U\text{ 区间，且 }\mathscr{U}=\mathscr{U}_N\}\cup\{\mathscr{U}\text{ 中有最后一个 }U\text{ 区间，除最后一个 }U\text{ 区间外，其余均是 }U_N\text{ 区间}\},\tag{3.8}$$

而 F_1, F_2, F_3 如定理 2.5 之所述.

理定3.4 下列条件等价:

(1) 过程 X 纯自无穷流入，即 $P(\mathscr{U}^\tau={}_\infty\mathscr{U}^\tau)=1$;

(2) $P(\xi_{EE}<\sigma)=0$, ξ_{EE} 的定义如(3.1);

(3) 过程 X 满足柯氏向前方程组;

如果满足上述条件之一，则

(4) $P(\xi_{\infty E}=\tau)=1$. 更精确些: 对几乎一切 $\omega\in(\tau<\sigma)$, 有 $\tau(\omega)\in\overline{\Gamma}^{r+}_\infty(\omega)$.

证 (1)⇒(3) 设 $t>0$. 因 $P(x(t)=\infty)=0$, 故对几乎一切 $\omega\in(t<\sigma)$, $t\in S_E(\omega)$. 由定理 2.3, $t\in C(\omega)$, 因而存在 $[\lambda,\eta)\in\mathscr{U}(\omega)$ 使 $t\in[\lambda,\eta)$. 如果 $[\lambda,\eta)=[0,\tau(\omega))$, 则显然 t 前有最后一个间断点 $\mu_t(\omega)\in T(\omega)$. 否则，由假设条件(1), $[\lambda,\eta)$ 是 ${}_\infty U$ 区间，$x(\lambda)=\infty$, 故 $t\in(\lambda,\eta)$. 从而 $\lambda<\mu_t(\omega)<\eta$, $\mu_t(\omega)\in T(\omega)$. 由[2]中 II § 17 定理 4, X 满足向前方程组.

(3)⇒(2) 由[2]中 II § 17 定理 4, 若条件(3)成立，则 $P(\Omega_1)=1$, 这里

$$\Omega_1=\{\omega:\ \text{对一切 }r\in R\cap[0,\sigma(\omega)),\ x(r,\omega)\in E,\ \mu_r(\omega)\in T(\omega)\}.\tag{3.9}$$

如果 $\omega\in(\xi_{ij}<\sigma)$ $(i,j\in E)$, 则 $x(\lambda_{\xi_{ij}(\omega)},\omega)=i$, 故存在 $r\in R\cap[0,\sigma(\omega))$ 使 $\lambda_{\xi_{ij}(\omega)}$ 与 r 在同一个 i 区间中，从而 $\mu_r(\omega)=\lambda_{\xi_{ij}(\omega)}(\omega)\notin T(\omega)$, 因此 $\omega\notin\Omega_1$, 即 $(\xi_{ij}<\sigma)\subset\Omega-\Omega_1$. 于是由引理 3.2, 得

$$(\xi_{EE}<\sigma)=\bigcup_{i,j\in E}(\xi_{ij}<\sigma)\subset\Omega-\Omega_1.$$

条件(2)得证.

(2)⇒(1) 如果 $\omega\in(\mathscr{U}\neq{}_\infty\mathscr{U}^\tau)$, 则存在 ${}_EU$ 区间 $[\lambda,\eta)\in\mathscr{U}^\tau(\omega)$. 因而存在某 $i\in E$ 使 $\xi_{Ei}(\omega)<\sigma(\omega)$. 于是

$$(\mathscr{U}^\tau\neq{}_\infty\mathscr{U}^\tau)\subset\bigcup_{i\in E}(\xi_{Ei}<\sigma)=(\xi_{EE}<\sigma).$$

条件(1)得证.

(1)⇒(4) 由条件(1), 对几乎一切 ω, $\Gamma^r_E(\omega)-\{0\}=\phi$, 而且由定理 2.2, 如 $\tau(\omega)<\sigma(\omega)$, 则或者 $\tau(\omega)$ 是某 U 区间的左端点，此时 $\mathscr{X}(\tau(\omega),\omega)=\infty$, $\tau(\omega)\in\Gamma^r_\infty(\omega)$; 或者存在严格下降的 $\lambda_n\downarrow\tau(\omega)$, λ_n 是 U 区间的左端点，由条件(1), $\mathscr{X}(\lambda_n,\omega)=\infty$. 因此 $\tau(\omega)\in\Gamma^{r+}_\infty(\omega)$, 即 $\tau(\omega)\in\overline{\Gamma}^{r+}_\infty(\omega)$. 定理证毕.

定理3.5 下列条件等价:

(1) 过程 X 满足柯氏向后方程组;

(2) 过程 X 拟流出到"∞";

(3) $P\{\omega: \mathscr{U}(\omega)$中至多有一个 U_J 区间,如果有,它是最后一个 U 区间$\}=1$;

(4) $P(x(\rho-0)\in J,\ \rho\in\Gamma,\ \rho<\sigma)=0$, 其中 ρ 为 X 的第一个间断点, J 为非保守状态集.

证 (2)(3)是同一意思.

(1)⇒(3) 由[2]II § 17 定理 4, $P(\Omega_2)=1$, 这里

$$\Omega_2=\{\omega: \text{对一切 } r\in R\cap[0,\sigma(\omega)),\ \nu_r(\omega)\in T(\omega)\}. \tag{3.10}$$

由[2]II § 15 定理 6, $P(\Omega_3)=1$, 而

$$\Omega_3=\{\omega: \text{对一切 } r\in R\cap[0,\sigma(\omega)),\ \text{如果 } x(\eta_r(\omega)-0,\omega)\in J \text{ 且 } \eta_r(\omega)<\sigma(\omega),\ \text{则 } x(\eta_r(\omega),\omega)=\infty\}. \tag{3.11}$$

试证 $\Omega_2\cap\Omega_3\subset F_5$. 实际上, 设 $\omega\in\Omega_2\cap\Omega_3$. 如果 $X(\omega)$有一个 U_J 区间$[\lambda,\eta)$, 即 $x(\eta-0,\omega)\in J$. 则存在 $r\in R\cap[0,\sigma(\omega))$使 $\eta(\omega)=\nu_r(\omega)=\eta_r(\omega)$. 如果 $\eta(\omega)<\sigma(\omega)$, 则因 $\omega\in\Omega_2$ 有 $\eta(\omega)=\nu_r(\omega)\in T(\omega)$, 而 $\omega\in\Omega_3$ 有 $\eta(\omega)=\eta_r(\omega)\in\Gamma(\omega)$, 矛盾. 于是必定有 $\eta(\omega)=\sigma$, 即$[\lambda,\eta)$是最后一个 U 区间.

(3)⇒(4) 明显.

(4)⇒(1) 由条件(4)及齐次马氏性得 $P(\Omega_4)=1$,

$$\Omega_4=\{\omega: \text{对任 } r\in R\cap[0,\sigma(\omega)),\ \text{如果 } x(\eta_r-0,\omega)\in J,\ \text{则必定 } \eta_r(\omega)=\sigma(\omega)\}. \tag{3.12}$$

固定 $t\geqslant0$, 因 $P(x(t)=\infty)=0$, 由定理 2.3, 对几乎一切 $\omega\in(t<\sigma)\cap\Omega_4$, $t\in S_E(\omega)\subset C(\omega)$, 因而有$[\lambda,\eta)\in\mathscr{U}(\omega)$使 $t\in[\lambda,\eta)$. 如果 $x(\eta-0,\omega)=\infty$, 则有 $\lambda\leqslant t<\nu_t(\omega)<\eta$, 因而 $\nu_t(\omega)\in T(\omega)$. 否则 $x(\eta-0,\omega)\in J$. 倘若 $\nu_t(\omega)<\eta$, 显然 $\nu_t(\omega)\in T(\omega)$; 倘若 $\nu_t(\omega)=\eta$, 则有某 $r\in R\cap[0,\sigma(\omega))$使 $\eta=\nu_t(\omega)=\nu_r(\omega)=\eta_r(\omega)$. 因 $\omega\in\Omega_4$, 故 $\eta(\omega)=\sigma(\omega)$。按照约定 $\nu_t(\omega)=\sigma(\omega)\in T(\omega)$, 因此恒有 $\nu_t(\omega)\in T(\omega)$. 由[2]II § 17 定理 4, X 满足柯氏向后方程组. 定理证毕.

由定理 3.4 和 3.5 立即可得下面两个定理.

定理 3.6 下列条件等价:

(1) 过程 X 同时满足向前, 向后方程组;

(2) X 纯自 ∞ 流入, 拟流出到 ∞;

(3) $P(\xi_{EE}<\sigma)=P(x(\rho-0)\in J,\ \rho<\sigma)=0$;

(4) $P(\mathscr{U}^\tau={}_\infty\mathscr{U}^\tau)=P(\mathscr{U}$ 中至多有一个 U_J 区间,如果有,它是最后一个 U 区间$)=1$。

定理 3.7 下列条件等价

(1) 过程 X 不满足柯氏向前方程组也不满足柯氏向后方程组;

(2) $P(\xi_{EE}<\sigma)>0$, $P(x(\rho-0)\in J,\ \rho\in\Gamma\rho<\sigma)>0$;

(3) $P(\mathscr{U}^\tau={}_E\mathscr{U}^\tau)>0$,

$P(\mathscr{U}$ 中有 U_J 区间, 但不是最后一个 U 区间$)>0$。

定理 3.8 设 $M\subset\overline{E}$. 下列条件等价:

(1) 过程 X 纯自 M 流入, 即 $P(\mathscr{U}^\tau={}_M\mathscr{U}^\tau)=1$;

(2) $P(\xi_{\bar{M}E}<\sigma)=0$, $\bar{M}=\bar{E}-M$;

如果上面条件之一成立，则

(3) $P(\xi_{ME}=\tau)=1$. 更精确些：对几乎一切 $\omega\in(\tau<\sigma)$，有 $\tau(\omega)\in\bar{\Gamma}_M^{r+}(\omega)$.

证 (1)⇒(2) 设 $\omega\in(\xi_{\bar{M}E}<\sigma)=\bigcup_{i\in E}(\xi_{\bar{M}i}<\sigma)$，则存在某 $i\in E$ 使 $\xi_{\bar{M}i}(\omega)<\sigma(\omega)$，故 $[\lambda_{\xi\bar{M}_i(\omega)}(\omega), \eta_{\xi\bar{M}_i(\omega)}(\omega))\in\mathscr{U}^\tau(\omega)$，而且由 $x(\lambda_{\xi\bar{M}_i(\omega)}(\omega),\omega)\in\bar{M}$，是 $_{\bar{M}}U$ 区间，故 $\omega\in(\mathscr{U}^\tau={}_{\bar{M}}\mathscr{U}^\tau)$，即 $\omega\notin(\mathscr{U}^\tau={}_M\mathscr{U}^\tau)$.

(2)⇒(1) 由 X 的齐次性，由条件(2)得对一切 $r\in R$, $P(\theta_r(\xi_{\bar{M}E}<\sigma))=0$，式中，$\theta_r$ 是马氏链的齐次性中的推移算子. 令 $\Omega_0=\bigcap_{r\in R}\{\Omega-\theta_r(\xi_{\bar{M}E}<\sigma)\}$，则 $P(\Omega_0)=1$. 当 $\omega\in\Omega_0$ 时，对一切 $r\in[0,\sigma(\omega))$，在 $[\max(r,\tau(\omega)),\sigma(\omega))$ 中没有 $_{\bar{M}}U$ 区间，从而 $[\tau(\omega),\sigma(\omega))$ 中的 U 区间全是 $_MU$ 区间，即 $\Omega_0\subset(\mathscr{U}^\tau={}_M\mathscr{U}^\tau)$.

设条件(1)或(2)成立，则对几乎一切 ω, $\Gamma_{\bar{M}}^r(\omega)-\{0\}$ 是空集，因而 $\tau(\omega)\notin\bar{\Gamma}_{\bar{M}}^{r+}(\omega)$. 由定理 2.2，得 $\tau(\omega)\in\Gamma(\omega)=\bar{\Gamma}^{r+}(\omega)=\bar{\Gamma}_M^{r+}(\omega)$. 定理证毕.

参 考 文 献

[1] 杨向群 可列马尔科夫过程的 W 变换和强极限 9(1979),8335—488.

[2] K. L. Chung., *Markov chains with stationary transition probabilities, splinger-verlag*, (1960).

U INTERVALS FOR DENUMERABLE MARKOV PROCESSES

YANG XIANGQUN

(*Xiangtan University*)

ABSTRACT

In this paper we have introduced the concept of U intervals for denumerable Markov processes, then analysed the flying-points and U intervals for a process. We have found relations between U intervals and Kolmogoroff's backward and forward equations. Using the concept of U intervals for a process, we can investigate the exit and entrance problems for a process more clearly and effectively.