数 学 年 刊
1 (1) 1980

概率流的分解定理

侯振挺　　汪培庄
(长沙铁道学院)　　(北京师范大学)

§1. 引　言

钱敏平在[2]中，给出了马氏链的可逆与环流分解定理：可数状态空间 E 上定义的马氏链，若具有平稳的初始分布 $u=\{u_i\}(i\in E)$，$u_i>0(i\in E)$，则其转移概率 P 可分解为

$$p_{ij}=p_{ij}^d+\sum_k r_{ij}^{(k)}/u_i,\quad (i,\ j\in E)$$

其中 p_{ij}^d 是可逆成分，$r_{ij}^{(k)}$ 是环流成分. 这个分解定理与统计物理远离平衡态的耗散结构理论有重要联系.

本文对更一般的情况给出 P 的分解定理，对于非平稳分布 u，除了可逆与环流部分之外，还有散流部分

$$p_{ij}=p_{ij}^d+\sum_k r_{ij}^{(k)}/u_i+\sum_l g_{ij}^{(l)}/u_i,\quad (i,\ j\in E)$$

其中 $G^{(l)}=(g_{ij}^{(l)})$ 是散流矩阵(定义见正文). 当 u 是平稳分布时，便化为钱敏平的分解式.

对于联系于 Q 过程的概率流，也作了类似的分解.

§2. 稳定流的分解定理

设 $E\subset I$(自然数集)，称 E 中元素所构成的一个有穷序列

$$r=(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n,\ i_1)$$

为 E 中的一条环路，如果 $n\geqslant 3$ 且

$$i_s\neq i_t\quad (s\neq t,\ 1\leqslant s,\ t\leqslant n) \tag{1}$$

定义 1　称 E 上的矩阵 R 为对应于环路 r 的环流矩阵，如果

$$r_{ij}=\begin{cases} a>0, & (i,\ j)\in\gamma \\ 0, & (反之) \end{cases} \tag{2}$$

此处，$(i,\ j)\in r$ 的意思是，$(i,\ j)$ 为 r 的一节，即存在 $s\leqslant n$，使 $i_s=i$，$i_{s+1}=j$ $(i_{n+1}\equiv i_1)$.

E 上环流矩阵的全体记作 $\mathscr{R}(E)$.

定义 2　称 E 上的矩阵 C 为一个稳流矩阵，如果它满足

(c.1)　　$c_{ij}\geqslant 0,$　　$(i,\ j\in E),$

(c.2)　　$c_{ij}c_{ji}=0,$　　$(i,\ j\in E),$

本文 1978 年 11 月 6 日收到.

(c.3) $$\sum_{j\in E}(c_{ij}-c_{ji})=0, \qquad (i\in E).$$

E 上稳定流矩阵的全体记为 $\mathscr{C}(E)$.

易见 $\mathscr{R}(E)\subset\mathscr{C}(E)$

在 $\mathscr{C}(E)$ 中规定(+)、(−):

$$(A(+)B)_{ij}\equiv[(a_{ij}+b_{ij})-(a_{ji}+b_{ji})]^+$$

$$(A(-)B)_{ij}\equiv[(a_{ij}-b_{ij})-(a_{ji}-b_{ji})]^+$$

引理 1 $\mathscr{C}(E)$ 对(+)、(−)运算封闭.

证 设 A、$B\in\mathscr{C}(E)$, $C=A(+)B(A(-)B)$.

(c.1)对 C 显然真.

(c.2) $$c_{ij}\cdot c_{ji}=[(a_{ij}\pm b_{ij})-(a_{ji}\pm b_{ji})]^+\cdot[(a_{ji}\pm b_{ji})-(a_{ij}\pm b_{ij})]^+$$
$$=[(a_{ij}\pm b_{ij})-(a_{ji}\pm b_{ji})]^+\cdot[(a_{ij}\pm b_{ij})-(a_{ji}\pm b_{ji})]^-=0.$$

(c.3) $$\sum_{j\in E}(c_{ij}-c_{ji})=\sum_{j\in E}\{[(a_{ij}\pm b_{ij})-(a_{ji}\pm b_{ji})]^+-[(a_{ij}\pm b_{ij})-(a_{ji}\pm b_{ji})]^-\}$$
$$=\sum_{j\in E}[(a_{ij}\pm b_{ij})-(a_{ji}\pm b_{ji})]$$
$$=\sum_{j\in E}(a_{ij}-a_{ji})\pm\sum_{j\in E}(b_{ij}-b_{ji})=0$$

证毕.

在 $\mathscr{C}(E)$ 中按逐元意义规定顺序"$\leqslant$", 易见, 当 $A\geqslant B$, 则有

$$A(+)B=A+B,\ A(-)B=A-B$$

故有

引理 2 设 A、$B\in\mathscr{C}(E)$, 且 $A\geqslant B$, 则有

$$A+B\in\mathscr{C}(E),\ A-B\in\mathscr{C}(E).$$

引理 3 设 $C\in\mathscr{C}(E)$, 满足

(c.4) $$\sum_{i,j\in E}c_{ij}<+\infty$$

则对任意有限子集 $D\subset E(\phi\neq D\neq E)$, 有

$$\sum_{i\in D, j\in E\setminus D}(c_{ij}-c_{ji})=0 \tag{4}$$

证 E 为有限集时显然真, 不妨取 $E=I$, 且设 $D=\{1, 2, \cdots, n-1\}(n\geqslant2)$, 则(4)式化为

$$\sum_{i<n, j\geqslant n}(c_{ij}-c_{ji})=0. \tag{5}$$

当 $n=2$, (5)式显然真.

设(5)对 n 真, 考虑 $n+1$,

$$\sum_{i\leqslant n, j>n}(c_{ij}-c_{ji})=\sum_{i<n, j\geqslant n}(c_{ij}-c_{ji})-\sum_{i<n}(c_{in}-c_{ni})+\sum_{j>n}(c_{nj}-c_{jn})$$
$$=-\sum_{i<n}c_{in}-\sum_{j>n}c_{jn}+\sum_{i<n}c_{ni}+\sum_{j>n}c_{nj}$$
$$=-\sum_{i\in E}c_{in}+c_{nn}+\sum_{i\in E}c_{ni}-c_{nn}=\sum_{i\in E}(c_{in}-c_{ni})=0.$$

证毕.

定理 1 设 $E=\{1, 2, \cdots, n\}$, 若 $C\in\mathscr{C}(E)$, 则必存在如下分解

$$C=\sum_{k=1}^{m} R^{(k)},\ (R^{(k)}\in\mathscr{R}(E)) \tag{6}$$

当 $m=0$, 约定和式为零矩阵.

证　若 $C=0$, 则取 $m=0$, (6)式真.

设 $C\neq 0$.

1. 必有 $c_{ii_1}>0$. 从而 $\exists\, i_2\neq i$, i_1 使 $c_{i_1i_2}>0$, 否则与(c.1)、(c.2)矛盾.

由此可得到一正实数的无穷序列 c_{ii_1}, $c_{i_1i_2}$, $\cdots$, $c_{i_ki_{k+1}}$, $\cdots$. 它对应着一个足码序列$(i, i_1, i_2, \cdots, i_k, i_{k+1}, \cdots)$. 因 E 是有限集, 故必有重复的足码. 故不难从足码序列中找到一个片断

$$r^{(1)}=(i_s,\ i_{s+1},\ \cdots,\ i_{t-1},\ i_s)$$
$$\equiv(j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_{t-s},\ j_1)$$

使 j_1, j_2, $\cdots$, j_{t-s} 全相异. 由(c.1)、(c.2)知 $t-s\geqslant 3$, 故 $r^{(1)}$ 是一个环路, 取

$$a_1=\min(c_{j_1j_2},\ c_{j_2j_3},\ \cdots,\ c_{j_{t-s}j_1})>0 \tag{7}$$

得环流阵
$$r_{ij}^{(1)}=\begin{cases}a_1, & (i,\ j)\in r^{(1)}\\ 0, & (i,\ j)\notin r^{(1)}.\end{cases}$$

2. 令
$$C^{(2)}=C-R^{(1)}$$

注意 $C\geqslant R^{(1)}$, 故按引理 2, 知有

$$C^{(2)}\in\mathscr{C}(E).$$

按步骤 1, 又可得环流阵 $R^{(2)}$.

步骤 2 无限地重复下去. 注意(7)式意味着 $R^{(1)}$ 与 C 中至少有一共同元素, 故 $C^{(2)}$ 比 C(一般地 $C^{(m+1)}$ 比 $C^{(n)}$)非零元素严格减少. 故必存在 $m>0$, 使有

$$C^{(m+1)}=0$$

(6)式得证.　　证毕.

设 $E=I$, 令

$$\left.\begin{aligned}n_*&=\{n,\ n+1,\ \cdots\}\\ E_n&=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ n_*\}\end{aligned}\right\}\quad(n\geqslant 1)$$

定义 3　设 C 是 E 上的矩阵, 对任意 $n\geqslant 1$, 令

$$\begin{aligned}&{}_nc_{ij}\equiv c_{ij},\quad (i,\ j<n)\\ &{}_nc_{in}\equiv{}_nc_{in_*}\equiv\Big[\sum_{j\geqslant n}c_{ij}-\sum_{j\geqslant n}c_{ji}\Big]^+=\Big[\sum_{j\geqslant n}(c_{ij}-c_{ji})\Big]^+\quad(i<n)\\ &{}_nc_{nj}\equiv{}_nc_{n_*j}\equiv\Big[\sum_{i\geqslant n}c_{ij}-\sum_{i\geqslant n}c_{ji}\Big]^+=\Big[\sum_{i\geqslant n}(c_{ij}-c_{ji})\Big]^-\quad(j<n)\\ &{}_nc_{nn}\equiv{}_nc_{n_*n_*}\equiv 0\end{aligned} \tag{8}$$

称 ${}_nC\equiv({}_nc_{ij})\,(i,\ j=1,\ \cdots,\ n)$为 C 在 E_n 上的收缩. 又设 B 是 $E_n(n\geqslant 1)$上的矩阵, 令

$$b_{ij}=0,\quad (i>n\ 或\ j>n)$$

称$[B]\equiv(b_{ij})_{(i,\ j\in E)}$为 B 在 E 上的扩充.

注意
$$[{}_nC]\neq C\ 但\ {}_n[B]=B.$$

易见

$${}_nc_{in}-{}_nc_{ni}=\sum_{j\geqslant n}(c_{ij}-c_{ji}) \tag{9}$$

引理 4　若 $C\in\mathscr{C}(E)$ 且满足(c.4)，则对任意 $n\geqslant 1$，有

$$ {}_nC\in\mathscr{C}(E_n) \tag{10}$$

${}_nC$ 亦满足(c.4)，又有

$$ {}_1C={}_2C=0. $$

证　先证对任意 $n\geqslant 1$，${}_nC$ 均满足(c.1)—(c.3)。

(c.1)显然。

(c.2)
$$ {}_nc_{in}\cdot{}_nc_{ni}=\Big[\sum_{j\geqslant n}(c_{ij}-c_{ji})\Big]^+\Big[\sum_{j\geqslant n}(c_{ij}-c_{ji})\Big]^-=0. $$

(c.3)　$i<n$.

$$ \sum_{j=1}^{n}({}_nc_{ij}-{}_nc_{ji})=\sum_{j=1}^{n-1}(c_{ij}-c_{ji})+({}_nc_{in}-{}_nc_{ni}) $$
$$ \overset{(9)}{=}\sum_{j=1}^{n-1}(c_{ij}-c_{ji})+\sum_{j=n}^{\infty}(c_{ij}-c_{ji})=\sum_{j\in E}(c_{ij}-c_{ji})=0. $$

$i=n$

$$ \sum_{j=1}^{n}({}_nc_{nj}-{}_nc_{jn})=\sum_{j=1}^{n-1}({}_nc_{nj}-{}_nc_{jn})\overset{(9)}{=}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k\geqslant n}(c_{jk}-c_{kj}) $$

引用引理 3 的(5)式，知其和为零。

(c.4)
$$ \sum_{i,j=1}^{n}{}_nc_{ij}=\sum_{i,j=1}^{n-1}c_{ij}+\sum_{i=1}^{n-1}{}_nc_{in}+\sum_{i=1}^{n-1}{}_nc_{ni}+{}_nc_{nn} $$
$$ =\sum_{i,j=1}^{n-1}c_{ij}+\sum_{i=1}^{n-1}\Big[\sum_{j\geqslant n}(c_{ij}-c_{ji})\Big]^++\sum_{j=1}^{n-1}\Big[\sum_{j\geqslant n}(c_{ij}-c_{ji})\Big]^- $$
$$ =\sum_{i,j=1}^{n-1}c_{ij}+\sum_{i=1}^{n-1}\Big|\sum_{j\geqslant n}(c_{ij}-c_{ji})\Big| $$
$$ \leqslant\sum_{i,j=1}^{n-1}c_{ij}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j\geqslant n}c_{ij}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j\geqslant n}c_{ji}\leqslant\sum_{i,j\in E}c_{ij}<+\infty. $$

当 $n\leqslant 2$，由(c.1)及(c.2)知 ${}_nC=0$　　证毕。

定理 2　设 $E=I$，$C\in\mathscr{C}(E)$ 且满足(c.4)，则存在如下分解，

$$ C=\sum_{k\in J}R^{(k)},\quad (R^{(k)}\in\mathscr{R}(E),\ J\subset E) \tag{11}$$

约定当 $J=\phi$，和式为零矩阵。

证　采取如下递推步骤：

1．给定 $c_1\equiv C$，$\mathring{c}_1\equiv 0$，$\tilde{c}_1\equiv c_1-\mathring{c}_1=C$

2．固定 $n\geqslant 1$，假如已经定义了 c_n，$\mathring{c}_n$，$\tilde{c}_n$ 满足

(1)　$C_n\in\mathscr{C}(E)$ 且满足(c.4)；

(2)　$c_n\supset\mathring{c}_n=\sum\limits_{k=N_{n-1}}^{N_n-1}[{}_nR^{(k)}]$，${}_nR^{(k)}\in\mathscr{R}(E_n)$ 且对应环路不经过 n_*。允许 $N_{n-1}=N_n$，此时指 $\mathring{c}_n=0$；

(3)　$\tilde{c}_n=c_n-\mathring{c}_n=\sum\limits_{l=1}^{M_n}[{}_n\tilde{R}^{(l)}]$，${}_nR^{(l)}\in\mathscr{R}(E_n)$ 且其对应环路经过 n_*。允许 $M_n=0$，此时指 $\tilde{c}_n=0$。

则可按下述方式定义 c_{n+1}，$\mathring{c}_{n+1}$，$\tilde{c}_{n+1}$，使满足(1)、(2)、(3)的要求：

1)　令 $c_{n+1}\equiv\tilde{c}_n$.

由于 $c_n \supset \mathring{c}_n$，由引理 2，知 $c_{n+1} \in \mathscr{C}(E)$. 易见 c_{n+1} 亦满足(c.4)，由引理 4，知 ${}_{n+1}c_{n+1} \in \mathscr{C}(E_{n+1})$ 且满足(c.4). 再由定理 1，知存在(进而取定)一种分解

$$ {}_{n+1}c_{n+1} = \sum_{k=N_n}^{N_{n+1}-1} {}_{n+1}R^{(k)} + \sum_{l=1}^{M_{n+1}} {}_{n+1}\widetilde{R}^{(l)} $$

其中 ${}_{n+1}R^{(k)} \in \mathscr{R}(E_{n+1})$ 且其对应环路不经过 $(n+1)_*$，${}_{n+1}\widetilde{R}^{(l)} \in \mathscr{R}(E_{n+1})$ 但其对应环路经过 $(n+1)_*$.

2) 令 $\mathring{c}_{n+1} \equiv \sum_{k=N_n}^{N_{n+1}-1} [{}_{n+1}R^{(k)}]$，显然 $[{}_{n+1}R^{(k)}] \in \mathscr{R}(E)$，$\mathring{c}_{n+1} \subset c_{n+1}$.

3) 令 $\tilde{c}_{n+1} \equiv c_{n+1} - \mathring{c}_{n+1} = \sum_{l=1}^{M_{n+1}} [{}_{n+1}\widetilde{R}^{(l)}]$.

注意 c_1, $\mathring{c}_1$, $\tilde{c}_1$ 满足(1)，(2)，(3)的要求取 $N_0 = N_1 = 1$. 故对任意 $n \geqslant 1$，c_n, $\mathring{c}_n$, $\tilde{c}_n$ 均有定义且满足 (1)，(2)，(3)的要求.

于是有

$$ \begin{aligned} C &= \mathring{c}_1 + \tilde{c}_1 = \mathring{c}_1 + c_2 = \mathring{c}_1 + (\mathring{c}_2 + \tilde{c}_2) = \cdots \\ &= (\mathring{c}_1 + \mathring{c}_2 + \cdots + \mathring{c}_n) + \tilde{c}_n. \end{aligned} $$

为证定理 2，只需证明 $\tilde{c}_n \to 0 (n \to \infty)$.

任意固定 $i, j \in E$，取 $n > n_0 = \max(i, j)$，易见

$$ (\tilde{c}_n)_{ij} = \sum_{l=1}^{M_n} ([{}_n\widetilde{R}^{(l)}])_{ij} = \sum_{l=1}^{M_n} ({}_n\widetilde{R}^{(l)})_{ij} $$

对每一 ${}_n\widetilde{R}^{(l)}$，记其对应环路中居于 n_* 之后的下一个状态为 s_l，必有

$$ ({}_n\widetilde{R}^{(l)})_{ij} \leqslant ({}_n\widetilde{R}^{(l)})_{ns_l} \equiv {}_n\tilde{r}^{(l)}_{ns_l} $$

故有

$$ \begin{aligned} (\tilde{c}_n)_{ij} &\leqslant \sum_{l=1}^{M_n} {}_n\tilde{r}^{(l)}_{ns_l} = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{s_l=p} {}_n\tilde{r}^{(l)}_{ns_l} = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{s_l=p} {}_n\tilde{r}^{(l)}_{np} \\ &\leqslant \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{M_n} {}_n\tilde{r}^{(l)}_{np} = \sum_{p=1}^{n-1} ({}_n\tilde{c}_n)_{np} \leqslant \sum_{p=1}^{n-1} ({}_nc)_{np} = \sum_{p-1}^{n-1} \sum_{h \geqslant n} c_{hp} \\ &\leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{h \geqslant n} c_{hp} = \sum_{h \geqslant n} \left(\sum_{p=1}^{\infty} c_{hp} \right) \to 0, \quad (n \to \infty) \end{aligned} $$

令 $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} [N_{n-1}, N_n) \subset E$，则(11)式真.　　证毕.

§3. 非稳定流的分解定理

设 P 是至多可数集 E 上的转移矩阵，$u = \{u_i\} (u_i > 0, i \in E)$ 是任意初始分布，只假定 $u_i > 0 (i \in E)$，令

$$ c_{ij} = (u_i p_{ij} - u_j p_{ji})^+, \quad (i, j \in E) \tag{12} $$

称为从 i 到 j 的概率(净)流，称 $C = (c_{ij})_{(i, j \in E)}$ 为概率流阵(依赖于 u).

如果 u 不是平稳分布，则 C 不满足(c.3)，取 $\bar{E} \equiv E \cup \{\varDelta\}$ ($\varDelta$ 为一附加状态)，令

$$ \begin{aligned} c_{\varDelta i} &\equiv \Big[\sum_{j \in E} (c_{ij} - c_{ji}) \Big]^+, \quad (i \in E) \\ c_{i\varDelta} &\equiv \Big[\sum_{j \in E} (c_{ij} - c_{ji}) \Big]^-, \quad (i \in E) \\ c_{\varDelta\varDelta} &\equiv 0. \end{aligned} \tag{13} $$

记 $\bar{C} \equiv (c_{ij})_{(i, j \in \bar{E})}$.

引理 5 $\bar{C}\in\mathscr{C}(\bar{E})$且满足(c.4).

证 (c.1)显然

(c.2)
$$c_{ij}\cdot c_{ji}=(u_ip_{ij}-u_jp_{ji})^+\cdot(u_ip_{ij}-u_jp_{ji})^-=0,\quad (i,\ j\in E)$$
$$c_{i\Delta}\cdot c_{\Delta i}=[\sum_{j\in E}(c_{ij}-c_{ji})]^+\cdot[\sum_{j\in E}(c_{ij}-c_{ji})]^-=0,\quad (i\in E)$$

(c.4) 注意 $\sum\limits_{i,j\in E}u_ip_{ij}=\sum\limits_{i\in E}u_i=1$, 从而
$$\sum_{i,j\in E}c_{ij}\leqslant\sum_{i,j\in E}(u_ip_{ij}+u_jp_{ji})=2$$
$$\sum_{i\in\bar{E}}(\sum_{j\in\bar{E}}c_{ij})=\sum_{i\in E}\sum_{j\in\bar{E}}c_{ij}+\sum_{j\in\bar{E}}c_{\Delta j}=\sum_{i,j\in E}c_{ij}+\sum_{i\in E}c_{i\Delta}+\sum_{j\in E}c_{\Delta j}+c_{\Delta\Delta}\leqslant 6$$
$$\therefore\quad \sum_{i,j\in\bar{E}}c_{ij}=\sum_{i\in\bar{E}}\sum_{j\in\bar{E}}c_{ij}<+\infty.$$

(c.3) $i\in E$
$$\begin{aligned}\sum_{j\in\bar{E}}(c_{ij}-c_{ji})&=\sum_{j\in E}(c_{ij}-c_{ji})+(c_{i\Delta}-c_{\Delta i})\\&=\sum_{j\in E}[(u_ip_{ij}-u_jp_{ji})^+-(u_ip_{ij}-u_jp_{ji})^-]\\&\quad+[\sum_{j\in E}(c_{ij}-c_{ji})]^--[\sum_{j\in E}(c_{ij}-c_{ji})]^+\\&=\sum_{j\in E}(u_ip_{ij}-u_jp_{ji})-\sum_{j\in E}(c_{ij}-c_{ji})=0\end{aligned}$$

$i\in\Delta$
$$\begin{aligned}\sum_{i\in\bar{E}}(c_{\Delta j}-c_{j\Delta})&=\sum_{j\in E}\{[\sum_{k\in E}(u_jp_{jk}-u_kp_{kj})]^+-[\sum_{k\in E}(u_jp_{jk}-u_kp_{kj})]^-\}\\&=\sum_{j\in E}\sum_{k\in E}(u_jp_{jk}-u_kp_{kj})=0\end{aligned}$$

证毕.

定义 4 $G\equiv(g_{ij})_{(i,j\in E)}$ 称为一个散流矩阵, 如果存在着一条路
$$\nu=(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n),\quad (n\geqslant 2,\ i_1,\ \cdots,\ i_n\ \text{互异}),$$
使有
$$g_{ij}=\begin{cases}b>0, & (i,\ j)\in\nu\\ 0, & (i,\ j)\notin\nu\end{cases}$$

定理 3 对任意初始分布 $u=\{u_i\}_{(i\in E)}(u_i>0)$, P 可分解为
$$p_{ij}=p_{ij}^d+\sum_{k\in K}r_{ij}^{(k)}/u_i+\sum_{l\in L}g_{ij}^{(l)}/u_i,\quad (K、L\subset I)\tag{14}$$
其中 p_{ij}^d 满足
$$u_ip_{ij}^d=u_jp_{ji}^d,\quad (i,\ j\in E)$$
称为可逆成分; $R^{(k)}\equiv(r_{ij}^{(k)})_{(i,j\in E)}\in\mathscr{R}(E)$, 其和式称为环流成分; $G^{(l)}\equiv(g_{ij}^{(l)})_{(i,j\in E)}$ 是散流阵, 其和式称为散流成分.

证 按引理 5 之所言, $\bar{C}\in\mathscr{C}(\bar{E})$ 且满足(c.4), 故由定理 2 知, 存在分解
$$\bar{C}=\sum_{k\in K}\bar{R}^{(k)}+\sum_{l\in L}\bar{G}^{(l)},\quad (K,\ L\subset I)\tag{15}$$
其中 $\bar{R}^{(k)}\equiv(r_{ij}^{(k)})_{(i,j\in\bar{E})}\in\mathscr{R}(\bar{E})$, 但不经过 Δ, 亦即有
$$R^{(k)}\equiv(r_{ij}^{(k)})_{(i,j\in E)}\in\mathscr{R}(E);$$
$\bar{G}^{(l)}\equiv(g_{ij}^{(l)})_{(i,j\in\bar{E})}\in\mathscr{R}(\bar{E})$ 且经过 Δ, 亦即
$$G^{(l)}\equiv(g_{ij}^{(l)})_{(i,j\in E)}$$
是 E 上的散流矩阵.

将(15)式限制在 E 上，便有

$$c_{ij}=\sum_{k\in K} r_{ij}^{(k)}+\sum_{l\in L} g_{ij}^{(l)},\quad (i,\ j\in E) \tag{16}$$

注意

$$u_i p_{ij}=(u_i p_{ij}\wedge u_j p_{ji})+c_{ij},\quad (i,\ j\in E) \tag{17}$$

因 $u_i>0$，故有

$$p_{ij}=(u_i p_{ij}\wedge u_j p_{ji})/u_i+c_{ij}/u_i,\quad (i,\ j\in E) \tag{18}$$

令

$$p_{ij}^d=(u_i p_{ij}\wedge u_j p_{ji})/u_i,\quad (i,\ j\in E) \tag{19}$$

将(16)、(19)代入(18)，便得(14)式. 显然有

$$u_i p_{ij}^d=u_j p_{ji}^d,\quad (i,\ j\in E)$$

证毕.

注意在(13)中

$$c_{\Delta i}=c_{\Delta i}=0(i\in E)\Leftrightarrow u \text{ 是平稳分布},$$

便有

系　若 u 是 P 的平稳分布，$u_i>0(i\in E)$，则有分解

$$p_{ij}=p_{ij}^d+\sum_{j\in J} r_{ij}^{(k)}/u_i,\ (R^{(k)}\equiv(r_{ij}^{(k)})\in\mathscr{R}(E),\ J\subset I).$$

此即钱敏平的可逆与环流分解定理.

§4. 概率流速的分解定理

设 E 为至多可数集，$Q=(q_{ij})$ 为 E 上的 Q 矩阵.

设 $u=\{u_i\}_{(i\in E)}$ 为初始分布. 令

$$v_{ij}=(u_i q_{ij}-u_j q_{ji})^+,\quad (i,\ j\in E) \tag{20}$$

称为从 i 到 j 的概率流速，称 $\mathrm{V}\equiv(v_{ij})_{(i,\,j\in E)}$ 为 E 上的概率流速矩阵

附加状态 Δ，设 $\bar{E}=E\cup\{\Delta\}$. 令 $\bar{V}\equiv(v_{ij})_{(i,\,j\in\bar{E})}$ 其中

$$\begin{aligned} v_{\Delta i}&\equiv\Big[\sum_{j\in E}(u_i q_{ij}-u_j q_{ji})\Big]^+,\quad (i\in E)\\ v_{i\Delta}&\equiv\Big[\sum_{j\in E}(u_i q_{ij}-u_j q_{ji})\Big]^-,\quad (i\in E)\\ v_{\Delta\Delta}&\equiv 0. \end{aligned} \tag{21}$$

引理 6　设 Q 与 u 满足条件

(Q.1)

$$M\equiv\sum_{i\in E} u_i q_i<+\infty$$

则 $\bar{V}\in\mathscr{C}(\bar{E})$ 且满足(c.4).

证　(c.1)、(c.2)显然

(c.4)　$\because\ \sum_{i,j\in E} v_{ij}=\sum_{i,j\in E}(u_i q_{ij}-u_j q_{ji})^+=\sum_{i\neq j}(u_i q_{ij}-u_j q_{ji})^+\leqslant\sum_{i\neq j} u_i q_{ij}+\sum_{i\neq j} u_j q_{ji}$

注意当 $i\neq j$，$q_{ij}\geqslant 0$，故

$$\sum_{i\neq j} u_i q_{ij}=\sum_{i\in E} u_i\Big(\sum_{j\neq i} q_{ij}\Big)=\sum_{i\in E} u_i q_i=M<+\infty$$

从而

$$\sum_{i,j\in E} v_{ij}\leqslant 2M$$

$$\sum_{i,j\in\bar{E}} v_{ij} = \sum_{i,j\in E} v_{ij} + \sum_{i\in E} v_{i\Delta} + \sum_{i\in E} v_{\Delta i} + v_{\Delta\Delta}$$

$$= \sum_{i,j\in E} v_{ij} + \sum_{i\in E}\Big[\sum_{j\in E}(u_i q_{ij} - u_j q_{ji})\Big]^- + \sum_{i\in E}\Big[\sum_{j\in E}(u_i q_{ij} - u_j q_{ji})\Big]^+$$

$$= \sum_{i,j\in E} v_{ij} + \sum_{i\in E}\Big|\sum_{j\in E}(u_i q_{ij} - u_j q_{ji})\Big| \leqslant \sum_{i,j\in E} v_{ij} + 2\sum_{i,j\in E}|u_i q_{ij}|$$

$$= \sum_{i,j\in E} v_{ij} + 2\Big(\sum_{i\neq j} u_i q_{ij} + \sum_{i\in E} u_i q_i\Big) \leqslant 6M < +\infty.$$

(c.3) $i\in E$

$$\sum_{i\in\bar{E}}(v_{ij} - v_{ji}) = \sum_{j\in E}(v_{ij} - v_{ji}) + v_{i\Delta} - v_{\Delta i} = \sum_{j\in E}(v_{ij} - v_{ji}) - \sum_{j\in E}(u_i q_{ij} - u_j q_{ji})$$

$$= \sum_{j\in E}(u_i q_{ij} - u_j q_{ji}) - \sum_{j\in E}(u_i q_{ij} - u_j q_{ji}) = 0$$

$i=\Delta$

$$\sum_{j\in\bar{E}}(v_{\Delta j} - v_{j\Delta}) = \sum_{j\in E}(v_{\Delta j} - v_{j\Delta}) + (v_{\Delta\Delta} - v_{\Delta\Delta}) = \sum_{j\in E}\sum_{k\in E}(u_j q_{jk} - u_k q_{kj})$$

$$= \sum_{j,k\in E} u_j q_{jk} - \sum_{j,k\in E} u_k q_{kj} = 0.$$

证毕.

定理4 设 Q 及 u 满足 $(Q.1)$, $u_i>0\,(i\in E)$, 则有分解

$$q_{ij} = q_{ij}^d + \sum_{k\in K} s_{ij}^{(k)}/u_i + \sum_{l\in L} t_{ij}^{(l)}/u_i, \quad (i,\ j\in E,\ K,\ L\subset I) \tag{23}$$

其中 q_{ij}^d 满足

$$u_i q_{ij}^d = u_j q_{ij}^d, \quad (i,\ j\in E) \tag{24}$$

$S^{(k)}\equiv(s_{ij}^{(k)})\in\mathscr{R}(\bar{E})$, $T^{(l)}\equiv(t_{ij}^{(l)})_{(i,j\in\bar{E})}$是散流矩阵.

证 由引理6, 知 $\bar{V}\equiv(v_{ij})_{(i,j\in\bar{E})}$满足定理2的要求, 故有分解

$$\bar{V} = \sum_{k\in K} S^{(k)} + \sum_{l\in L} T^{(l)}, \quad (K,\ L\subset I)$$

其中 $S^{(k)}\in\mathscr{R}(\bar{E})$不经过 Δ, $T^{(l)}\in\mathscr{R}(\bar{E})$经过 Δ.

在 E 上, 则有

$$v_{ij} = \sum_{k\in K} s_{ij}^{(k)} + \sum_{l\in L} t_{ij}^{(l)}, \quad (i,\ j\in E). \tag{25}$$

$S^{(k)}\equiv(s_{ij}^{(k)})_{(i,j\in E)}\in\mathscr{R}(E)$, $T^{(l)}\equiv(t_{ij}^{(l)})_{(i,j\in E)}$是散流矩阵, 注意

$$u_i q_{ij} = (u_i q_{ij}\wedge u_j q_{ji}) + v_{ij} \tag{26}$$

$$q_{ij} = (u_i q_{ij}\wedge u_j q_{ji})/u_i + v_{ij}/u_i \tag{27}$$

令

$$q_{ij}^d = (u_i q_{ij}\wedge u_j q_{ji})/u_i \tag{28}$$

易知其满足(24), 将(25)、(28)代入(27)即得(23).

系 设 Q 矩阵保守、u 平稳, $u_i>0\,(i\in E)$, $(Q.1)$成立, 则 Q 可分解为

$$q_{ij} = q_{ij}^d + \sum_{k\in K} s_{ij}^{(k)}/u_j, \quad (i,\ j\in E,\ K\subset I) \tag{29}$$

证 在(21)中, $u_{i\Delta}=u_{\Delta i}=0\,(i\in E)$当且仅当

$$\sum_{j\in E}(u_i q_{ij} - u_j q_{ji}) = 0, \quad (i\in E)$$

由于 Q 保守, 且 $(Q.1)$成立, 故 $\sum_{j\in E} u_j q_{ji} = 0\,(i\in E)$. 而且 u 是平稳分布.

故当 u 是平稳分布时, (23)式中 $L=\emptyset$, 化为(29). 证毕.

参考文献

[1] 钱敏平，平均跳跃次数有限的马氏链及其可逆性 北大学报，**2** (1978).
[2] 钱敏平，可逆与环流分解中国科学数学增刊，1979.
[3] 侯振挺、汪培庄，可逆时齐马尔可夫链北京师大学报 **1**(1979)23.
[4] 侯振挺、汪培庄，任意时齐马氏链可逆的充要条件及平稳分布的简捷求法(未发表).
[5] 侯振挺、郭青峰，陈木法，可逆 Q 过程存在准则(未发表).
[6] 侯振挺、陈木法，可逆生灭过程(未发表).
[7] 侯振挺、郭青峰，可逆单流出 Q 过程(未发表).
[8] 侯振挺、汪培庄，可逆双边生灭过程(未发表).
[9] 侯振挺、汪培庄，非保守的可逆生灭过程(未发表).
[10] Haken: Rev. Mod. Phys. **47** (1975), 67.
[11] K. Jomita, Johta, H. Tomita: Irreversible circulation and orbital revolution. *Progress of theoretical Phys.* **52** (1974), 1764.

THE DECOMPOSITION THEOREM OF A PROBABILITY-FLOW

HOU ZHENTING
(Zhang Sha Railway College)
WANG PEIZHUANG
(Beijing Normal University)

ABSTRACT

Suppose that p is a Markov transition matrix on the space E, and $\{u_i\}(i\in E)$ is an initial distribution. The matrix $(u_i p_{ij})$ is called a propability-flow. We obtain the following theorem: For any initial distribution $\{u_i\}(u_i>0)$ which need not be stationary, we have

$$u_i p_{ij}=u_i p_{ij}^d+\sum_{k\in K} r_{ij}^{(k)}+\sum_{l\in L} g_{ij}^{(l)}$$

where,

1) $$u_i p_{ij}^d=u_j p_{ji}^d, \quad (i,\ j\in E)$$

(p_{ij}^d) is called the detailed balanced part of p;

2) For each $k\in K$ (at most denumerable), there is a circular road

$$\alpha^{(k)}=(i_1^{(k)},\ i_2^{(k)},\ \cdots,\ i_n^{(k)},\ i_1^{(k)})$$

$(n\geqslant 3,\ i_s\neq i_t(S\neq t,\ 1\leqslant S,\ t\leqslant n)$, and there is a constant $c_k>0$, such that

$$r_{ij}^{(k)}=\begin{cases} c_k, & (i,\ j)\in\alpha^{(k)} \\ 0, & (\text{else}) \end{cases}$$

and $(\sum_{k\in K} r_{ij}^{(k)})$ is called the circulation part of p;

3) For any $l\in L$ (at most denumerable), there is a read in E:

$$r^{(l)}=(j_1^{(l)},\ \cdots,\ j_n^{(l)})$$

$(n\geqslant 2,\ j_s^{(l)}\neq j_t^{(l)}(s\neq t,\ l\leqslant s,\ t\leqslant n)$, and there is a constant $d_l>0$, such that

$$g_{ij}^{(l)}=\begin{cases} d_l, & (i,\ j)\in r^l \\ 0, & (\text{else}) \end{cases}$$

and $(\sum_{l\in L} g_{ij}^{(l)})$ is called the divergent part of p.

This theorem is an extetion of the theorem of circulation decomposition given by Qian Minping.