数 学 年 刊
1 (1) 1980

一个新的均值定理及其应用

潘 承 洞
(山东大学)

§1. 引 言

设
$$\pi(x; d, l)=\sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv l(\bmod d)}} 1.$$

1948 年, A. Renyi[16] 证明了下述定理:

定理 1 对任意给定的正数 A, 存在正数 $\eta<1$, 使得

$$R(x^\eta; x)=\sum_{d<x^\eta}\max_{y\le x}\max_{(l,d)=1}\left|\pi(y; d, l)-\frac{\pi(y; 1, 1)}{\phi(d)}\right|\ll x/\log^A x,$$

其中 $\phi(d)$ 为欧拉函数.

准确地说, A. Rényi 的结果是在加权的情况下证明的; 但是把权函数去掉, 是没有什么本质困难的.

由定理 1. 他证明了下面的命题:

每个大偶数是一个素数与一个素因子个数不超过 C 的殆素数之和.

为简便起见, 我们以 $(1, C)$ 记上述命题. A. Rényi 没有给出 C 与 η 的定量估计. 用他的方法, 只知道 η 很小, 而 C 则很大. 此后, 在较长的时间内没有给出 C 的定量估计.

M. Б. Барбан[12] (1961) 与作者[5] (1962) 独立地证明了: 当 $\eta<\frac{1}{6}$ 与 $\eta<\frac{1}{3}$ 时, 定理 1 成立. 由 $\eta<\frac{1}{3}$, 作者首次得到了一个定量结果——$(1, 5)$. 1962 年, 王元由 $\eta<\frac{1}{3}$ 证明了 $(1, 4)$. 此后, 作者[14] (1962) 与 M. Б. Барбан (1963) 又独立地证明, 当 $\eta<\frac{3}{8}$ 时定理 1 成立, 从而得出了 $(1, 4)$ 而避免了冗长的数值计算. 1965 年, A. A. Бухштаб 在 $\eta<\frac{3}{8}$ 的条件下, 证明了 $(1, 3)$.

1965 年, A. И. Виноградов 与 E. Bombieri[1] 独立地证明, 当 $\eta<\frac{1}{2}$ 时, 定理 1 成立.

事实上, E. Bombieri 证明了下述重要定理.

定理 2 (Bombieri) 对任意给定的 $A>0$, 有

$$\sum_{d\le x^{\frac{1}{2}}\log^{-B_2}x}\max_{y\le x}\max_{(l,d)=1}\left|\pi(y; d, l)-\frac{\pi(y; 1, 1)}{\phi(d)}\right|\ll x\log^{-A}x,$$

本文 1979 年 12 月 17 日收到.
本文是作者 1979 年 7 月 26 日在英国 Durham 举行的解析数论会议上的报告.

其中 $B_1=3A+23$.

由此定理可以推出(1, 3)而无须繁琐的计算.

1975年,丁夏畦与作者证明了一个新的均值定理:

定理3　设

$$\pi(x;\ a,\ d,\ l)=\sum_{\substack{ap\leqslant x\\ ap\equiv l(\bmod d)}}1.$$

又设 $f(x)$ 是实函数, $f(a)\ll 1$, 则对任意给定的 $A>0$, 有

$$\sum_{d\leqslant x^{\frac{1}{2}}\log^{-B_2}x}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant x^{1-\varepsilon}\\(a,d)=1}}f(a)\pi(y;\ a,\ d,\ l)-\frac{\pi(y;\ a,\ 1,\ 1)}{\phi(d)}\right|\ll\frac{x}{\log^A x},$$

其中 $B_2=\frac{3}{2}A+17$, $0<\varepsilon<1$.

取
$$f(a)=\begin{cases}1, & a=1,\\ 0, & a>1.\end{cases}$$

我们得到

$$\left|\sum_{a\leqslant x^{1-\varepsilon}}f(a)\left(\pi(y;\ a,\ d,\ l)-\frac{\pi(y;\ a,\ 1,\ 1)}{\phi(d)}\right)\right|=\left|\pi(y;\ d,\ l)-\frac{\pi(y;\ 1,\ 1)}{\phi(d)}\right|.$$

因此, 定理3是定理2的推广. 但它不仅仅是一种推广; 它有许多重要应用, 这些应用是不能从 Bombieri 定理得到的. 在§3中将给出这方面的例子.

§2. 定理3的证明

为了证明定理3, 需要几个熟知的引理.

引理1　设 a_n 是任意复数, 则

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2\ll(Q^2+N)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2,$$

$$\sum_{H<q\leqslant Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2\ll\left(Q+\frac{N}{H}\right)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2,$$

其中“*”表示对于模 q 的所有原特征求和.

引理2　设 $T\geqslant 2$. 若 $\left|\sigma-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{200\log qT}$, 则

$$\sum_{\chi_q}{}^{*}\int_{-T}^{T}|L(\sigma+it,\ \chi)|^4dt\ll\phi(q)T\log^4 qT$$

且
$$\sum_{\chi_q}{}^{*}\int_{-T}^{T}|L'(\sigma+it,\ \chi)|^4dt\ll\phi(q)T\log^8 qT.$$

令
$$\psi(x;\ a,\ d,\ l)=\sum_{\substack{an\leqslant x\\ an\equiv l(\bmod d)}}\Lambda(n)$$

以及
$$R(D;\ x,\ f)=\sum_{d\leqslant D}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant x^{1-\varepsilon}\\(a,d)=1}}f(a)\left(\psi(y;\ a,\ d,\ l)-\frac{\psi(y;\ a,\ 1,\ 1)}{\phi(d)}\right)\right|,$$

其中 $D=x^{\frac{1}{2}}\log^{-B_2}x$, $B_2=\frac{3}{2}A+17$.

当 $(a, d)=(l, d)=1$ 时，我们有

$$\psi(y;\ a,\ d,\ l)=\frac{1}{\phi(d)}\sum_{an\leqslant y}\sum_{\chi_d}\chi(an)\,\overline{\chi}(l)\,\chi(n)$$

$$=\frac{1}{\phi(d)}\sum_{an\leqslant y}\chi_d^0(n)\,\Lambda(n)+\frac{1}{\phi(d)}\sum_{\chi_d\neq\chi_d^0}\overline{\chi}(l)\,\chi(a)\sum_{an\leqslant y}\chi(n)\,\Lambda(n)$$

$$=\frac{1}{\phi(d)}\sum_{an\leqslant y}\Lambda(n)+\frac{1}{\phi(d)}\sum_{1<q/d}\sideset{}{^*}\sum_{\chi_q}\overline{\chi}(l)\,\chi(a)\sum_{\substack{an\leqslant y\\(n,d)=1}}\chi(n)\,\Lambda(n)$$

$$+O\left(\frac{\log d\log y}{\phi(d)}\right).$$

由此得到

$$R(D;\ x,\ f)\leqslant\sum_{d\leqslant D}\frac{1}{\phi(d)}\sum_{1<q|d}\max_{y\leqslant x}\sideset{}{^*}\sum_{\chi_q}\Big|\sum_{\substack{a\leqslant x^{1-\varepsilon}\\(a,d)=1}}f(a)\,\chi(a)\sum_{\substack{an\leqslant y\\(n,d)=1}}\Lambda(n)\,\chi(n)\Big|$$

$$+O\left(\frac{x}{\log^A x}\right)$$

$$\leqslant\log x\cdot\max_{m\leqslant D}\sum_{1<q\leqslant D}\frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi_q}\Big|\sum_{\substack{a\leqslant x^{1-\varepsilon}\\(a,m)=1}}f(a)\,\chi(a)$$

$$\cdot\sum_{\substack{a\leqslant y\\(n,m)=1}}\Lambda(n)\,\chi(n)\Big|+O\left(\frac{x}{\log^A x}\right). \tag{1}$$

设 h 是任一固定的正数，$D_1=\log^h x$，则由(1)式及 Siegel-Walfisz 定理可知

$$R(D;\ x,\ f)\leqslant\log x\cdot\max_{m\leqslant D}\sum_{D_1<q\leqslant D}\frac{1}{\phi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi_q}\Big|\sum_{\substack{a\leqslant x^{1-\varepsilon}\\(a,m)=1}}f(a)\,\chi(a)$$

$$\cdot\sum_{\substack{an\leqslant y\\(n,m)=1}}\Lambda(n)\,\chi(n)\Big|+O\left(\frac{x}{\log^A x}\right). \tag{2}$$

设　$D_1\leqslant Q\leqslant 2D_1$，$Q<Q'\leqslant 2Q_1$，并以 (q) 表示 $Q<q\leqslant Q'$；

$\frac{1}{2}\leqslant E\leqslant x^{1-\varepsilon}$，$E<E'\leqslant 2E$，并以 (a) 表示 $E<a\leqslant E'$；

又记

$$I_m(Q,\ E)=\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\max_{y\leqslant x}\sideset{}{^*}\sum_{\chi_q}\Big|\sum_{\substack{(a)\\(a,m)=1}}f(a)\,\chi(a)\sum_{\substack{an\leqslant y\\(n,m)=1}}\Lambda(n)\chi(n)\Big|。$$

则定理 3 显然可由

$$I_m(Q,\ E)\ll\frac{x}{\log^{A+3}x} \tag{3}$$

导出.

为了方便起见，令

$$f^{(m)}(a)=\begin{cases}f(a), & (m,\ a)=1,\\ 0, & (m,\ a)>1.\end{cases}$$

$$d_E^{(m)}(n)=\Lambda(n),\qquad E\leqslant D_1^2,$$

$$d_E^{(m)}(n)=\begin{cases}\Lambda(n), & (n,m)=1,\\ 0, & (n,m)>1,\end{cases}\quad E>D_1^2.$$

$$I'_m(Q,E)=\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\max_{y\leqslant x}\sum_{\chi_q}{}^*\left|\sum_{(a)}f^{(m)}(a)\chi(a)\sum_{an\leqslant y}d_E^{(m)}(n)\chi(n)\right|.$$

我们有关系式

$$I_m(Q,E)=I'_m(Q,E)+O\left(\frac{x}{\log^{A+3}x}\right).\tag{4}$$

由 Perron 公式可以得到

$$I'_m(Q,E)\ll\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\max_{y\leqslant x}\sum_{\chi_q}{}^*\left|\int_{b-iT}^{b+iT}f_E^{(m)}(s,\chi)d_E^{(m)}(s,\chi)\frac{y^s}{s}ds\right|$$

$$+O\left(\frac{x}{\log^{A+3}x}\right),\tag{5}$$

其中
$$s=\sigma+it,\quad b=1+\frac{1}{\log x},\quad T=x^{10},$$

$$d_E^{(m)}(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}d_E^{(m)}(n)\chi(n)n^{-s},\quad \sigma>1,$$

$$f_E^{(m)}(s,\chi)=\sum_{(a)}f^{(m)}(a)\chi(a)a^{-s}.$$

引理3 若 $E\leqslant D_1$, 则

$$I'_m(Q,E)\ll xD_1^{-1}\log^{13}x+x^{\frac{1}{2}}DD_1^{\frac{1}{2}}\log^6 x.\tag{6}$$

证 令 $M_1=QD_1$ 及

$$H(s,\chi)=\sum_{n\leqslant M_1}\mu(n)\chi(n)n^{-s},$$

并以 G, F, H 分别表示 $d_E^{(m)}(s,\chi)$, $f_E^{(m)}(s,\chi)$, 以及 $H(s,\chi)$, 则

$$FG=FG(1-LH)+FGLH=FG(1-LH)-FL'H.\tag{7}$$

但是

$$FG=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\chi(n)n^{-s}=F_1+F_2,\tag{8}$$

其中

$$F_1=\sum_{n\leqslant M_1}a(n)\chi(n)n^{-s},\quad F_2=\sum_{n>M_1}a(n)\chi(n)n^{-s},\tag{9}$$

$$a(n)=\sum_{l\mid n}d_E^{(m)}(l)f^{(m)}\left(\frac{n}{l}\right).$$

由 (7), (8), (9) 三式我们得到

$$\int_{b-iT}^{b+iT}FG\frac{y^s}{s}ds=\int_{(b,T)}FG\frac{y^s}{s}ds=\int_{(b,T)}F_2(1-LH)\frac{y^s}{s}ds$$

$$+\int_{\left(\frac{1}{2},T\right)}(F_1-F_1LH-FL'H)\frac{y^s}{s}ds+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

由此及 Schwarz 不等式, 得出

$$I'_m(Q,\ E)\ll x\log x\max_{\mathrm{Re}\,s=b}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}|F_2|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\max_{\mathrm{Re}\,s=b}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}|1-LH|^2\Big)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\log x\,Q^{\frac{1}{2}}\max_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}|F_1|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$+x^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{3}{4}}x\max_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}|F_1|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\max_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}|H|^4\Big)^{\frac{1}{4}}$$

$$\cdot\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\int_{(\frac{1}{2},T)}\frac{|L|^4}{|s|}|ds|\Big)^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{3}{4}}x\max_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}|F|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\max_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}|H|^4\Big)^{\frac{1}{4}}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\int_{(\frac{1}{2},T)}\frac{|L'|^4}{|s|}|ds|\Big)^{\frac{1}{4}}. \tag{10}$$

用引理 1, 2 估计(10)式中的各项, 立可得(10)式.

引理 4　若 $E>D_1^2$, 则

$$I'_m(Q,\ E)\ll xD_1^{-1}\log^4 x+x^{\frac{1}{2}}D\log^2 x. \tag{11}$$

证　取 $M_2=Q^2$.

当 $\mathrm{Re}\,s=b=1+\dfrac{1}{\log x}$ 时, 我们得到

$$G=d_E^{(m)}(s,\ \chi)=G_1+G_2,$$
$$G_1=\sum_{n\leqslant M_2}d_E^{(m)}(n)\,\chi(n)n^{-s},\qquad G_2=\sum_{n>M_2}d_E^{(m)}(n)\,\chi(n)n^{-s},$$

而且　$$\int_{(b,T)}FG\frac{y^s}{s}ds=\int_{(b,T)}FG_2\frac{y^s}{s}ds+\int_{(\frac{1}{2},T)}FG_1\frac{y^s}{s}ds+O\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

由此及 Schwarz 不等式, 得到

$$I'_m(Q,\ E)\ll x\log x\max_{\mathrm{Re}\,s=b}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}|G_2|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\max_{\mathrm{Re}\,s=b}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}|G|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$+x^{\frac{1}{2}}\log x\max_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}|G_1|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\max_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}|F|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

同样, 用引理 1, 2 估计(12)式中诸项, 可得到(11)式.

取 $h=A+16$, 则由(6), (11)及(4)式, 推得(3)式, 从而证得定理 3.

附注

若对于正常数 λ_1, λ_2, $f(d)$ 满足条件

$$\sum_{n\leqslant x}|f(n)|\ll x\log^{\lambda_1}x,\qquad \sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n}|f(d)|\ll x\log^{\lambda_2}x, \tag{$\triangle$}$$

则定理 3 也成立

§3. 应　　用

(1) 命题 (1, 2)

在 1966 年和 1973 年, 陈景润引进了一种新的加权筛法, 并证明了(1, 2). 他的主要

贡献，在于指出了证明命题(1, 2)的关键是对于和式

$$\Omega=\sum_{\substack{(p_{1,2})\\ p_3\leqslant N/p_1p_2\\ N-p=p_1p_2p_3}}1$$

的估计，其中 N 是大偶数，$(p_{1,2})$ 表示条件

$$N^{\frac{1}{10}}<p_1\leqslant N^{\frac{1}{3}}\leqslant p_2\leqslant\left(\frac{N}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

而且，他首次得到了成功地估计这种和的方法. 1975 年，我们曾经指出，实现陈氏加权筛法的关键是定理 3.

令

$$P=\prod_{\substack{2<p\leqslant N^{\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}}\\ p\nmid N}}p,$$

我们有

$$\Omega\leqslant\sum_{(p_{1,2})}\sum_{\substack{p\leqslant\frac{N}{p_1p_2}\\ (N-p_1p_2p_3,\,p)=1}}\Big\{\sum_{d\mid(N-p_1p_2p_3,\,p)}\lambda_d\Big\}^2+O(N^{\frac{1}{4}}),$$

其中 λ_d 是 Selberg 函数 $(\lambda_d=0,\ d>N^{\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}})$.

因此

$$\begin{aligned}\Omega&\leqslant\sum_{d_1\mid p}\sum_{d_2\mid p}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{(p_{1,2})}\pi(N;\ p_1p_2,\ [d_1,\ d_2],\ N)+O(N^{\frac{1}{4}})\\
&\leqslant\sum_{(p_{1,2})}\sum_{d_1\mid p}\sum_{d_2\mid p}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{\pi(N;\ p_1p_2,\ 1,\ 1)}{\phi([d_1,\ d_2])}\\
&\quad+O\Big(\sum_{d\leqslant N^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}|\mu(d)|\cdot3^{\omega(d)}\Big|\sum_{\substack{(p_{1,2})\\(p_1p_2,\,d)=1}}\Big(\pi(N;\ p_1p_2,\ d,\ N)\\
&\quad-\frac{\pi(N;\ p_1p_2,\ 1,\ 1)}{\phi(d)}\Big)\Big|\Big)+O(N^{\frac{1}{4}})\\
&\leqslant\sum_{(p_{1,2})}\sum_{d_1\mid p}\sum_{d_2\mid p}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{\pi(N;\ p_1p_2,\ 1,\ 1)}{\phi([d_1,\ d_2])}\\
&\quad+O\Big(\sum_{\substack{d\leqslant N^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\\(d,\,N)=1}}|\mu(d)|\cdot3^{\omega(d)}\Big|\sum_{N^{\frac{13}{30}}<a\leqslant N^{\frac{2}{3}}}f(a)\Big(\pi(N;\ a,\ d,\ N)\\
&\quad-\frac{\pi(N;\ a,\ 1,\ 1)}{\phi(d)}\Big)\Big|\Big)+O(N^{\frac{1}{4}}),\end{aligned}$$

此处

$$f(a)=\begin{cases}1, & \text{当 } a=p_1p_2 \text{ 且 } N^{\frac{1}{10}}<p_1\leqslant N^{\frac{1}{3}}\leqslant p_2\leqslant\left(\frac{N}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ 时},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由此及定理 3，可得

$$\Omega\leqslant\text{主要项}+O\left(\frac{N}{\log^3 N}\right).$$

(2) $D(N)$ 的上界估计

令

$$D(N)=\sum_{N=p_1+p_2}1.$$

A. Selberg 在 1949 年证明了下面的估计

$$D(N)\leqslant 16(1+o(1))\mathfrak{S}(N)\frac{N}{\log^2 N},$$

其中
$$\mathfrak{S}(N)=\prod_{p|N}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

1964 年, 在 $\eta<\frac{1}{3}$ 的情况下, 利用定理 1, 作者[15]将系数 16 改进为 12. 到 1978 年为止, 最好的结果是由 E. Bombieri 与 H. Davenport[2] 给出的, 他们将 12 改进为 8.

要想改进系数 8, 是相当困难的. 1978 年, 陈景润[4]将 8 改进为 7.8342, 但是他的证明实在非常复杂. 最近, 潘承彪给出了这一结果的简化证明, 他得出下面的结果

$$D(N)\leqslant 7.928\mathfrak{S}(N)\frac{N}{\log^2 N}.$$

下面概略地叙述他的证明.

令
$$\mathscr{B}=\{b=N-p,\ p<N\}.$$

容易得到
$$D(N)\leqslant S(\mathscr{B};\mathscr{P},\ N^{\frac{1}{5}})+O(N^{\frac{1}{5}}),\tag{13}$$

其中
$$S(\mathscr{B};\ \mathscr{P},\ z)=\sum_{\substack{b\in\mathscr{B}\\(b,P(z))=1}}1,$$

$$\mathscr{P}=\{p;\ p\nmid N\},\quad P(z)=\prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\p<z}}p.$$

由 Бухштаб 恒等式得出
$$S(\mathscr{B};\mathscr{P},\ z)=S(\mathscr{B};\ \mathscr{P},\ w)-\sum_{\substack{w\leqslant p<z\\p\in\mathscr{P}}}S(\mathscr{B}_p,\ \mathscr{P},\ p),\tag{14}$$

此处 $z\geqslant w\geqslant z$, $\mathscr{B}_d=\{b\in\mathscr{B},\ d|b\}$. 不难证明
$$S(\mathscr{B};\mathscr{P},\ N^{\frac{1}{5}})\leqslant S(\mathscr{B};\mathscr{P},\ N^{\frac{1}{7}})-\frac{1}{2}\Omega_1+\frac{1}{2}\Omega_2+O(N^{\frac{6}{7}}),\tag{15}$$

其中
$$\Omega_1=\sum_{N^{\frac{1}{7}}\leqslant p_1<N^{\frac{1}{5}}}S(\mathscr{B}_{p_1};\mathscr{P},\ N^{\frac{1}{7}}),\tag{16}$$

$$\Omega_2=\sum_{N^{\frac{1}{7}}\leqslant p_2<p_3<p_1<N^{\frac{1}{5}}}S(\mathscr{B}_{p_1p_2p_3};\ \mathscr{P},\ p_3).\tag{17}$$

利用 Jurkat-Richert 定理[11] 及 Bombieri 定理, 我们得到
$$S(\mathscr{B};\mathscr{P},\ N^{\frac{1}{7}})-\frac{1}{2}\Omega_1\leqslant 8(1+o(1))\mathfrak{S}(N)\frac{N}{\log^2 N}$$
$$\left[1+\int_2^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt-\frac{1}{2}\int_{1.5}^{2.5}\frac{\log\left(2.5-\dfrac{3.5}{t+1}\right)}{t}dt\right].\tag{18}$$

但是, 由于 $\max p_1p_2p_3\geqslant N^{\frac{1}{2}}$, 所以不能用这种方法估计 Ω_2.

为了估计 Ω_2, 我们考虑集合
$$\mathscr{L}=\Big\{l=N-(np_2p_3)p;\ N^{\frac{1}{7}}\leqslant p_2<p_3<N^{\frac{1}{5}},\ 1\leqslant n\leqslant\frac{N}{p_2p_3^2},$$
$$\left(n,\ \frac{P(p_1)}{p_2}\right)=1,\ p_3<p_1<\min\left(N^{\frac{1}{5}},\ \frac{N}{np_2p_3}\right)\Big\}.$$

显然
$$\Omega_2=\sum_{p\in\mathscr{L}}1.$$
因此
$$\Omega_2\leqslant S(\mathscr{L};\mathscr{P},N^{\frac{1}{4}-\varepsilon})+O(N^{\frac{6}{7}}).\tag{19}$$

我们用最简单的 Selberg 上界筛法估计 $S(\mathscr{L};\mathscr{P},N^{\frac{1}{4}-\varepsilon})$，其误差项的估计利用定理3，而不是定理2．从而得到
$$S(\mathscr{L};\mathscr{P},N^{\frac{1}{4}-\varepsilon})\leqslant 8(1+o(1))\mathfrak{S}(N)\frac{X}{\log N},\tag{20}$$
其中
$$X=\sum_{N^{\frac{1}{7}}\leqslant p_3<p_2<p_1<N^{\frac{1}{5}}}\ \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\frac{N}{p_1p_2p_3}\\(n,P(p_3))=1}}1.\tag{21}$$

由 Бухштаб 渐近公式，得出
$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant y\\(n,P(y^{\frac{1}{u}}))=1}}1=\frac{y}{\log y^{\frac{1}{u}}}\omega(u)+O\left(\frac{y}{(\log y^{\frac{1}{u}})^2}\right)\tag{22}$$
此处 $\omega(u)$ 满足条件
$$\omega(u)=\frac{1}{u},\qquad 1\leqslant u<2,$$
$$(u\,\omega(u))'=\omega(u-1),\qquad u>2.$$
我们能够计算出
$$\omega(u)<\frac{1}{1.763},\qquad u\geqslant 2.$$
因此，由(22)可得
$$X<\frac{4}{1.763}\left(3\log\frac{7}{5}-1\right)(1+o(1))\frac{N}{\log N}.\tag{23}$$

联合(23)，(20)，(19)，(18)及(15)式，得到
$$S(\mathscr{B};\mathscr{P},N^{\frac{1}{5}})<7.928\mathfrak{S}(N)\frac{N}{\log^2 N}.\tag{24}$$
由此及(13)式，得出
$$D(N)<7.928\mathfrak{S}(N)\frac{N}{\log^2 N}.$$

(3) Titchmarsh 除数问题的一个推广

众所周知，利用定理2可以推出下面的渐近公式
$$\sum_{p\leqslant x}d(p-1)\sim C_1x,$$
其中 $d(n)$ 是除数函数，C_1 是正常数．

用新的均值定理，我们推出了下面的结论：

设 $1\leqslant y\leqslant x^{1-\varepsilon}$ $(0<\varepsilon<1)$，$f(a)$是满足条件(△)的正值函数，则
$$\sum_{\substack{ap\leqslant x\\a\leqslant y}}f(a)d(ap-1)\sim 2x\sum_{d\leqslant x^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\phi(d)}\sum_{a\leqslant y}\frac{f(a)}{a\log\frac{x}{a}}.$$

取

$$f(a)=\begin{cases}1, & a=1,\\ 0, & a>1.\end{cases}$$

就得出

$$\sum_{p\leqslant x} d(p-1)\sim C_1 x.$$

下面，我们给出上述结论的证明提要.

显然，有

$$d(ap-1)=\sum_{\substack{d_1\mid ap-1\\ d_1\leqslant x^{\frac12}\log^{-c}x}}1+\sum_{\substack{d_1\mid ap-1\\ x^{\frac12}\log^{-c}x\leqslant d_1\leqslant x^{\frac12}\log^{c}x}}1+\sum_{\substack{d_1\mid ap-1\\ d_1>x^{\frac12}\log^{c}x}}1.$$

所以

$$\sum_{\substack{ap\leqslant x\\ a\leqslant y}} d(ap-1)=S_1+S_2+S_3,$$

其中

$$S_1=\sum_{\substack{ap\leqslant x\\ a\leqslant y}} f(a)\sum_{\substack{d\mid ap-1\\ d\leqslant x^{\frac12}\log^{-c}x}}1,$$

$$S_2=\sum_{\substack{ap\leqslant x\\ a\leqslant y}} f(a)\sum_{\substack{d\mid ap-1\\ x^{\frac12}\log^{-c}x<d\leqslant x^{\frac12}\log^{c}x}}1,$$

$$S_3=\sum_{\substack{ap\leqslant x\\ a\leqslant y}} f(a)\sum_{\substack{d\mid ap-1\\ d>x^{\frac12}\log^{c}x}}1.$$

我们先来估计 S_2.

显然

$$S_2=\sum_{x^{\frac12}\log^{-c}x<d\leqslant x^{\frac12}\log^{c}x}\ \sum_{a\leqslant y} f(a)\sum_{\substack{ap\leqslant x\\ ap\equiv 1(\mathrm{mod}\, d)}}1$$

$$\ll x\sum_{x^{\frac12}\log^{-c}x<d\leqslant x^{\frac12}\log^{c}x}\frac{1}{\phi(d)}\sum_{a\leqslant y}\frac{f(a)}{a\log\frac{x}{a}}.$$

熟知

$$\sum_{d<z}\frac{1}{\phi(d)}\sim C_1\log z,$$

所以

$$\sum_{x^{\frac12}\log^{-c}x<d\leqslant x^{\frac12}\log^{c}x}\frac{1}{\phi(d)}\ll\log\log x.$$

由上式，我们立即得到

$$S_2\ll x\log\log x\sum_{a\leqslant y}\frac{f(a)}{a\log\frac{x}{a}}.$$

容易证明

$$S_1=\sum_{d\leqslant x^{\frac12}\log^{-c}x}\ \sum_{a\leqslant y} f(a)\sum_{\substack{ap\leqslant x\\ ap\equiv 1(\mathrm{mod}\, d)}}1,$$

由定理 3 立即得到

$$S_1\sim\sum_{d\leqslant x^{\frac12}\log^{-c}x}\frac{1}{\phi(d)}\sum_{a\leqslant y}\frac{f(a)}{a\log\frac{x}{a}}$$

$$\sim x\sum_{d\leqslant x^{\frac12}}\frac{1}{\phi(d)}\sum_{a\leqslant y}\frac{f(a)}{a\log\frac{x}{a}}.$$

不难看出，$S_1=S_2$. 因此，我们证明了

$$\sum_{\substack{ap\leqslant x\\ a\leqslant y}} d(ap-1)\sim 2x\sum_{d\leqslant x^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\phi(d)}\sum_{a\leqslant y}\frac{f(a)}{a\log\frac{x}{a}}.$$

(4) $p+a$ 的最大素因子

设 a 是给定的非零整数，以 P_x 表示

$$\prod_{0<p+a<x}(p+a)$$

的最大素因子.

1973 年，Hooley[10] 证明了

$$P_x>x^\theta,\qquad \theta<\frac{5}{8}.$$

他的证明关键在于估计

$$V(y)=\sum_{\substack{p+a=kq\\ p\leqslant x-a\\ y<q\leqslant ry}}\log q, \tag{25}$$

其中 q 表示素数，且

$$x^{\frac{1}{2}}<y<x^{\frac{3}{4}},\quad 1<r<2.$$

利用 Selberg 筛法，可以将(25)式的估计转化为对

$$\sum_{d\leqslant x^{\frac{1}{2}}\log^{-B}x}\ \sum_{k\leqslant\frac{x}{y}}\ \sum_{\substack{kq\leqslant x\\ kq\equiv a(\bmod d)}}\log q$$

的估计.

显然，我们的定理也是可以应用于这一问题的.

不难看出，我们这里的证明比 Hooley 所使用的方法要简捷得多. 最近，Hooley 教授告诉作者，由

$$D(N)\leqslant(8-\delta)\mathfrak{S}(N)\frac{N}{\log^2 N}\quad(\delta>0)$$

可以将 $\theta<\frac{5}{8}$ 改进为

$$\theta<\frac{1}{2}+\frac{1}{8-\delta}$$

现在，我们对筛法与新的均值定理之间的关系做一简要的说明.

设 N 是一个大的整数，$\mathscr{E}$ 是满足下述条件的正整数集合：

$$(e,N)=1,\ 0<e<x^{1-\eta_1},\ 0<\eta_1<1,\ e\in\mathscr{E}.$$

又设

$$\mathscr{L}=\{l=N-ep,\ e\in\mathscr{E},\ ep\leqslant N\},$$

$$\mathscr{P}=\{p:\ p\nmid N\}.$$

显然，若

$$f(a)=\sum_{\substack{e=a\\ e\in\mathscr{E}}}1$$

满足条件(△)，那么当用 Selberg 筛法估计筛函数

$$S(\mathscr{L};\mathscr{P},z)=\sum_{\substack{l\in\mathscr{L}\\ (l,P(z))=1}}1,\quad z\leqslant N^{\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}},\quad 0<\varepsilon<\frac{1}{2}, \tag{*}$$

时，误差项就可以用新均值定理估计.

大家知道，在陈景润的工作之前我们还不能估计筛函数的下述形式的和:

$$\sum_{q\in Q} S(\mathscr{B}_q; \mathscr{P}_q, z_q), \qquad (**)$$

其中 $\max\limits_{q\in Q} q \geqslant N^{\frac{1}{2}}$，而 Q 是一个由不同的正整数所成的集合，$\mathscr{B}=\{b=N-p,\ p\leqslant N\}$，$\mathscr{B}_q=\{b\in\mathscr{B},\ q\,|\,b\}$，$\mathscr{P}_q$ 是与 q 有关的 $\mathscr{P}$ 的子集，z_q 是与 q 有关的正整数. 这是因为，如果用 Jurkat-Richert 定理估计每个筛函数 $S(\mathscr{B}_q; \mathscr{P}_q, z_q)$，那么，由所有 $S(\mathscr{B}_q; \mathscr{P}_q, z_q)$ 的误差所产生的总误差无法用 Bombieri 定理进行估计. 当然，在 Halberstam 假设下，和式(**)是可以估计的.

陈景润首先找到了当

$$N^{\frac{1}{2}} \leqslant \max_{q\in Q} q \leqslant N^{1-\eta_2}, \quad 0<\eta_2<1$$

时某些形如(**)的和式的估计方法. 他的方法的基本思想，是将和式(**)的估计转化为对和式(*)的估计. 我们的均值定理正是实现陈景润方法的关键.

参 考 文 献

[1] Bombieri E., Mathematika, **12** (1965), 201～205.
[2] Bombieri E., and Davenport H., *Proc. Roy. Soc. Ser.*, **A293** (1966), 1～18.
[3] Chen Jingrun, *Sci. Sin.*, **16** (1973), 157～176.
[4] Chen Jingrun, *Sci. Sin.*, **21** (1978), 701～739.
[5] Pan Chengdong, *Acta Math Sin.*, **12** (1962), 95～106.
[6] Pan Chengdong, Ding Xiaxi, Wan Yuan, *Sci. Sin.*, **18** (1975), 599～610.
[7] Pan Chengdong and Ding Xiaxi, *Acta Math. Sin.*, **18** (1975), 254～262.
[8] Pan Chengdong and Ding Xiaxi, (to appear).
[9] Wang Yuan, *Sci. Sin.*, **11** (1962), 1033～1054.
[10] Hooley C., Mathematika, **40** (1973), 135～143.
[11] Halberstam H., and Richert H-E., Sieve method.
[12] Барбан М. Б., Тру. ИН, Мат. им. В. И. Романовского, **22** (1961).
[13] Барбан М. Б., Мате. Сбор., **61** (1963), 419～425.
[14] Пан Чэн-дун, Sci. Sin., **12** (1963), 455～474.
[15] Пан Чэн-дун, Sci. Sin., **13** (1964), 1045～1053.
[16] Реньи А., ИАН СССР, **2** (1948), 57～78.

A NEW MEAN VALUE THEOREM AND ITS APPLICATIONS

PAN CHENGDONG

(*Shandoung University*)

ABSTRACT

Let
$$\pi(x;\ a,\ d,\ l) = \sum_{\substack{ap\leqslant x\\ ap\equiv l \pmod d}} 1.$$

and let $f(a)$ be a real function, satisfying the condition

$$\sum_{n\leqslant x}|f(n)|\ll x\log^{\lambda_1}x,\quad \sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n}|f(d)|\ll x\log^{\lambda_2}x. \tag{$\triangle$}$$

then for any given $A>0$, we have

$$\sum_{d\leqslant x^{\frac{1}{2}}\log^{-B}x}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant x^{1-\varepsilon}\\(a,d)=1}}f(a)\left(\pi(y;a,d,l)-\frac{\pi(y;a,1,1)}{\phi(d)}\right)\right|\ll\frac{x}{\log^A x}$$

In this paper we use the above estimation to prove the following results.

1) Let
$$\Omega=\sum_{\substack{(p_{1,2})\\p_3\leqslant N/p_1p_2\\N-p=p_1p_2p_3}}1.$$

where N is a large even integer, and $(p_{1,2})$ denotes the condition

$$N^{\frac{1}{10}}<p_1\leqslant N^{\frac{1}{3}}\leqslant p_2\leqslant\left(\frac{N}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Then we have

$$\Omega\leqslant(8+o(1))\sum_{(p_{1,2})}\frac{1}{p_1p_2\log\dfrac{N}{p_1p_2}}\mathfrak{S}(N)\frac{N}{\log^2 N}$$

where
$$\mathfrak{S}(N)=\prod_{p|N}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

2) Let
$$D(N)=\sum_{N=p_1+p_2}1,$$

then we obtain

$$D(N)\leqslant 7.928\,\mathfrak{S}(N)\frac{N}{\log^2 N}$$

3) Let $1\leqslant y\leqslant x^{1-\varepsilon}$ $(0<\epsilon<1)$, $f(a)>0$ and satisfying the condition $(\triangle)$, then we have

$$\sum_{\substack{ap\leqslant x\\a\leqslant y}}f(a)d(ap-1)\sim 2x\sum_{d\leqslant x^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\phi(d)}\sum_{a\leqslant y}\frac{f(a)}{a\log\dfrac{x}{a}}.$$

4) Let p_x denote the largest prime factor of

$$\prod_{0<p+a<x}(p+a),$$

where a is a given non-zero integer.

Hooley proved $p_x>x^\theta$, when $\theta<\frac{5}{8}$, the key of his proof is the estimation of the summation

$$V(y)=\sum_{\substack{p+a=kq\\p\leqslant x-a\\y<q\leqslant ry}}\log q.$$

where q denotes primes, and $x^{\frac{1}{2}}<y<x^{\frac{3}{4}}$, $1<r<2$.

Using the Selberg sieve method, we can turn the above estimation into the estimation of the following sum

$$\sum_{d\leqslant x^{\frac{1}{2}}\log^{-B}y}\sum_{k\leqslant\frac{x}{y}}\sum_{\substack{kq\leqslant x\\kq\equiv a(\mathrm{mod}\ d)}}\log q.$$