数 学 年 刊
1 (2) 1980

二阶拟线性椭圆型方程组的广义黎曼-希尔伯特问题

李 明 忠
(复旦大学)

考察以下复数形式的二阶拟线性椭圆型方程组

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2}+q_1\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+q_2\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2}$$
$$+q_3\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial \bar{z}}+q_4\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z\partial \bar{z}}$$
$$+r\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,\quad z\in G, \tag{1}$$

低阶项 $r\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)$ 表示为

$$r\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)=r_1\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$$
$$+r_2\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial z}+r_0\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

求解复式方程(1)满足边界条件

$$\operatorname{Re}\left[\overline{\lambda_1(z)}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right]=\gamma_1(z),\quad \operatorname{Re}[\overline{\lambda_2(z)}w]=\gamma_2(z),\ z\in\Gamma, \tag{2}$$

的问题，称为二阶拟线性复式方程(1)的广义黎曼-希尔伯特问题.

文 [1, 2, 3] 已指出，对于一般实形式的二阶线性椭圆型方程组，若引进复变量 $z=x+iy$, $w=u+iv$, 在方程组的系数阵行列式满足一定条件时都可以化为(1)的形式，而这个条件又可通过一个自变量变换使得始终得到满足. 同时对形如(1)的线性复式方程的 Dirichlet 问题，Riemann-Hilbert 问题以及其它带微商边界条件的边值问题，许多作者都作了讨论[2—6]，也得到了相应的结果. 本文作者在[3]中通过建立一类积分算子，并结合应用 И. Н. Векуа 在文[7]中讨论一阶方程组所建立的积分算子作为工具，证明了二阶线性复式方程广义黎曼-希尔伯特问题的广义解存在定理和解的表达式，以及判别可解性的充分必要条件和解的个数同指标的关系. 本文将进一步讨论二阶拟线性复式方程(1)的广义黎曼-希尔伯特问题，同样得到相应的可解性结论，最后还把有关的结果推广到非线性复式方程的情形.

首先对方程(1)的系数作如下假定:

(1) $q_i(z, w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)})$ 对任意给定的复数 $w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}$ 关于 $z\in G+\Gamma$ 有界可

本文 1979 年 10 月 8 日收到.

测，给定 $z\in G+\Gamma$ 关于 $w^{(0)}$，$w^{(1)}$，$w^{(2)}$ 连续，且均匀满足椭圆型条件

$$\sup_{z\in G+\Gamma}\left(\sum_{i=1}^{2}|q_i(z,\ w^{(0)},\ w^{(1)},\ w^{(2)})|\right)\leqslant q_1^0,\quad \sup_{z\in G+\Gamma}\left(\sum_{i=3}^{4}|q_i(z,\ w^{(0)},\ w^{(1)},\ w^{(2)})|\right)\leqslant q_2^0,$$
$$2q_1^0+q_2^0<1. \tag{3}$$

(2) $r_i(z,\ w^{(0)},\ w^{(1)},\ w^{(2)})$ 对任意给定的复数 $w^{(0)}$，$w^{(1)}$，$w^{(2)}$ 关于 $z\in G+\Gamma$ 有界可测，给定 $z\in G+\Gamma$ 对任意的连续函数 $w^{(0)}(z)$，$w^{(1)}(z)$，$w^{(2)}(z)$，$r_i(z,\ w^{(0)}(z),\ w^{(1)}(z),\ w^{(2)}(z))\in L_p(G+\Gamma)$，$p>2$ 且

$$|r_i(z,\ w^{(0)}(z),\ w^{(1)}(z),\ w^{(2)}(z)|\leqslant r_i^{(0)}(z),\ L_p(r_i^{(0)}(z))=D_i\quad(i=1,\ 2,\ 3)$$

这些假定统称为条件 (C).

其次假设边界条件(2)的系数 $\lambda_1(z)$，$\gamma_1(z)\in C_\alpha(\Gamma)$，$\lambda_2(z)$，$\gamma_2(z)\in C'_\alpha(\Gamma)$，这里 α 是 Hölder 指数 $(0<\alpha<1)$.

如同[3]中的讨论，不妨设单连通域 G 为单位圆，边界 Γ 为圆周 $|z|=1$，这时引进边值问题的指标

$$n_k=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg\lambda_k(z),\quad k=1,\ 2,$$

可将边界条件(2)化为标准形式

$$\operatorname{Re}\left[z^{-n_1}\frac{\partial w}{\partial\bar z}\right]=\gamma_1(z),\ \operatorname{Re}[z^{-n_2}w]=\gamma_2(z). \tag{4}$$

于是边值问题(1)、(2)就化为问题(1)、(4)，以下就由此出发进行讨论.

§1 边值问题广义解的表示式

在文[3]中我们已得到形如(1)的线性复式方程的广义解表示式，从给出表示式的推导过程可知，它仅同方程的复数形式有关而与方程的系数是否含有未知函数无关. 因此对于二阶拟线性复式方程(1)，它的广义解也有同样的表示式，现不再重复推导而将这些表示式按指标取不同符号分别概述如下.

1 当指标 $n_1\geqslant0$，$n_2\geqslant0$ 时，边值问题(1)、(4)的广义解可表示为

$$w(z)=T_0^{(1)}f+E^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)(\bar\zeta-\bar z)}{\zeta-z}d\xi d\eta+\frac{z^{2n_1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(1-z\bar z)}{1-\bar\zeta z}d\xi d\eta$$
$$+\frac{z^{2n_2+1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(\bar\zeta-\bar z)}{1-\bar\zeta z}d\xi d\eta+E^{(1)}(z), \tag{5}$$

其中 $f(z)\in L_p(G+\Gamma)$，

$$E^{(1)}(z)=\Phi^{(0)}(z)-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\Phi_1^{(0)}(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta-\frac{z^{2n_2+1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{\Phi_1^{(0)}(\zeta)}}{1-\bar\zeta z}d\xi d\eta,$$

$$\Phi_1^{(0)}(z)=\frac{z^{n_1}}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\gamma_1(t)(t+z)}{(t-z)t}dt+\sum_{k=0}^{2n_1}c_k^{(1)}z^k,\ c_{2n_1-k}^{(1)}=-\overline{c_k^{(1)}}\quad(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n_1), \tag{6}$$

$$\Phi^{(0)}(z)=\frac{z^{n_2}}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\gamma_2(t)(t+z)}{(t-z)t}dt+\sum_{k=0}^{2n_2}c_k^{(2)}z^k,\ c_{2n_2-k}^{(2)}=-\overline{c_k^{(2)}}\quad(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n_2). \tag{7}$$

由(6)、(7)易知广义解表示式(5)依赖于 $2(n_1+n_2+1)$ 个任意实常数.

2 当指标 $n_1\geqslant 0$, $n_2<0$ 时,广义解的表示式为

$$w(z)=T_0^{(2)}f+E^{(2)}(z)=\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)(\bar\zeta-\bar z)}{\zeta-z}d\zeta d\eta+\frac{z^{2n_1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(1-z\bar z)}{1-\bar\zeta z}d\zeta d\eta$$
$$+\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\bar\zeta^{-2n_2-1}\overline{f(\zeta)}(\zeta\bar\zeta-1)}{1-\bar\zeta z}d\zeta d\eta+E^{(2)}(z), \tag{8}$$

其中 $f(z)\in L_{p,-2n_2-1}(G+\Gamma)$,即属于 $L_p(G+\Gamma)$ 中满足以下 $-2n_2-1$ 个条件

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_G\zeta^{-n_2-1}(\Phi_1^{(0)}+Tf)d\zeta d\eta-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\gamma_2(t)}{t}dt-ic=0,\\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_G[\zeta^{j-1}(\Phi_1^{(0)}+Tf)+\bar\zeta^{-2n_2-j-1}(\overline{\Phi_1^{(0)}}+\overline{Tf})]d\zeta d\eta-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\gamma_2(t)dt}{t^{-n_2-j-1}}=0\end{cases} \tag{9}$$
$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ -n_2-1)$$

的子空间,式中的 $Tf=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_G\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta d\eta$,

$$E^{(2)}(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\Phi_1^{(0)}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta d\eta-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\bar\zeta^{-2n_2-1}\overline{\Phi_1^{(0)}(\zeta)}}{1-\bar\zeta z}d\zeta d\eta+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\gamma_2(t)}{t^{-n_2}(t-z)}dt.$$

由(6)可知解式(8)依赖于 $2n_1+1$ 个任意实常数.

3 当指标 $n_1<0$, $n_2\geqslant 0$ 时,广义解的表示式为

$$w(z)=T_0^{(3)}f+E^{(3)}(z)=\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)(\bar\zeta-\bar z)}{\zeta-z}d\zeta d\eta+\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\bar\zeta^{-2n_1-1}\overline{f(\zeta)}(\zeta-\bar z)}{1-\bar\zeta z}d\zeta d\eta$$
$$+\frac{z^{2n_2+1}}{\pi}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}(\zeta-z)}{1-\bar\zeta z}d\zeta d\eta+\frac{z^{2n_2+1}}{\pi}\iint_G\zeta^{-2n_1-1}f(\zeta)d\zeta d\eta+E^{(3)}(z), \tag{10}$$

其中 $f(z)\in L_{p,-2n_1-1}(G+\Gamma)$,即属于 $L_p(G+\Gamma)$ 中满足以下 $-2n_1-1$ 个条件

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_G\zeta^{-n_1-1}f(\zeta)d\zeta d\eta-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\gamma_1(t)}{t}dt+ic=0,\\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_G[\zeta^{j-1}f(\zeta)+\bar\zeta^{-2n_1-j-1}\overline{f(\zeta)}]d\zeta d\eta-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\gamma_1(t)}{t^{-n_1-j-1}}dt=0\end{cases} \tag{11}$$
$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ -n_1-1)$$

的子空间.

$$E^{(3)}(z)=\Phi^{(0)}(z)+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\gamma_1(t)(\bar t-\bar z)}{t^{-n_1}(t-z)}dt+\frac{z^{2n_2+1}}{\pi}\int_\Gamma\gamma_1(t)t^{-n_1-1}dt.$$

由(7)可知解式(10)依赖于 $2n_2+1$ 个任意实常数.

4 当指标 $n_1<0$, $n_2<0$ 时,广义解的表示式为

$$w(z)=T_0^{(4)}(z)+E^{(4)}(z)=\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f(\zeta)(\bar\zeta-\bar z)}{\zeta-z}d\zeta d\eta+\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\bar\zeta^{-2n_2-2}\overline{f(\zeta)}(\zeta\bar\zeta-1)}{1-\bar\zeta z}d\zeta d\eta$$
$$+\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\zeta^{-2n_1}\overline{f(\zeta)}(1-z\bar z)}{1-\bar\zeta z}d\zeta d\eta-\frac{\bar z}{\pi}\iint_G\zeta^{-2n_1-1}f(\zeta)d\zeta d\eta+E^{(4)}(z), \tag{12}$$

其中 $f(z)\in L_{p,\substack{-2n_1-1\\-2n_2-1}}(G+\Gamma)$，即属于 $L_p(G+\Gamma)$ 中同时满足等式(9)和(11)共 $-2(n_1+n_2+1)$ 个条件的子空间

$$E^{(4)}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\gamma_1(t)(\bar t-\bar z)}{t^{-n_1}(t-z)}\,dt+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\gamma_2(t)}{t^{-n_2}(t-z)}\,dt.$$

§2 等价的非线性奇异积分方程

基于§1中所给出的表示式，为得到边值问题(1)、(4)的广义解，可将这些表示式代入复式方程(1)，就不难按指标取不同符号的四种情形分别得到和问题(1)、(4)完全等价的非线性奇异积分方程

$$\begin{aligned}&f(z)+\sum_{i=1}^{4}q_i\Big(z,\ T_0^{(k)}f+E^{(k)}(z),\ T_1^{(k)}f+\frac{\partial E^{(k)}(z)}{\partial\bar z},\ T_2^{(k)}f+\frac{\partial E^{(k)}(z)}{\partial z}\Big)S_i^{(k)}f\\&\quad+R^{(k)}f=g^{(k)}(z)\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ 4).\end{aligned}\tag{13}$$

其中 $S_i^{(k)}f$ 是在文[3]中已见过的奇性积分算子

$$S_1^{(k)}f=S^{(k)}f,\ S_2^{(k)}f=\overline{S^{(k)}f},\ S_3^{(k)}f=P^{(k)}f,\ S_4^{(k)}f=\overline{P^{(k)}f}\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ 4).\tag{14}$$

$R^{(k)}f$ 为以下非线性积分算子

$$\begin{aligned}&R^{(k)}f=q_1T_3^{(k)}f+q_2\overline{T_3^{(k)}f}+q_3T_4^{(k)}f+q_4\overline{T_4^{(k)}f}+r_1T_1^{(k)}f+r_2T_2^{(k)}f+r_0\quad(k=1,\ 2),\\&R^{(3)}f=q_3T_4^{(3)}f+q_4\overline{T_4^{(3)}f}+r_1T_1^{(3)}f+r_2T_2^{(3)}f+r_0,\\&R^{(4)}f=r_1T_1^{(4)}f+r_2T_2^{(4)}f+r_0,\end{aligned}\tag{15}$$

出现在(13)和(15)式中的 $T_i^{(k)}f$ 也是在文[3]中已见过的弱奇性积分. 积分方程(13)的自由端 $g^{(k)}(z)$ 是由方程和边界条件的系数完全确定的函数.

由文[3, 7]可知奇性算子 $S_i^{(k)}f$ 都是空间 $L_p(G+\Gamma)$，$p>2$ 中的线性有界算子，且映照到空间 $L_p(G+\Gamma)$ 本身. 若记算子 $S_i^{(k)}f$ 在 $L_p(G+\Gamma)$ 中的范数为 $\Lambda_p^{(k,i)}$，则有

$$\|S_i^{(k)}f\|_p\leqslant\Lambda_p^{(k,i)}\|f\|_p\tag{16}$$

和

$$\begin{aligned}&1\leqslant\Lambda_2^{(k,i)}\leqslant2\quad(i=1,\ 2),\\&\Lambda_2^{(k,i)}=1\qquad(i=3,\ 4).\end{aligned}\tag{17}$$

此外，弱奇性算子 $T_i^{(k)}f$ 是空间 $L_p(G+\Gamma)$，$p>2$ 中的全连续算子，它映照 $L_p(G+\Gamma)$ 到按 Hölder 意义下连续的函数空间 $C_\alpha(G+\Gamma)$，$\alpha=\dfrac{p-2}{p}$，且成立不等式

$$C_\alpha(T_i^{(k)}f)\leqslant M_pL_p(f),\quad M_p=\text{const}.\tag{18}$$

由此再注意到条件(C)不难证明 $R^{(k)}f$ 也是空间 $L_p(G+\Gamma)$，$p>2$ 中的全连续算子，它映照空间 $L_p(G+\Gamma)$ 于自身，且有

$$L_p(R^{(k)}f)\leqslant A_pL_p(f),\quad A_p=\text{const}.\tag{19}$$

有了以上这些性质，我们可进一步讨论非线性奇异积分方程(13)的可解性和边值问题(1)、(4)的广义解存在定理.

§3 奇异积分方程的可解性和边值问题的广义解

首先由积分方程(13)和条件(C)可以得到非线性奇异积分方程(13)的一切解，如果

它存在，则必满足以下模不等式

$$\|f\|_p \leqslant \frac{D_0+g_0^{(k)}}{1-\sum_{i=1}^{2}(q_i^0 \Lambda_p^{(k,i+1)}+D_i M_p)}, \quad g_0^{(k)}=\sup_{z\in G+\Gamma}|g^{(k)}(z)|. \tag{20}$$

因此，由 $\Lambda_p^{(k,i)}$ 关于 p 的连续性可知，当 $p>2$ 而又适当地接近于 2 时，可选取 D_1, D_2 使得 $\sum_{i=1}^{2}(q_i^0\Lambda_p^{(k,i+1)}+D_iM_p)<1$. 进而存在着正常数 $\rho_k>0$, 使得

$$\|f\|_p \leqslant \rho_k. \tag{21}$$

以 $\Omega^{(k)}$ 表示空间 $L_p(G+\Gamma)$, $p>2$ 中适合模不等式(21)的一切元素 ω 的集合

$$\Omega^{(k)} \equiv \{\omega \mid \|\omega\|_p \leqslant \rho_k, \quad k=1, \cdots, 4\},$$

显然 $\Omega^{(k)}$ 是空间 $L_p(G+\Gamma)$, $p>2$ 中的一个弱致密的有界闭凸集.

任意给定 $\omega(z)\in L_p(G+\Gamma)$, $p>2$, 考察线性奇异积分方程

$$f(z)-Q_\omega^{(k)}f=g^{(k)}(z), \tag{22}$$

其中

$$Q_\omega^{(k)}f=-\sum_{i=1}^{4}q_i\left(z, T_0^{(k)}\omega+E^{(k)}(z), T_1^{(k)}\omega+\frac{\partial E^{(k)}(z)}{\partial \bar z}, T_2^{(k)}\omega+\frac{\partial E^{(k)}(z)}{\partial z}\right)S_i^{(k)}f-R_\omega^{(k)}f,$$

而 $R_\omega^{(k)}f$ 表示在(15)式中以 $\omega(z)$ 替代 q_i, r_j 中含有的 $f(z)$ 所得到的弱奇性积分算子，它也是线性算子. 为简便计，以后书写 q_i, r_j 时都略去括弧中的已知项 $E^{(k)}(z)$ 和它的微商. 显然线性算子 $Q_\omega^{(k)}f$ 是压缩算子，即对任意的 f_1, $f_2\in L_p(G+\Gamma)$, $p>2$, 有

$$\|Q_\omega^{(k)}(f_1-f_2)\|_p \leqslant \|f_1-f_2\|_p\sum_{i=1}^{2}(q_i^0\Lambda_p^{(k,i+1)}+D_iM_p)<\|f_1-f_2\|,$$

因此对任意给定的 $\omega(z)\in L_p(G+\Gamma)$, 积分方程(22)有唯一解，相应的解 $f(z)$ 也适合不等式(20)和(21)，且可通过 ω 唯一地表示成

$$f=N^{(k)}\omega, \tag{23}$$

这里 $N^{(k)}\omega$ 一般也是非线性积分算子.

以下证明 $N^{(k)}\omega$ 是确定在球 $\Omega^{(k)}$ 上的连续算子. 为简便计，不妨仅考虑 $k=4$ 的情形. 其它情形同样可证，不过当 $R_\omega^{(k)}f$ 多含有 q_i 的项时，需假设 q_i^0 取得适当小.

设 $\{\omega_m\}$ 是 $\Omega^{(4)}$ 中弱收敛于 $\omega_0\in\Omega^{(4)}$ 的序列，考察相应的序列

$$\{f_m-f_0\}=\{N^{(4)}\omega_m-N^{(4)}\omega_0\}$$

所适合的积分方程

$$\begin{aligned} f_m-f_0&+\sum_{i=1}^{4}q_i(z, T_0^{(4)}\omega_m, T_1^{(4)}\omega_m, T_2^{(4)}\omega_m)S_i^{(4)}(f_m-f_0) \\ &+\sum_{j=1}^{2}r_j(z, T_0^{(4)}\omega_m, T_1^{(4)}\omega_m, T_2^{(4)}\omega_m)T_j^{(4)}(f_m-f_0)+\alpha_m(z)=0, \end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_m(z)=&\sum_{i=1}^{4}[q_i(z, T_0^{(4)}\omega_m, T_1^{(4)}\omega_m, T_2^{(4)}\omega_m)-q_i(z, T_0^{(4)}\omega_0, T_1^{(4)}\omega_0, T_2^{(4)}\omega_0)]S_i^{(4)}f_0 \\ &+\sum_{j=1}^{2}[r_j(z, T_0^{(4)}\omega_m, T_1^{(4)}\omega_m, T_2^{(4)}\omega_m)-r_j(z, T_0^{(4)}\omega_0, T_1^{(4)}\omega_0, T_2^{(4)}\omega_0)]T_j^{(4)}f_0 \\ &+r_0(z, T_0^{(4)}\omega_m, T_1^{(4)}\omega_m, T_2^{(4)}\omega_m)-r_0(z, T_0^{(4)}\omega_0, T_1^{(4)}\omega_0, T_2^{(4)}\omega_0). \end{aligned} \tag{25}$$

可以证明当 ω_m 弱收敛于 ω_0 时，(25)式的前四项按 L_p 的范数收敛于零. 事实上由

$T_i^{(4)}\omega$ 在 $L_p(G+\Gamma)$，$p>2$ 中的全连续性和不等式(18)知道．当 ω_m 弱收敛于 ω_0 时，$T_i^{(4)}\omega_m$ 一致收敛于 $T_i^{(4)}\omega_0$，又因为 $q_i(z, w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)})$ 固定 z 关于 $w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}$ 连续，所以 $q_i(z, T_0^{(4)}\omega_m, T_1^{(4)}\omega_m, T_2^{(4)}\omega_m)$ 概收敛于 $q_i(z, T_0^{(4)}\omega_0, T_1^{(4)}\omega_0, T_2^{(4)}\omega_0)$，于是按 Егоров 引理，对任意的 $\eta>0$，存在子区域 $G_\eta\subset G$，$\operatorname{mes} G_\eta<\eta$ 而在 $G-G_\eta$ 上 $q_i(z, T_0^{(4)}\omega_m, T_1^{(4)}\omega_m, T_2^{(4)}\omega_m)$ 一致收敛于 $q_i(z, T_0^{(4)}\omega_0, T_1^{(4)}\omega_0, T_2^{(4)}\omega_0)$．这样一来，对任意给定的 $\varepsilon>0$，可取足够小的 $\eta>0$，使得

$$
\begin{aligned}
&\|[q_i(z, T_0^{(4)}\omega_m, T_1^{(4)}\omega_m, T_2^{(4)}\omega_m)-q_i(z, T_0^{(4)}\omega_0, T_1^{(4)}\omega_0, T_2^{(4)}\omega_0)]S_i^{(4)}f_0\|_p\\
&\quad\leqslant \max_{z\in G-G_\eta}|q_i(z, T_0^{(4)}\omega_m, T_1^{(4)}\omega_m, T_2^{(4)}\omega_m)-q_i(z, T_0^{(4)}\omega_0, T_1^{(4)}\omega_0, T_2^{(4)}\omega_0)|\Lambda_p^{(4,i)}\rho_4\\
&\quad\quad+2q_0L_p(S^{(4)}f_0, \overline{G}_\eta)\leqslant M_1\varepsilon,\quad M_1=\text{const},
\end{aligned}\tag{26}
$$

即证明了 $\alpha_m(z)$ 的前四项按 $L_p(G+\Gamma)$ 的范数收敛于零．对 $\alpha_m(z)$ 中的第五、六、七项，类似地也有

$$
\begin{aligned}
&\|[r_j(z, T_0^{(4)}\omega_m, T_1^{(4)}\omega_m, T_2^{(4)}\omega_m)-r_j(z, T_0^{(4)}\omega_0, T_1^{(4)}\omega_0, T_2^{(4)}\omega_0)]T_j^{(4)}f_0\|_p\\
&\quad\leqslant \max_{z\in G-G_\eta}|r_j(z, T_0^{(4)}\omega_m, T_1^{(4)}\omega_m, T_2^{(4)}\omega_m)-r_j(z, T_0^{(4)}\omega_0, T_1^{(4)}\omega_0, T_2^{(4)}\omega_0)|M_pL_p(f_0)\\
&\quad\quad+2M_p\rho_4L_p(r_j^{(0)}(z), \overline{G}_\eta)\leqslant M_2\varepsilon,
\end{aligned}\tag{27}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\|r_0(z, T_0^{(4)}\omega_m, T_1^{(4)}\omega_m, T_2^{(4)}\omega_m)-r_0(z, T_0^{(4)}\omega_0, T_1^{(4)}\omega_0, T_2^{(4)}\omega_0)\|_p\\
&\quad\leqslant \max_{z\in G-G_\eta}|r_0(z, T_0^{(4)}\omega_m, T_1^{(4)}\omega_m, T_2^{(4)}\omega_m)-r_0(z, T_0^{(4)}\omega_0, T_1^{(4)}\omega_0, T_2^{(4)}\omega_0)|\cdot\pi\\
&\quad\quad+2L_p(r_0^{(0)}(z), \overline{G}_\eta)\leqslant M_3\varepsilon.
\end{aligned}\tag{28}
$$

综合(26)、(27)和(28)，即得 $\lim\limits_{m\to\infty}\|\alpha_m(z)\|_p=0$．这就证明了奇异积分方程(24)解的序列 $\{f_m(z)-f_0(z)\}$ 的极限是齐次积分方程的解，但(24)的齐次积分方程仅有零解，故 $f_m(z)$ 必按 L_p 的范数收敛于 $f_0(z)$．

由此可见，非线性积分算子 $N^{(k)}\omega$ 是确定在空间 $L_p(G+\Gamma)$，$p>2$ 中的一个弱致密闭凸集 $\Omega^{(k)}$ 上的弱连续算子，且映照 $\Omega^{(k)}$ 于本身或内部，根据 Schauder 不动点原理，在 $\Omega^{(k)}$ 内至少有一个不动点 f，$f=N^{(k)}f$，它也就是非线性奇异积分方程(13)的解．若再将这些解代入§1中相应的广义解表示式，又可得到边值问题(1)、(4)的广义解．

换言之，我们证明了以下广义解存在定理：

定理 1　如果二阶拟线性复式方程(1)和边界条件的系数满足条件(C)，且 $r_1^{(0)}(z)$，$r_2^{(0)}(z)$ 按 $L_p(G+\Gamma)$，$p>2$ 的模取得充分小，那么对广义黎曼-希尔伯特问题(1)、(2)或(1)、(4)．

(1)　当指标 $n_1\geqslant 0$，$n_2\geqslant 0$ 时恒可解，且解依赖于 $2(n_1+n_2+1)$ 个任意实常数．

(2)　当指标 $n_1\geqslant 0$，$n_2<0$（或 $n_1<0$，$n_2\geqslant 0$）时，可解的充要条件有 $-2n_2-1$（或 $-2n_1-1$）个，在这些条件(9)（或(11)）满足时，边值问题恒可解，且解依赖于 $2n_1+1$（或 $2n_2+1$）个任意实常数．

(3)　当指标 $n_1<0$，$n_2<0$ 时，可解的充要条件有 $-2(n_1+n_2+1)$ 个，在这些条件(9)和(11)满足时，边值问题恒可解．

并且这些解都可按§1中的表示式给出．同时也不难知道广义解 $w(z)\in W_p^{(2)}(G+\Gamma)$

类，即 $w(z)$ 按 Соболев 意义的二阶广义微商属于 $L_p(G+\Gamma)$，$p>2$，它的一阶偏微商按 Hölder 意义连续。

§4　进一步的结果

最后指出以上的证明和结论还可以推广到非线性椭圆型复式方程的情形，即考察复式方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2}=F\left(z,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial \bar{z}},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial \bar{z}}\right), \tag{29}$$

其中 F 不妨写成

$$F=Q_1\left(z,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial \bar{z}},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial \bar{z}}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+Q_2\left(z,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial \bar{z}},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial \bar{z}}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial \bar{z}}$$
$$+r\left(z,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial \bar{z}},\ \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

适合边界条件(2)或(4)的广义解．类似地假定它满足以下条件(C^*)

$Q_i(z,\ w^{(0)},\ w^{(1)},\ w^{(2)},\ u^{(1)},\ u^{(2)})$ 和 $\gamma(z,\ w^{(0)},w^{(1)},\ w^{(2)})$ 对任意给定的复数 $w^{(0)}$，$w^{(1)}$，$w^{(2)}$ 和 $u^{(1)}$，$u^{(2)}$ 关于 $z\in G+\Gamma$ 有界可测，给定 $z\in G+\Gamma$ 关于 $w^{(0)}$，$w^{(1)}$，$w^{(2)}$ 和 $u^{(1)}$，$u^{(2)}$ 连续，且均匀满足椭圆型条件

$$|Q_i(z,\ w^{(0)},\ w^{(1)},\ w^{(2)},\ u_1^{(1)},\ u_1^{(2)})u_1^{(i)}-Q_i(z,\ w^{(0)},\ w^{(1)},\ w^{(2)},\ u_2^{(1)},\ u_2^{(2)})u_2^{(i)}|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}q^0(|u_1^{(1)}-u_2^{(1)}|+|u_1^{(2)}-u_2^{(2)}|),\quad 0<3q^0<1. \tag{30}$$

此外对任意给定的连续函数 $w^{(0)}(z)$，$w^{(1)}(z)$，$w^{(2)}(z)$，均成立不等式

$$|r(z,\ w^{(0)}(z),\ w^{(1)}(z),\ w^{(2)}(z))|\leqslant r^{(0)}(z),\ L_p(r^{(0)}(z))=D_0. \tag{31}$$

于是重复前面的讨论，可以类似地得到和非线性复式方程(29)广义黎曼-希尔伯特问题等价的非线性奇异积分方程

$$\begin{aligned}f(z)=Q_1\Big(&z,\ T_0^{(k)}f+E^{(k)}(z),\ T_1^{(k)}f+\frac{\partial E^{(k)}(z)}{\partial \bar{z}},\ T_2^{(k)}f+\frac{\partial E^{(k)}(z)}{\partial z},\ S^{(k)}f+\frac{\partial^2 E^{(k)}(z)}{\partial z^2},\\ &P^{(k)}f+\frac{d\Phi^{(0)}(z)}{dz}\Big)S^{(k)}f+Q_2\Big(z,\ T_0^{(k)}f+E^{(k)}(z),\ T_1^{(k)}f+\frac{\partial E^{(k)}(z)}{\partial \bar{z}},\\ &T_2^{(k)}f+\frac{\partial E^{(k)}(z)}{\partial z},\ S^{(k)}f+\frac{\partial^2 E^{(k)}(z)}{\partial z^2},\ P^{(k)}f+\frac{d\Phi^{(0)}(z)}{dz}+r\Big(z,\ T_0^{(k)}f+E^{(k)}(z),\\ &T_1^{(k)}f+\frac{\partial E^{(k)}f}{\partial \bar{z}},\ T_2^{(k)}f+\frac{\partial E^{(k)}(z)}{\partial z}\Big).\end{aligned} \tag{32}$$

先考虑形如

$$f^*(z)=Q^*(z,\ T_0^{(k)}f,\ T_1^{(k)}f,\ T_2^{(k)}f,\ S^{(k)}f^*,\ P^{(k)}f^*) \tag{33}$$

的奇异积分方程，这里 Q^* 表示(32)式右端以 $S^{(k)}f^*$，$P^{(k)}f^*$ 替代 $S^{(k)}f$，$P^{(k)}f$ 后得到的积分算子，为简便计，在 Q_i，r 中表示式中都略去括号内由已知条件确定的项，$E^{(k)}(z)$，$\Phi_1^{(0)}(z)$ 及它们关于 z，$\bar{z}$ 的微商等．显然由条件 (C^*) 可得对任意的 $f_1^*(z)$，$f_2^*(z)\in L_p(G+\Gamma)$，$p>2$，有

$$\|Q^*(z, T_0^{(k)}f, T_1^{(k)}f, T_2^{(k)}f, S^{(k)}f_1^*, P^{(k)}f_1^*)-Q^*(z, T_0^{(k)}f, T_1^{(k)}f, T_2^{(k)}f, S^{(k)}f_2^*, P^{(k)}f_2^*)\|_p$$
$$\leqslant q^0(\|S^{(k)}f_1^*-S^{(k)}f_2^*\|_p+\|P^{(k)}f_1^*-P^{(k)}f_2^*\|_p)$$
$$\leqslant q^0(\Lambda_p^{(k,1)}+\Lambda_p^{(k,3)})\|f_1^*-f_2^*\|_p<\|f_1^*-f_2^*\|_p, \tag{34}$$
$$q^0(\Lambda_p^{(k,1)}+\Lambda_p^{(k,2)})<3q^0<1.$$

因此，由压缩原理知，积分方程(33)对任意给定的$f(z)\in L_p(G+\Gamma)$都有唯一解$f^*(z)$，即存在逆运算子N^*f，使得

$$f^*=N^*f, \tag{35}$$

N^*f一般也是非线性算子．类似于估计(20)式，可得N^*f是把有界闭凸集$\Omega^{(k)}$

$$L_p(f)\leqslant\rho_k,\ \rho_k=\frac{D_0}{1-q_0(\Lambda_p^{(k,1)}+\Lambda_p^{(k,3)})}$$

映照到本身或内部．

此外设$\{f_m(z)\}$是$\Omega^{(k)}$中弱收敛于$f_0(z)\in\Omega^{(k)}$的任意序列，这时由(33)得相应序列$\{f_m^*(z)\}$所适合的积分方程

$$\begin{aligned}f_m^*-f_0^*=&Q_1(z, T_0^{(k)}f_m, T_1^{(k)}f_m, T_2^{(k)}f_m, S^{(k)}f_m^*, P^{(k)}f_m^*)S^{(k)}f_m^*\\&-Q_1(z, T_0^{(k)}f_m, T_1^{(k)}f_m, T_2^{(k)}f_m, S^{(k)}f_0^*, P^{(k)}f_0^*)S^{(k)}f_0^*\\&+Q_2(z, T_0^{(k)}f_m, T_1^{(k)}f_m, T_2^{(k)}f_m, S^{(k)}f_m^*, P^{(k)}f_m^*)P^{(k)}f_m^*\\&-Q_2(z, T_0^{(k)}f_m, T_1^{(k)}f_m, T_2^{(k)}f_m, S^{(k)}f_0^*, P^{(k)}f_0^*)P^{(k)}f_0^*+\alpha_m^*(z),\end{aligned} \tag{36}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha_m^*(z)=&[Q_1(z, T_0^{(k)}f_m, T_1^{(k)}f_m, T_2^{(k)}f_m, S^{(k)}f_0^*, P^{(k)}f_0^*)\\&-Q_1(z, T_0^{(k)}f_0, T_1^{(k)}f_0, T_2^{(k)}f_0, S^{(k)}f_0^*, P^{(k)}f_0^*)]S^{(k)}f_0^*\\&+[Q_2(z, T_0^{(k)}f_m, T_1^{(k)}f_m, T_2^{(k)}f_m, S^{(k)}f_0^*, P^{(k)}f_0^*)\\&-Q_2(z, T_0^{(k)}f_0, T_1^{(k)}f_0, T_2^{(k)}f_0, S^{(k)}f_0^*, P^{(k)}f_0^*)]P^{(k)}f_0^*\\&+r(z, T_0^{(k)}f_m, T_1^{(k)}f_m, T_2^{(k)}f_m)-r(z, T_0^{(k)}f_0, T_1^{(k)}f_0, T_2^{(k)}f_0).\end{aligned} \tag{37}$$

这时可仿照§3中的证明$\alpha_m^*(z)$按$L_p(G+\Gamma)$, $p>2$范数收敛于零，从而又得到

$$\lim_{m\to\infty}\|f_m^*-f_0^*\|_p=\frac{1}{1-q^0(\Lambda_p^{(k,1)}+\Lambda_p^{(k,3)})}\lim_{m\to\infty}\|\alpha_m^*(z)\|_p=0. \tag{38}$$

换言之，我们证明了算子N^*f是确定在空间$L_p(G+\Gamma)$, $p>2$中的一个弱致密有界闭凸集$\Omega^{(k)}$上的弱连续算子，它紧致映照$\Omega^{(k)}$于本身或内部，根据Schauder不动点原理必有$f(z)$使得$f=N^*f$，即$f(z)$构成奇异积分方程(32)的解．若再将它代入§1中的广义解的表示式，便得非线性复式方程(29)的广义黎曼-希尔伯特问题的解．这样一来§3中所建立的定理对于非线性椭圆型复式方程(29)也是同样成立的．

参考文献

[1] Б. В. Боярский, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **7** (1959), 565–570.
[2] 李明忠，数学学报，**14** (1964), 7–22.
[3] 李明忠，*SCIENTIA SINICA* (中国科学), **3**(1980), 280.
[4] А. В. Бицадзе, 数学进展, **4** (1958), 321.
[5] А. Д. Жураев, Сибир. Матем. Журнал, **9** (1968), 52–66.
[6] И. И. Комях, В. Н. Клименов, Дифф. Урав., **13** (1977).
[7] И. М. Векуа, 广义解析函数，人民教育出版社，(1960).

THE GENERALIZED RIEMANN-HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF SECOND ORDER QUASI-LINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

LI MINGZHONG
(*Fudan University*)

ABSTRACT

In this paper, we consider the generalized Riemann-Hilbert problem for second order quasi-linear elliptic complex equation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2}+q_1\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+q_2\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z\partial \bar{z}}$$
$$+q_3\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial \bar{z}}+q_4\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial \bar{z}}$$
$$+\gamma\left(z, w, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial w}{\partial z}\right), \ z\in G, \qquad (1)$$

satifying the boundary condition

$$\operatorname{Re}\left[\overline{\lambda_1(z)}\ \frac{\partial w}{\partial z}\right]=\gamma_1(z), \ \operatorname{Re}[\overline{\lambda_2(z)}w]=\gamma_2(z), \ z\in\gamma. \qquad (2)$$

Many authors (see that papers 1, 4-6) have studied the Dirichlet problem and Riemann-Hilbert problem for linear elliptic complex equation. In our papers 2, 3 we also considered the generalized Riemann-Hilbert problem of the general second order linear elliptic complex equation. We obtained the existence theorem, the explicit form of generalized solution and the sufficient and necessary conditions for the solvability of the above mentioned boundary value problem.

Based on these results and applying the property of the introduced integral operators and Schauder's fixed-point principle, it can be proved that the analogous deductions in 3 also hold for the generalized Riemann-Hilber problem (1), (2) of the quasi-linear complex equation, i. e., we have the following theorem:

Theorem, If the coefficients of second order quasi-linear elliptic complex equation (1) satifies some conditions then

i) When index $n_1\geqslant 0$, $n_2\geqslant 0$, the boundary value problem (1), (2) is always solvable and the solution depends on 2 (n_1+n_2+1) arbitrary real constants.

ii) When index $n_1\geqslant 0$, $n_2<0$ (or $n_1<0$, $n_2\geqslant 0$), the sufficient and necessary condition for the solvability of the above mentioned boundary value problem (1), (2) consists of $-2n_2-1$ $(-2n, -1)$ real equalities, if and only if the equalities are

satisfied, the boundary value problem is solvable and the solution depends on $2n_1+1$ $(2n_2+1)$ arbitrary real constants.

iii) When index $n_1<0$, $n_2<0$, the sufficient and necessary condition for the solvability of the above mentioned boundary value problem (1), (2) consists of $-2(n_1+n_2+1)$ real equalities, if and only if the equalities are satisfied, the boundary value problem is solvable.

Finally, in the similar way, we may further extend the result to the case of the nonlinear uniform elliptic complex equation.