数 学 年 刊
1 (2) 1980

集合论的一些新公理系统

莫 绍 揆
(南京大学)

在公理集合论中，Zermelo-Fraenkel 系统(ZF)与 Von Neumann-Bernays-Gödel 系统(BG)最为有名，但是仍有很多值得改进的地方．这两个系统虽然有很多根本观点是彼此不同的，但其公理却彼此息息相关，对其一作出改变后，相应地可用同法对另一系统作出改变，因此只须讨论一个系统便够了．作者认为，ZF 系统较 BG 系统更为自然，因此下文专就 ZF 系统讨论，读者可仿此而对 BG 系统作出改变．

通常所表述的 ZF 系统共有七条公理如下：

(1) 外延性公理 $\forall z(z\varepsilon x\equiv z\varepsilon y)\cdot\supset x=y$,

(2) 对偶集公理 $\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\cdot x=a\vee x=b)$,

(3) 联集公理 $\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\exists z(z\varepsilon a\wedge x\varepsilon z))$,

(4) 幂集公理 $\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\forall z(z\varepsilon x\supset z\varepsilon a)$,

(5) 分出公理 $\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\cdot x\varepsilon a\wedge\phi(x))$,

或 替代公理 $\mathrm{Fcn}\phi\cdot\supset\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\exists t(t\varepsilon a\wedge\phi(t,x))$,

这里 $\mathrm{Fcn}\,\varphi$ 指 φ 为函数，即 $\forall x\forall y\forall z(\varphi(x,y)\wedge\varphi(x,z)\cdot\supset y=z)$.

注意．由替代公理可以推出分出公理(它强于分出公理)，本来可只列出替代公理便够．这里所以分列两者因下文讨论时往往只用分出公理．

(6) 无穷公理(其明确表达式暂略，下文用不到)．

(7) 正规公理 $u\neq\Lambda\supset\exists x(x\varepsilon u\wedge\overline{\exists}t(t\varepsilon x\wedge t\varepsilon u))$，这里 Λ 指空集．

如果添入下列的(8)便叫做 ZFC 系统：

(8) 选择公理(其明确表达式暂略，下文用不到)．

在提出改进以前，我们先给几点注意．

第一，上面是就没有原子(atom)的 ZF 系统而给的．如果容许原子，通常是把原子看作没有元素但又非空集的东西(从而当然不是集合)．在这样理解之下，外延性公理须添入一个前提："设 x, y 为集合"，(或引入集合变元来表示)．但是我们也可采用 Quine[3] 的说法，把原子看作以它本身为唯一元素的集合，即原子是满足条件"$x=\{x\}$"($\{x\}$ 表示么集)的集合．在这样理解之下，外延性公理不必改正，但正规公理须表示为

$$u\neq\Lambda\cdot\supset\exists x(x\varepsilon u\wedge\cdot x=\{x\}\vee\overline{\exists}t(t\varepsilon x\wedge t\varepsilon u)).$$

以前的人，大概总以为原子(满足 $x=\{x\}$ 的)是与正规公理互相排斥的，因此承认存在 $x=\{x\}$ 的 Quine 从来不考虑使用正规公理，反之，一般人都使用正规公理，从而根本不考虑满足条件 $x=\{x\}$ 的原子！其实，承认 Quine 的原子并适当地修改正规公理是更为适

本文 1979 年 11 月 3 日收到．

宜的.

第二,公理集合论的基本出发点是：虽然每个集合都有一个刻划它的谓词,但并非每个谓词都刻划一个集合，$x\bar{\varepsilon}x$ 便是一个例子. 因此我们应该承认集合的范围狭于谓词的范围. 在公理中，如果把集合改为谓词而仍能成立，我们是应该改用谓词的. 在上面八条公理中，别的集合不能改为谓词，但正规公理却是可以的，即我们可以把正规公理加强为

$$\exists x\phi(x)\cdot\supset\exists x(\phi(x)\wedge\bar{\exists}t(t\varepsilon x\wedge\phi(t))),$$

或

$$\exists x\phi(x)\cdot\supset\exists x(\phi(x)\wedge.\ x=\{x\}\vee\bar{\exists}t(t\varepsilon x\wedge\phi(t))).$$

但是,为简洁醒目起见,在本文中,我们暂时不考虑这种加强.

以下我们先考虑对上述公理系统的改进.

1957 年小野胜次(Ono Katuzi)[6] 提出：在 ZF 系统中，下列公理可以代替联集公理(3)、幂集公理(4)与替代公理(5)：

(一) $\mathrm{Fcn}\phi\cdot\supset\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\exists t(\exists z(t\sqsubseteq z\wedge z\varepsilon a)\wedge\phi(t,x)))$,(这里"$\sqsubseteq$"表示包含关系).

这种新系统的缺点是：由(一)不能导出对偶集公理(2),故必须把(2)添入作为公理,至少也须添入么集公理 $\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv x=a)$，添入么集后，如命 a 为 $\{a\}$ 而 $\phi(t,x)$ 为 $t=x$,便得 a 的幂集. 如命 $\phi(t,x)$ 为 $t=\{x\}$,便得 a 的联集(要推出替代公理,可注意 $x\varepsilon a\equiv\cdot\exists z(x\sqsubseteq z\wedge z\varepsilon a)\wedge x\varepsilon a$ 便成).

1961 年 K. Hauschild[1] 提出：在 ZF 系统中,对偶集公理(2)、联集公理(3)、幂集公理(4)、与分出公理(5)(注意，不是替代公理)可以用下列公理代替，(其中"$x\leqslant y$"的意义见后).

(二) $\exists y\forall x(x\varepsilon y\cdot\equiv\cdot x\leqslant a_1\vee x\leqslant a_2\cdots\vee x\leqslant a_n\cdot\wedge\phi(x,a_1,\cdots,a_n))$,这里 ϕ 中不含有自由变元 y，而恰巧含有自由变元 x, a_1, $\cdots$, a_n(更无别的自由变元).

这个系统的缺点在于：它只能代替较弱的分出公理而不能代替较强的替代公理，因此还须引入替代公理才成. 此外，公理(二)本身不但含有谓词变元 ϕ(或任意公式 ϕ)，而且当 ϕ 中所含的自由变元 a_1, a_2, $\cdots$, a_n(所谓参数)有所增减时,所添入的"$x\leqslant a_1\vee\cdots\vee x\leqslant a_n$"也随之改变,使得公理(二)显得非常复杂,不够自然,近于人工做作.

但是沿 Hauschild 的思路而略作改进，我们可以得到一个相当合意的新公理系统. 为此我们先引入下列的定义与引理：

定义 trans m 指 $\forall u\forall v(u\varepsilon v\wedge v\varepsilon m\cdot\supset u\varepsilon m)$,

$x\leftarrow a$ 指 $\forall m(\mathrm{trans}\ m\wedge a\varepsilon m\cdot\supset x\varepsilon m)$,

$x\leqslant a$ 指 $\forall z(z\varepsilon x\supset z\leftarrow a)$.

引理 1 我们有下列公式：

(a) $x\leftarrow a\supset x\leqslant a$,

(b1) $x\varepsilon a\supset x\leftarrow a$, 从而有

(b2) $x\varepsilon a\supset x\leqslant a$,

(c1) $x\leftarrow y\wedge y\leftarrow z\cdot\supset x\leftarrow z$, 从而有

(c2) $\exists y(x\varepsilon y\wedge y\varepsilon z)\supset x\leqslant z$,

(d1) $x\sqsubseteq a\supset x\leqslant a$, 从而又有

(d2) $x=a\supset x\leqslant a$.

证　利用谓词演算极易证得，今略.

引理 2　在一个具有分出公理的系统中，如果已证出 $(*)_1\phi(x)\supset x\varepsilon a$（$a$ 为某个已知集合），则 $\phi(x)$ 可用来刻划一集合，即必可推得

$$\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\phi(x)).$$

证　既已推得 $(*)_1$，即可证得

$$\phi(x)\equiv\cdot x\varepsilon a\wedge\phi(x). \qquad (**)$$

由分出公理有 $\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\cdot x\varepsilon a\wedge\phi(x))$，根据 $(**)$ 作替换即得 $\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\phi(x))$.

证毕.

引理 3　借分出公理与无穷公理之助，对偶集公理(2)、联集公理(3)、幂集公理(4)这三条公理可与下列公理互相推出：

甲(强对偶集公理)　$\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\cdot x\leqslant a\vee x\leqslant b)$，公理甲所肯定存在的集合暂时记为 $[a, b]$.

证　先证由甲可推出这三条公理.

由(d2)得 $$x=a\vee x=b\cdot\supset x\leqslant a\vee x\leqslant b,$$

即 $$x=a\vee x=b\cdot\supset x\varepsilon[a, b].$$

由(c2)得 $$\exists z(z\varepsilon a\wedge x\varepsilon z)\supset x\leqslant a,$$

即 $$\exists z(z\varepsilon a\wedge x\varepsilon z)\supset x\varepsilon[a, a].$$

由(d1)得 $x\sqsubseteq a\cdot\supset x\leqslant a$，即 $x\sqsubseteq a\cdot\supset x\varepsilon[a, a]$. 故依引理 2，对偶集公理、联集公理、幂集公理均成立.

再证由这三条公理可以推出甲. 有了无穷公理后，即可推得自然数集 N 的存在并且可以使用递归式定义(见一般集合论的书). 因此可以递归地定义 $U^n x$ 如下

$$U^0x=x,\ U^{n+1}x=U(U^nx).$$

极易推得 $$[a, b]=\mathfrak{S}\bigcup_{n\varepsilon N}U^na\cup\mathfrak{S}\bigcup_{n\varepsilon N}U^nb.$$

(这里 $\mathfrak{S}x$ 指 x 的幂集，可由幂集公理保证其存在). 换言之，公理甲成立.

于是引理 3 得证.

定理 1　上述的 ZFC 系统，(2)(3)(4)可代以(甲). 即可使用(1)(甲)(5)(6)(7)(8)作为 ZFC′ 系统.

证　由引理 3 得.

引理 4　在具有无穷公理的系统中，对偶集公理(2)、联集公理(3)、幂集公理(4)、替代公理(5)可以与下列公理(乙)互相推出.

乙(强替代公理)

$$\mathrm{Fcn}\phi\cdot\supset\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\exists t(t\leqslant a\vee t\leqslant b\cdot\wedge\phi(t, x)).$$

证　先证由甲与替代公理可推出乙(从而由(2)(3)(4)(5)可推出乙). 由甲知有集合 $[a, b]$ 使得

$$t\varepsilon[a, b]\equiv\cdot t\leqslant a\vee t\leqslant b. \qquad (*)_2$$

再根据替代公理有

$$\mathrm{Fcn}\phi\cdot\supset\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\cdot\exists t(t\varepsilon[a, b]\wedge\phi(t, x)).$$

再根据$(*)_2$作替换即得乙.

再证由乙可推出甲与替代公理(从而可推出(2)(3)(4)(5)). 令$\phi(t, x)$为$t=x$, 这时当然有$\mathrm{Fcn}\,\phi$, 当把前件$\mathrm{Fcn}\,\phi$分离后, 公理乙变成

$$\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\exists t(t\leqslant a\vee t\leqslant b\cdot\wedge t=x)).$$

根据谓词演算作替换, 这式即变成

$$\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\cdot x\leqslant a\vee x\leqslant b)$$ 这即甲.

又由上文(b2)得$t\varepsilon a\cdot\supset t\leqslant a$故再得

$$t\varepsilon a\cdot\supset t\leqslant a\vee t\leqslant b,$$

再得

$$t\varepsilon a\cdot\equiv\cdot t\leqslant a\vee t\leqslant b\cdot\wedge t\varepsilon a$$

及

$$t\varepsilon a\wedge\phi(t, x)\equiv: t\leqslant a\vee t\leqslant b\cdot\wedge t\varepsilon a\wedge\phi(t, x). \qquad (*)_3$$

由乙可得

$$\mathrm{Fcn}\,\phi\cdot\supset\exists y\forall x(x\varepsilon y\cdot\equiv\exists t(t\leqslant a\vee t\leqslant b\cdot\wedge t\varepsilon a\wedge\phi(t, x))$$

根据$(*)_3$作替换即得

$$\mathrm{Fcn}\,\phi\cdot\supset\exists y\forall x(x\varepsilon y\cdot\equiv\exists t(t\varepsilon a\wedge\phi(t, x)).$$

这便是替代公理(5). 引理 4 得证.

定理 2　上述的 ZFC 系统, (2)(3)(4)(5)可代以乙, 即可用(1), (乙), (6)(7)(8)而作成.

证　由引理 4 得证.

这个系统仍保持下述优点: 凡(1)～(7)所能推出的(即所谓严格的 ZF 系统)均可由(1)乙(6)(7)推出; 凡(1)～(8)所推出的(即所谓 ZFC 系统)均可由(1)乙(6)(7)(8)推出. 因此对不满意选择公理的人, 尽可以只使用(1)(乙)(6)(7), 而没有任何不便.

就 ZF 系统或 ZFC 系统的原有范围而论, 定理 2 所给的系统可算是最简洁的了. 但是由于种种原因, 人们非常期望将 ZFC 系统加强, 以解决目前的 ZFC 系统所不能解决的好些问题, 例如连续统假设等问题. 对此, 人们现在经常考虑的一些新添公理, 如大基数公理, 决定性公理等等, 都是一些很特殊、很复杂、不够自明的公理. 当讨论某些特殊问题时, 自应考虑由这些公理推导而得的结果, 但这些公理本身很难看作是合用的基本的集合论公理, 因此我们不准备详细讨论它们. 但 Von Neumann[2] 提出的一条公理, 却和这些特殊公理不同, 很适宜于作为基本的集合论公理, 和上面的公理并列在一起.

Von Neumann 所建议的公理是(改用我们的表达方式):

丙(第一强概括公理)　$\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\psi(x))\equiv\nabla(\psi)$.

这里$\nabla(\psi)$表示$\forall\varphi(\mathrm{Fcn}\,\varphi\supset\exists u\exists x(\psi(x)\wedge\varphi(x, u)))$. 其意是说: 条件$\psi(x)$可以刻划一个集合$y$, 当且仅当$\nabla(\psi)$成立, 即对任何多一对应$\varphi$而言, 都有一个$u$使得在$\varphi$之下它不对应于满足$\psi(x)$的任何$x$; 亦即, 当且仅当满足$\psi(x)$的那些$x$和全论域的个体$u$之间, 不可能建立多一对应(包括一一对应).

这条公理的力量很强, 这可以由下列引理看出.

引理 5　由公理丙可以推出替代公理(5), 如再与 ZF 系统别的公理配合还可以推出选择公理(8).

证　设有两谓词f及φ, 今用$\psi(w, v)$表示$\exists t(f(w, t)\wedge\varphi(t, v))$. 则易由谓词演算

而证得

$$\mathrm{Fcn}\, f \wedge \mathrm{Fcn}\, \varphi \cdot \supset \mathrm{Fcn}\, \psi. \tag{$*$}_4$$

因为显然有 $\exists y \forall x(x\varepsilon y \equiv x\varepsilon a)$，故由丙(右向)得

$$\begin{aligned}\mathrm{Fcn}\, \psi \cdot &\supset \exists v \exists w(w\varepsilon a \wedge \psi(w, v)) \\ &\cdot \supset \exists v \exists w(w\varepsilon a \wedge \exists t(f(w, t) \wedge \varphi(t, v))) \\ &\cdot \supset \exists v \exists w \exists t(w\varepsilon a \wedge f(w, t) \wedge \varphi(t, v)) \\ &\cdot \supset \exists v \exists t \exists w(w\varepsilon a \wedge f(w, t) \wedge \varphi(t, v)) \\ &\cdot \supset \exists v \exists t(\exists w(w\varepsilon a \wedge f(w, t)) \wedge \varphi(t, v)).\end{aligned} \tag{$*$}_5$$

由 $(*)_4$，$(*)_5$ 根据可传性得

$$\mathrm{Fcn}\, f \wedge \mathrm{Fcn}\, \varphi \cdot \supset \exists v \exists t(\exists w(w\varepsilon a \wedge f(w, t)) \wedge \varphi(t, v))$$

再根据丙(左向)即得

$$\mathrm{Fcn}\, f \cdot \supset \exists y \forall x(x\varepsilon y \equiv \exists w(w\varepsilon a \wedge f(w, x))$$

这便是替换公理(5).

再和别的 ZF 公理配合后，可以发展序数理论，从而可以定义 $\mathrm{On}(x)$ (x 为序数)这个谓词，并有 $\exists y \forall x(x\varepsilon y \equiv \mathrm{On}(x))$ ($***$)这个可证公式. 今将丙中的 $\varphi(x)$ 代以 $\mathrm{On}(x)$，根据丙及($***$)可得

$$\forall \phi(\mathrm{Fcn}\, \phi \cdot \supset \exists u \exists x(\mathrm{On}(x) \wedge \varphi(x, u))).$$

根据谓词演算，上式可改写为

$$\exists \phi(\mathrm{Fcn}\, \phi \wedge \forall u \exists x(\mathrm{On}(x) \wedge \varphi(x, u))).$$

即有一个多一对应 ϕ，使得对任何个体 u 均有一个或多个序数 x 与 i 对应，如果有多个序数 x 与 i 对应可改而只对应于最小的序数，然后根据所对应的序数而把全论域的个体排良序. 既然全论域个体可以排良序，故选择公理对全论域成立(而不是分别对各个集合成立). 这是一条很强的选择公理. 于是引理 5 证毕.

定理 3　ZFC 系统可以作如下的加强：由外延性公理(1)，强对偶集公理甲，第一强概括公理丙，无穷公理(6)正规公理(7)组成.

证　由引理 3 与引理 5 即得.

在这个加强系统中，ZF 与 ZFC 无法分清，因为替代公理与选择公理合而为一了. 要想从中分清 ZF 与 ZFC 可改用下列系统.

定理 3*　ZF 系统亦可作如下的加强：由外延性公理(1)，强替代公理乙，(6)(7)及第一强概括公理丙.

在这个系统中，乙远远强于甲，也远比甲复杂，是其缺点. 但在其中可以分清 ZF 及 ZFC，这是它的优点. 读者可以根据情况而作选择.

大家知道，ZF 系统(以及 BG 系统)有一个最大缺点，那便是它不够对称. 具体说来，它只有空集而没有全集，因而不成立对偶原则，在运用起来有很大的不方便，它甚至于没有(集合的)补运算，与它对应的集合代数便不是布尔代数而只是没有么元的广义布尔代数. 这个缺点在 Von Neumann 的加强以后，以及用别的公理加强以后，都没有得到克服. 能够保存全集的集合论系统，迄今还只有 B. Russell[5] 的类型论系统和 W. Quine[4] 的 NF 系统(后者实际上只是前者的修正与简化)，至于使用 ZF 系统的人，从来未尝企图

引进全集，更不必说引进补运算等等了.

现在我们试从第一强概括公理丙的基础上而略作修改，把全集与补运算引进 ZF 系统，以使 ZF 的运用更为方便自如. 具体说来，我们把第一强概括公理丙修改为

丁(第二强概括公理) $\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\psi(x))\equiv\cdot\nabla(\psi)\vee\nabla(\overline{\psi})$ 这里 $\nabla(\psi)$ 是 $\forall\varphi(\mathrm{Fcn}\,\varphi\supset\exists u\overline{\exists} x(\psi(x)\wedge\varphi(x,u)))$ 的缩写.

我们建议下列的另一种加强 ZFC 系统.

定理4 ZFC 系统又可作如下的加强：将替代公理(5)与选择公理(8)换以公理丁，即使用(1)～(4)(丁)(6)(7).

由于使用公理丁，所以这个系统与今日通行的 ZFC 系统差异较大，因此其主要特征性质及其详细推导将在另文再行讨论，这里只列举一些极简单的极易看见的性质，读者当可从中看出它与通常的 ZFC 系统的同异之处了.

这里所以选用(2)(3)(4)而不用强对偶集公理甲(或与小野胜次公理相仿的公理)，是因为由甲而推出(2)(3)(4)时，必须依靠分出公理(5)，而在本系统中，由丁得不出原来形式的分出公理而只能得出一个较弱形式的(见下)，故必须使用(2)(3)(4)本身.

公理丁是说，$\psi(x)$ 可以刻划一个集合当且仅当或 $\nabla(\psi)$ 或 $\nabla(\overline{\psi})$(而 Von Neumann 的公理丙则是当且仅当 $\nabla(\psi)$). 如果我们再把 $\forall\varphi(\mathrm{Fcn}\,\varphi\supset\exists u\overline{\exists} x(x\varepsilon a\wedge\varphi(x, u))$ 缩写为 $\nabla(a)$，由于谓词 $x\varepsilon a$ 永远刻划一个集合(即 a)，故对任何集合 a 而言必或 $\nabla(a)$ 或 $\nabla(\overline{a})$. 如果 $\nabla(a)$ 成立，则说 a 属于第一种(或下层)，如果 $\nabla(\overline{a})$ 成立，则说 a 属于第二种(或上层). 显然当 $\nabla(a)$ 成立时(即 a 属于下层时)才能够对 a 而成立替代公理(及分出公理)，即在本系统中我们只能有较弱形式的替代公理

$$\nabla(a)\cdot\supset\mathrm{Fcn}\,\varphi\supset\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\exists t(t\varepsilon a\wedge\varphi(t, x))).$$

(其推导过程和引理5的证明相仿). 由于这个缘故，公理甲不能代替(2)(3)(4). 但是，由这个较弱形式的替代公理及分出公理，基本上仍能推出序数理论，从而仍能推出选择公理(8)(见引理5的证明).

本系统的最大特点是：它有补运算. 给出一集合 a 后，命 $\psi(x)$ 表示 $x\varepsilon a$，这时必有 $\nabla(\psi)$ 或 $\nabla(\overline{\psi})$，无论那一种都可由公理丁推出：$x\bar{\varepsilon}a$ 刻划一集合(即 a 的补集)，既有补运算便有全集，于是相应的集合代数便是布尔代数，较之通常 ZFC 系统所相应的广义布尔代数方便得多. 但是，这个方便是以削弱替代公理为其代价的，这种代价是否上算尚待进一步探讨.

参 考 文 献

[1] Hauschild, K., Eine Bemerkung zum Mengenbildungsaxiom, *Zeits. für Math. Logik und Grundladgen Lehre.*, **7** (1961), 9–11.

[2] Neumann, J. von, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *Journal für die reine und Angewandte Mathematik*, **154** (1925), 219–240.

[3] Quine, W. V., Mathematical Logic, New York, (1940); 又 Set Theory and its Logic, Cambridge, Massachusetts, (1963).

[4] Quine, W. V., New Foundation for Mathematical Logic, *Amer. Math. Monthly*, **44** (1937), 70–80.

[5] Whitehead, A. N. and Russell, B., Principia Mathematica, London, (1910).

[6] 小野胜次 (Ono, Katuzi), A set theory founded on unique generating principle, *Nagoya Mathematical Journal*, **12** (1957), 151–159.

NEW AXIOM SYSTEMS FOR THE SET THEORY

Mo Shaokui (Mo Shaw-kwei)
(*Nanking University*)

ABSTRACT

In the present paper we give four axiom systems for the set theory.

First, the ZFC system may be given by: (1) the axiom of extensionality, (5) the axiom of replacement, (6) the axiom of infinity, (7) the axiom of regularity, (8) the axiom of choice and (A) the strong pairing set axiom, i. e., $\exists y\forall x\ (x\varepsilon y\equiv x\leqslant a\vee x\leqslant b)$, where $x\leqslant a$ will be defined in the text.

Second, the ZFC system may also be given by (1) (6) (7) (8), and (B) the strong axiom of replacement, i. e., Fcn $\phi\supset\exists y\forall x\ (x\varepsilon y\equiv\exists t\ (t\leqslant a\vee t\leqslant b.\ \wedge\phi(t,\ x)))$, where Fcn ϕ means that ϕ is a function, i. e., $\forall x\forall y\forall z\ (\phi(x,\ y)\wedge\phi(x,\ z)\cdot\supset y=z)$.

Third, the ZFC system may be strenthened as follows, (1) (6) (7) (A) and (C) the first strong axiom of concretion, i. e., $\exists y\forall x\ (x\varepsilon y\equiv\psi\ (x))\equiv\nabla(\psi)$, where $\nabla(\psi)$ means that $\forall\varphi$ (Fcn $\varphi\supset\exists u\bar{\exists}x\ (\psi(x)\wedge\psi(x,\ u)))$.

Fourth, the ZFC system may also be strengthened as follows, (1), (2) the pairing set axiom, (3) the union set axiom, (4) the power set axiom, (6), (7) and (D) the second strong axiom of concretion, i. e., $\exists y\forall x(x\varepsilon y\equiv\psi(x))\equiv\cdot\nabla(\psi)\vee\nabla(\bar{\psi})$.

We should note that the last system possesses a kind of symmetry such that in it we may have the universal set, the complementary operation, and hence the principle of duality.