数学年刊
1 (2) 1980

极大似然估计的存在性定理

郑伟安
（上海师范大学）

关于极大似然估计存在性的较一般性定理，对于极大似然估计一般理论的发展来说是需要的．本文的目的，是在似然函数关于子样值与参数值乘积可测，或者关于参数"逐段有可测上确界"的情况下，用容度理论来讨论极大似然估计的存在性问题．显然，本文的结果也将适用于其他形式的极值型解的可测性问题．

由于本文的讨论，并没有涉及子样空间的具体结构，所以假定子样空间是某个σ-有限的测度空间$(\Omega, \mathscr{B}, \mu)$，并以$\overline{\mathscr{B}}$表$\mathscr{B}$的完备化．记$\mathscr{P}=\{\mathscr{P}_\theta\}$是$\mathscr{B}$上一族概率，$\mathscr{P}_\theta \ll \mu$，记其密度函数为$f(\omega, \theta)$，其中参数$\theta$的变程为$m$维波雷耳可测空间$(\mathscr{R}_m, \mathscr{B}_m)$．设$N$是$\mathscr{B}$中集合，如果对于每个$\mathscr{P}_\theta$，都有$\mathscr{P}_\theta(N)=0$，则称$N$为$\mathscr{P}$-零集．显然，每个$\mu$-零集必为$\mathscr{P}$-零集．

我们再引进一些术语，具体可参照[1]．

所谓集合类$\mathscr{E}$是一个复盖，是指：(1)空集$\phi\in\mathscr{E}$；(2)设$A\in\mathscr{E}$，$B\in\mathscr{E}$，则有$A\cup B\in\mathscr{E}$，$A\cap B\in\mathscr{E}$．以$\mathscr{E}_\delta$表示$\mathscr{E}$中集合的可列交全体所成之集．如果$\mathscr{C}$是某个集类，我们称包含$\mathscr{C}$的最小复盖为$\mathscr{C}$产生的复盖．

集类$\mathscr{A}$称为$\mathbf{M}$-系统，是指：(1)空集$\phi\in\mathscr{A}$；(2)设$A_n\in\mathscr{A}$，$(n=1, 2, \cdots)$，则$\bigcup\limits_n A_n\in\mathscr{A}$，$\bigcap\limits_n A_n\in\mathscr{A}$．包含某集类$\mathscr{D}$的最小$\mathbf{M}$-系统．

集合E上如果存在某个子集类$\mathscr{E}$所成的复盖，则$(E, \mathscr{E})$称为复盖空间．设$(E, \mathscr{E})$与$(F, \mathscr{F})$是两个复盖空间，我们定义复盖

$$\mathscr{E}\otimes\mathscr{F} \triangleq \left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\times B_i,\ A_i\in\mathscr{E},\ B_i\in\mathscr{F}\right\}$$

称之为$\mathscr{E}$与$\mathscr{F}$的乘积复盖．

对于复盖空间$(E, \mathscr{E})$，取广义实数值的集函数$\mathrm{II}(\cdot)$，如果对E的一切子集有定义，并满足条件：

(1) 单调性：$A\subset B$，则$\mathrm{II}(A)\leqslant\mathrm{II}(B)$；

(2) $A_n\uparrow A$，则$\mathrm{II}(A_n)\uparrow\mathrm{II}(A)$；

(3) $A_n\in\mathscr{E}$，$A_n\downarrow A$，则$\mathrm{II}(A_n)\downarrow\mathrm{II}(A)$．

我们称之为$\mathscr{E}$-容度．

对于$\Omega\times\mathscr{R}_m$中的子集$A$，以$\Pi(A)$表示它在$\Omega$上的投影，即：$\Pi(A)\triangleq\{\omega\in\Omega;$ 截口$A(\omega)\neq\phi\}$．

本文1979年11月17日收到，1979年12月17日修改．

所谓函数$T(\omega)$是极大似然估计，是指：

(i) $T(\omega)$为$\mathscr{B}$-可测函数；(ii) $f(\omega, T(\omega))=\sup\limits_{\theta\in\mathscr{R}_m} f(\omega, \theta)$ a. s.$[\mathscr{P}]$.

我们建立以下定理：

定理 1 设$f(\omega, \theta)$是$\overline{\mathscr{B}}\times\mathscr{B}_m$-可测函数，则极大似然估计存在的充要条件是：存在一个取值于$\mathscr{R}_m$的函数$S(\omega)$(不要求可测)，使得

$$f(\omega, S(\omega))=\sup_{\theta\in\mathscr{R}_m} f(\omega, \theta) \quad \text{a. s.}[\mathscr{P}]. \tag{1}$$

证 必要性显然. 但充分性的证明较长，我们分几步进行，并分别写成引理形式. 其中主要部分是多元截口定理的建立.

首先，把μ换成一个等价的概率测度. 我们任意选定可数个互不相交的可测集C_1, C_2, $\cdots$, 使得$\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}C_i$, $0<\mu(C_i)<\infty$. 对于$A\in\overline{\mathscr{B}}$, 指定

$$\widetilde{P}(A)\triangleq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\mu(A\cap C_i)}{\mu(C_i)}, \tag{2}$$

则$\widetilde{P}$是$(\Omega, \overline{\mathscr{B}})$上的完备概率测度，且$\widetilde{P}$与$\mu$等价(即两者的零测度集相同)[2]，于是$\mathscr{P}\ll\widetilde{P}$. 以下考虑完备概率空间$(\Omega, \overline{\mathscr{B}}, \widetilde{P})$.

引理 1 设$A\in\overline{\mathscr{B}}\times\mathscr{B}_m$, 则$\Pi(A)\in\overline{\mathscr{B}}$.

证 见[1].

引理 2 设$T^{(1)}(\omega)$, $\cdots$, $T^{(m)}(\omega)$是m个取广义实数值的随机变量，则集合

$$B\triangleq\left\{\begin{pmatrix}\omega\\ X\end{pmatrix};\ \omega\in\Omega,\ X\in\mathscr{R}_m,\ X^{(1)}\leqslant T^{(1)}(\omega),\ \cdots,\ X^{(m)}\leqslant T^{(m)}(\omega)\right\}$$

(这里$X^{(i)}$表矢量X的第i个分量)，是$\overline{\mathscr{B}}\times\mathscr{B}_m$-可测集.

证 对于$i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots$, 记

$$B_i^{(j)}\triangleq\bigcup_{l\text{取全体整数}}\left\{\begin{pmatrix}\omega\\ X\end{pmatrix};\ \frac{l}{2^j}<T^{(i)}(\omega)\leqslant\frac{l+1}{2^j},\ -\infty<X^{(i)}\leqslant\frac{l+1}{2^j}\right\}$$

就容易看出$B_i^{(j)}$是$\mathscr{B}\times\mathscr{B}_m$-可测集，从而$B=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcap\limits_{i=1}^{m}B_i^{(j)}$也是可测的.

引理 3 设$A\in\overline{\mathscr{B}}\times\mathscr{B}_m$, 则对于任何$\varepsilon>0$, 存在取值于$\mathscr{R}_m\cup\left\{\begin{pmatrix}\infty\\ \vdots\\ \infty\end{pmatrix}\right\}$的随机变量$Z(\omega)=\begin{pmatrix}Z_\varepsilon^{(1)}(\omega)\\ \vdots\\ Z_\varepsilon^{(m)}(\omega)\end{pmatrix}$, 使得

$$\left\{\begin{pmatrix}\omega\\ Z_\varepsilon(\omega)\end{pmatrix};\ \omega\in\Omega\right\}\cap\Omega\times\mathscr{R}_m\subseteq A \tag{3}$$

$$\mathscr{P}[\Pi(A)]\leqslant\mathscr{P}[\{\omega;\ \omega\in\Omega,\ \max_{1\leqslant k\leqslant m}[Z_\varepsilon^{(k)}(\omega)]<\infty\}]+\varepsilon. \tag{4}$$

证 以$\mathscr{K}$表$\mathscr{R}_m$中紧集全体，则$\mathscr{K}$是一个复盖. 显然$\overline{\mathscr{B}}$也是一个复盖. 以$\overline{\mathscr{B}}\otimes\mathscr{K}$表它们的乘积复盖. 对于集合$A\in\overline{\mathscr{B}}\times\mathscr{B}_m$与$\varepsilon>0$, 有集合$L_\varepsilon\in(\overline{\mathscr{B}}\otimes\mathscr{K})_\delta$, 使得$L_\varepsilon\subseteq A$及容度之间成立关系式$\text{II}(A)\leqslant\text{II}(L_\varepsilon)+\varepsilon$; 这里$\text{II}(\cdot)\triangleq\widetilde{P}^*[\Pi(\cdot)]$, $\widetilde{P}^*$表$\widetilde{P}$的外测度. (见[1]).

由于 L_ε 是形如 $\bigcap_{s=1}^{\infty}\left(\bigcup_{r=1}^{N(s)} B_s^{(r)}\times K_s^{(r)}\right)$ 的集；其中 $K_s^{(r)}$ 是 $\mathscr{R}_m$ 中紧集，$B_s^{(r)}\in\overline{\mathscr{B}}$，$N(s)$ 是 s 的某个取自然数值的函数．于是对 Ω 中任何一点 ω，截口 $L_\varepsilon(\omega)$ 或者是空集，或者是非空紧集.

对于 $\mathscr{R}_m$ 中的非空紧集 K，定义矢量 $\boldsymbol{D}_K\triangleq\begin{pmatrix}t^{(1)}\\ \vdots\\ t^{(m)}\end{pmatrix}$，其中

$$t^{(1)}\triangleq\inf\left\{X^{(1)};\ \begin{pmatrix}X^{(1)}\\ X^{(2)}\\ \vdots\\ X^{(m-1)}\\ X^{(m)}\end{pmatrix}\in K\right\};\quad t^{(2)}\triangleq\inf\left\{X^{(2)};\ \begin{pmatrix}t^{(1)}\\ X^{(2)}\\ \vdots\\ X^{(m-1)}\\ X^{(m)}\end{pmatrix}\in K\right\};$$

$$\cdots;\ t^{(m)}\triangleq\inf\left\{X^{(m)};\ \begin{pmatrix}t^{(1)}\\ t^{(2)}\\ \vdots\\ t^{(m-1)}\\ X^{(m)}\end{pmatrix}\in K\right\};$$

从 K 的紧性，容易验证 $\boldsymbol{D}_K\in K$.

于是，我们如果定义 Ω 上的函数

$$\boldsymbol{Z}_\varepsilon(\omega)\triangleq\begin{pmatrix}Z_\varepsilon^{(1)}(\omega)\\ \vdots\\ Z_\varepsilon^{(m)}(\omega)\end{pmatrix}\triangleq\boldsymbol{I}_{\{\omega;L_\varepsilon(\omega)\neq\phi\}}\boldsymbol{D}_{L_\varepsilon}(\omega)+\boldsymbol{I}_{\{\omega;L_\varepsilon(\omega)=\phi\}}\cdot\begin{pmatrix}\infty\\ \vdots\\ \infty\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Z}_\varepsilon(\omega)$ 在 Ω 上处处有定义．下面验证它是 $\overline{\mathscr{B}}$-可测的.

事实上，对任何 $a\in\mathscr{R}$（实数域）

$$\{\omega;\ Z_\varepsilon^{(1)}(\omega)\leqslant a\}=\Pi\left[L_\varepsilon\cap\left\{\begin{pmatrix}\omega\\ X^{(1)}\\ \vdots\\ X^{(m)}\end{pmatrix};\ X^{(1)}\leqslant a\right\}\right]$$

引用引理 1 可知 $Z_\varepsilon^{(1)}$ 是 $\overline{\mathscr{B}}$-可测的.

而
$$\{\omega;\ Z_\varepsilon^{(2)}(\omega)\leqslant a\}=\Pi\left[L_\varepsilon\cap\left\{\begin{pmatrix}\omega\\ X^{(1)}\\ \vdots\\ X^{(m)}\end{pmatrix};\ X^{(1)}\leqslant Z_\varepsilon^{(1)}(\omega),\ X^{(2)}\leqslant a\right\}\right]$$

引用引理 1 及引理 2 得知 $Z_\varepsilon^{(2)}$ 是 $\overline{\mathscr{B}}$-可测的.

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

同此进行，最后从

$$\{\omega;\ Z_\varepsilon^{(m)}(\omega)\leqslant a\}=\Pi\left[L_\varepsilon\cap\left\{\begin{pmatrix}\omega\\ X^{(1)}\\ \vdots\\ X^{(m)}\end{pmatrix};\ X^{(1)}\leqslant Z_\varepsilon^{(1)}(\omega),\ \cdots,\ X^{(m-1)}\leqslant Z_\varepsilon^{(m-1)},\ X^{(m)}\leqslant a\right\}\right]$$

同样可得 $Z_{\varepsilon}^{(m)}(\omega)$ 的 $\overline{\mathscr{B}}$-可测性，由于各分量都是 $\overline{\mathscr{B}}$-可测的，从而 $\boldsymbol{Z}_{\varepsilon}(\omega)$ 也是 $\overline{\mathscr{B}}$-可测的，引理证毕.

引理 4（多元截口定理） 设 $A\in\overline{\mathscr{B}}\times\mathscr{B}_m$，则存在一个 m 维广义实值随机变量（但使之不取 $-\infty$ 值）

$$\boldsymbol{Z}(\omega)\triangleq\begin{pmatrix}Z^{(1)}(\omega)\\ \vdots\\ Z^{(m)}(\omega)\end{pmatrix};\qquad \omega\in\Omega,$$

使得

$$A\supset\left\{\begin{pmatrix}\omega\\ X^{(1)}\\ \vdots\\ X^{(m)}\end{pmatrix};\ -\infty<X^{(1)}=Z^{(1)}(\omega)<\infty,\ \cdots,\ -\infty<X^{(m)}=Z^{(m)}(\omega)<\infty\right\}\tag{5}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}[\{\omega;\ \max_{i=1,\cdots,m}[Z^{(i)}(\omega)]<\infty\}]=\widetilde{\boldsymbol{P}}[\Pi(A)].\tag{6}$$

证 取 $A_1\triangleq A$，并取 $\varepsilon_1\triangleq\frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{P}}[\Pi(A)]$，应用引理 3，得到 $\boldsymbol{Z}_{\varepsilon_1}$ 满足(3)与(4)式；再取

$$A_2\triangleq A_1-\left\{\begin{pmatrix}\omega\\ X^{(1)}\\ \vdots\\ X^{(m)}\end{pmatrix};\ \max_{1\leqslant i\leqslant n}[Z_{\varepsilon_1}^{(i)}(\omega)]<\infty\right\}$$

则 $\widetilde{\boldsymbol{P}}[\Pi(A_2)]\leqslant\frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{P}}[\Pi(A_1)]$. 再对 $\mathscr{A}_2$ 与 $\varepsilon_2\triangleq\frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{P}}[\Pi(A_2)]$ 应用引理 3，得到 $\boldsymbol{Z}_{\varepsilon_2}$ 满足(3)与(4)式，…，继续进行，得到

$$\boldsymbol{Z}_{\varepsilon_1}(\omega)=\begin{pmatrix}Z_{\varepsilon_1}^{(1)}(\omega)\\ \vdots\\ Z_{\varepsilon_1}^{(m)}(\omega)\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Z}_{\varepsilon_2}(\omega)=\begin{pmatrix}Z_{\varepsilon_2}^{(1)}(\omega)\\ \vdots\\ Z_{\varepsilon_2}^{(m)}(\omega)\end{pmatrix},\ \cdots$$

定义 $\boldsymbol{Z}(\omega)$：当 $\omega\in\Pi(A_n-A_{n+1})$ 时，令

$$\boldsymbol{Z}(\omega)=\begin{pmatrix}Z_{\varepsilon_n}^{(1)}(\omega)\\ \vdots\\ Z_{\varepsilon_n}^{(m)}(\omega)\end{pmatrix},\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

当 $\omega\overline{\in}\Pi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-A_{n+1})\right)$ 时，令

$$\boldsymbol{Z}(\omega)=\begin{pmatrix}\infty\\ \vdots\\ \infty\end{pmatrix}.$$

容易验证，此即满足(5)与(6)式的随机变量.

定义 1 所谓密度函数族 $\{f(\omega,\theta)\}$ 是关于 θ 逐段有可测上确界的，是指对任何一个如下的 $\mathscr{R}_m$ 中子集 J

$$J\triangleq(a_1,\ b_1]\times(a_2,\ b_2]\times\cdots\times(a_m,\ b_m];\ a_1<b_1,\ \cdots,\ a_m<b_m,\tag{7}$$

$\sup\limits_{\theta\in J}f(\omega,\theta)$ 为 $\overline{\mathscr{B}}$-可测函数.（参考过程可分性定义[3]）

引理 5 设 $f(\omega,\theta)$ 是 $\overline{\mathscr{B}}\times\mathscr{B}_m$-可测的，则它是关于 θ 逐段有可测上确界的.

证　因为对任何实数 a 和任何具有形式(7)的 J

$$\{\omega;\ \sup_{\theta\in J} f(\omega,\ \theta)>a\}=\Pi\left[\left\{\begin{pmatrix}\omega\\ \theta\end{pmatrix};\ f(\omega,\ \theta)>a\right\}\cap(\Omega\times J)\right]$$

将引理 1 应用于完备概率空间 $(\Omega,\ \overline{\mathscr{B}},\ \widetilde{\boldsymbol{P}})$ 而得结论.

现在可以来证明定理 1 的充分性了. 不妨设 $\widetilde{\boldsymbol{P}}\equiv\mathscr{P}$. ([2]).

首先从引理 5, 函数

$$g(\omega)\triangleq\sup_{\theta\in\mathscr{R}_m} f(\omega,\ \theta)$$

是 $\overline{\mathscr{B}}$-可测的. 于是定义函数

$$H(\omega,\ \theta)\triangleq g(\omega);\qquad \omega\in\Omega,\ \theta\in\mathscr{R}_m.$$

这是一个 $\overline{\mathscr{B}}\times\mathscr{B}_m$-可测函数, 从而

$$A\triangleq\left\{\begin{pmatrix}\omega\\ \theta\end{pmatrix};\ \omega\in\Omega,\ \theta\in\mathscr{R}_m,\ f(\omega,\ \theta)=H(\omega,\ \theta)\right\}$$

是 $\overline{\mathscr{B}}\times\mathscr{B}_m$-可测集, 从定理假设, $\widetilde{\boldsymbol{P}}[\Pi(A)]=1$.

从多元截口定理, 得知有满足(5)、(6)式的 $\overline{\mathscr{B}}$-可测函数 $\boldsymbol{Z}(\omega)$ 存在, 我们只需在某个 $\widetilde{\boldsymbol{P}}$-零集上将 $\boldsymbol{Z}(\omega)$ 进行修改, 即得满足(5)、(6)式的 $\mathscr{B}$-可测函数 $T(\omega)$, 此即极大似然估计量

$$f(\omega,\ T(\omega))=\sup_{\theta\in\mathscr{R}_m} f(\omega,\ \theta),\qquad \text{a. s.}[\mathscr{P}]$$

证毕.

然而, 在有些情况下, (1)式并不能满足. 于是, 如果 $\mathscr{B}$-可测函数 $T(\omega)$ 满足条件:

$$f(\omega,\ T(\omega))\cdot I_A(\omega)=\sup_{\theta\in\mathscr{R}_m} f(\omega,\ \theta)\cdot I_A(\omega),\qquad \text{a. s.}[\mathscr{P}]\quad(8)$$

存在 $\{\theta_i(\omega)\}_{i=1,2,\cdots}$, $\lim\limits_{i\to\infty} f(\omega,\ \theta_i(\omega))=\sup\limits_{\theta\in\mathscr{R}_m} f(\omega,\ \theta)$, $\lim\limits_{i\to\infty}\theta_i(\omega)=T(\omega)$, a. s.$[\mathscr{P}]$ (9)

这里 $\theta_i(\omega)$ 不要求可测性, 且集合

$$A\triangleq\Pi\left[\left\{\begin{pmatrix}\omega\\ \theta\end{pmatrix};\ \omega\in\Omega,\ \theta\in\mathscr{R}_m,\ f(\omega,\ \theta)=\sup_{\theta\in\mathscr{R}_m} f(\omega,\ \theta)\right\}\right]\quad(10)$$

I_A 是集 A 的示性函数.

定义 2　称这样定义的 $T(\omega)$ 为广义极大似然估计([4]).

定理 2　设密度函数 $f(\omega,\ \theta)$ 是关于 θ 逐段有可测上确界的, 则存在一个取广义实数值的 $\mathscr{B}$-可测函数 $Q(\omega)$, 使得存在函数(不要求可测性)叙列 $\{\theta_i(\omega)\}_{i=1,2,\cdots}$ 存在, 满足

$$\lim_{i\to\infty} f(\omega,\theta_i(\omega))=\sup_{\theta\in\mathscr{R}_m} f(\omega,\ \theta),\ \lim_{i\to\infty}\theta_i(\omega)=Q(\omega),\qquad \text{a. s.}[\mathscr{P}]$$

证　为叙述方便起见, 不妨仅考察 $\mathscr{R}_m$ 的维数 $m=2$ 的情况. 在 $m\neq2$ 时, 其证明类似. 此时记 $\theta\triangleq\begin{pmatrix}\theta^{(1)}\\ \theta^{(2)}\end{pmatrix}$, 并记

$$A_{(-\infty,\,-\infty)}\triangleq\{\omega,\ \omega\in\Omega,\ \lim_{k\to\infty}[\sup_{\substack{-\infty<\theta^{(1)}\leqslant-k\\ -\infty<\theta^{(2)}\leqslant-k}} f(\omega,\ \theta)]=\sup_{\theta\in\mathscr{R}_2} f(\omega,\ \theta)\};$$

$$A_{(+\infty,\,-\infty)}\triangleq\{\omega;\ \omega\in\Omega,\ \lim_{k\to\infty}[\sup_{\substack{k<\theta^{(1)}<\infty\\ -\infty<\theta^{(2)}\leqslant-k}} f(\omega,\ \theta)]=\sup_{\theta\in\mathscr{R}_2} f(\omega,\ \theta)\};$$

$$A_{(-\infty,+\infty)}\triangleq\{\omega;\ \omega\in\Omega,\ \lim_{k\to\infty}[\sup_{\substack{-\infty<\theta^{(1)}\leqslant-k\\ k<\theta^{(2)}<\infty}} f(\omega,\theta)]=\sup_{\theta\in\mathscr{R}_2}f(\omega,\theta)\};$$

$$A_{(+\infty,+\infty)}\triangleq\{\omega;\ \omega\in\Omega,\ \lim_{k\to\infty}[\sup_{\substack{k<\theta^{(1)}<\infty\\ k<\theta^{(2)}<\infty}} f(\omega,\theta)]=\sup_{\theta\in\mathscr{R}_2}f(\omega,\theta)\};$$

$$D_1\triangleq A_{(-\infty,-\infty)},\ D_2\triangleq A_{(+\infty,-\infty)}-A_{(-\infty,-\infty)},\ D_3\triangleq A_{(-\infty,+\infty)}-A_{(+\infty,-\infty)}-A_{(-\infty,-\infty)},$$
$$D_4\triangleq A_{(+\infty,+\infty)}-A_{(-\infty,+\infty)}-A_{(+\infty,-\infty)}-A_{(-\infty,-\infty)};$$
$$D\triangleq D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4.$$

上述各集显然都是$\overline{\mathscr{B}}$-可测的. 另一方面, 对每个自然数n及整数$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$; 正实数t, 我们可以定出下述集合及相应函数

$$B_n^{(1,k,t)}\triangleq\left\{\begin{pmatrix}\theta^{(1)}\\ \theta^{(2)}\end{pmatrix};\ \frac{k-1}{2^n}<\theta^{(1)}\leqslant\frac{k}{2^n},\ \ t<\theta^{(2)}<\infty\right\};$$

$$B_n^{(2,k,t)}\triangleq\left\{\begin{pmatrix}\theta^{(1)}\\ \theta^{(2)}\end{pmatrix};\ t<\theta^{(1)}<\infty,\ \frac{k-1}{2^n}<\theta^{(2)}\leqslant\frac{k}{2^n}\right\};$$

$$B_n^{(1,k,-t)}\triangleq\left\{\begin{pmatrix}\theta^{(1)}\\ \theta^{(2)}\end{pmatrix};\ \frac{k-1}{2^n}<\theta^{(1)}\leqslant\frac{k}{2^n},\ -\infty<\theta^{(2)}\leqslant-t\right\};$$

$$B_n^{(2,k,-t)}\triangleq\left\{\begin{pmatrix}\theta^{(1)}\\ \theta^{(2)}\end{pmatrix};\ -\infty<\theta^{(1)}\leqslant-t,\ \frac{k-1}{2^n}<\theta^{(2)}\leqslant\frac{k}{2^n}\right\};$$

$$s_n^{(i,k,+\infty)}(\omega)\triangleq\lim_{t\to\infty}\{\sup_{\theta\in B_n^{(i,k,t)}}f(\omega,\theta)\};$$
$$s_n^{(i,k,-\infty)}(\omega)\triangleq\lim_{t\to\infty}\{\sup_{\theta\in B_n^{(i,k,-t)}}f(\omega,\theta)\},\qquad (i=1,2)$$

由定理假设, $s_n^{(i,k,+\infty)}(\omega)$与$s_n^{(i,k,-\infty)}(\omega)$都是$\overline{\mathscr{B}}$-可测函数. 进一步记

$$E_n^{(1,k,+\infty)}\triangleq\{\omega;\ \sup_{h>k}s_n^{(1,h,+\infty)}(\omega)\leqslant s_n^{(1,k,+\infty)}(\omega);\ \forall j<k,\ s_n^{(1,j,+\infty)}(\omega)<s_n^{(1,k,+\infty)}(\omega)\};$$
$$E_n^{(1,k,-\infty)}\triangleq\{\omega;\ \sup_{h>k}s_n^{(1,h,-\infty)}(\omega)\leqslant s_n^{(1,k,-\infty)}(\omega);\ \forall j<k,\ s_n^{(1,j,-\infty)}(\omega)<s_n^{(1,k,-\infty)}(\omega)\};$$
$$E_n^{(2,k,+\infty)}\triangleq\{\omega;\ \sup_{h>k}s_n^{(2,h,+\infty)}(\omega)\leqslant s_n^{(2,k,+\infty)}(\omega);\ \forall j<k,\ s_n^{(2,j,+\infty)}(\omega)<s_n^{(2,k,+\infty)}(\omega)\};$$
$$E_n^{(2,k,-\infty)}\triangleq\{\omega;\ \sup_{h>k}s_n^{(2,h,-\infty)}(\omega)\leqslant s_n^{(2,k,-\infty)}(\omega);\ \forall j<k,\ s_n^{(2,j,-\infty)}(\omega)<s_n^{(2,k,-\infty)}(\omega)\};$$
$$G_n^{(1,k,+\infty)}\triangleq E_n^{(1,k,+\infty)}$$
$$G_n^{(1,k,-\infty)}\triangleq E_n^{(1,k,-\infty)}-\bigcup_{j>-\infty}E_n^{(1,j,+\infty)}$$
$$G_n^{(2,k,+\infty)}\triangleq E_n^{(2,k,+\infty)}-\bigcup_{j>-\infty}E_n^{(1,j,+\infty)}-\bigcup_{j>-\infty}E_n^{(1,j,-\infty)}$$
$$G_n^{(2,k,-\infty)}\triangleq E_n^{(2,k,-\infty)}-\bigcup_{j>-\infty}E_n^{(1,j,+\infty)}-\bigcup_{j>-\infty}E_n^{(1,j,-\infty)}-\bigcup_{j>-\infty}E_n^{(2,j,+\infty)}$$

上述集合都是$\overline{\mathscr{B}}$-可测的. 定义

$$U_n(\omega)\triangleq\sum_{k>-\infty}I_{G_n^{(1,k,+\infty)}}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{k-1}{2^n}\\ \infty\end{pmatrix}+\sum_{k>-\infty}I_{G_n^{(1,k,-\infty)}}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{k-1}{2^n}\\ -\infty\end{pmatrix}$$
$$+\sum_{k>-\infty}I_{G_n^{(2,k,+\infty)}}\cdot\begin{pmatrix}\infty\\ \dfrac{k-1}{2^n}\end{pmatrix}+\sum_{k>-\infty}I_{G_n^{(2,k,-\infty)}}\cdot\begin{pmatrix}-\infty\\ \dfrac{k-1}{2^n}\end{pmatrix}$$

当 $n\to\infty$ 时，U_n 递增收敛于某个 $\overline{\mathscr{B}}$-可测函数 U.

另外，我们对于每个自然数 n，再把整个平面 $\mathscr{R}_2$ 分割成可数个直径小于 $\frac{1}{2^n}$ 的半开矩形

$$\{(a_1,\ b_1]\times(a_2,\ b_2]\};\qquad a_1<b_1,\ a_2<b_2$$

的不相交并集，我们按某个任意选定的次序将它们编号，记为 J_n^1, J_n^2, $\cdots$，使得对于 $n'\leqslant n''$，如上的分割和编号满足条件：

i）对任何 $J_{n''}^j$，必存在某个 $J_{n'}^k$，使得 $J_{n''}^j\subset J_{n'}^k$；

ii）设 $k'<k''$，且 $J_{n''}^{i'}\subset J_{n'}^{k'}$, $J_{n''}^{i''}\subset J_{n'}^{k''}$，则有 $i'<i''$.

记

$$G\triangleq G_n^{(1,k,+\infty)}\cup G_n^{(1,k,-\infty)}\cup G_n^{(2,k,+\infty)}\cup G_n^{(2,k,-\infty)},$$

$$F_n^k\triangleq\{\omega;\omega\overline{\in}G\cup D;\ \sup_{j>k}[\sup_{\theta\in J_n^j}f(\omega,\ \theta)]\leqslant\sup_{\theta\in J_n^k}f(\omega,\ \theta);$$

$$\forall i<k,\ \sup_{\theta\in J_n^i}f(\omega,\ \theta)<\sup_{\theta\in J_n^k}f(\omega,\ \theta)\}$$

则每个 F_n^k 都是 $\overline{\mathscr{B}}$-可测集，我们在每个 J_n^k 中任意取定一个矢量 $\boldsymbol{V}_n^k$，则函数

$$\boldsymbol{V}_n\triangleq\sum_{k>-\infty}I_{F_n^k}(\omega)\cdot\boldsymbol{V}_n^k$$

是 $\overline{\mathscr{B}}$-可测函数．显然由于我们的取法，当 $n\to\infty$ 时，$\boldsymbol{V}_n$ 收敛，其极限 $\boldsymbol{V}\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{V}_n$ 存在且可测．记

$$\boldsymbol{W}(\omega)\triangleq\boldsymbol{V}(\omega)+I_{D_1}(\omega)\cdot\begin{pmatrix}-\infty\\-\infty\end{pmatrix}+I_{D_2}(\omega)\begin{pmatrix}\infty\\-\infty\end{pmatrix}+I_{D_3}(\omega)\begin{pmatrix}-\infty\\\infty\end{pmatrix}$$

$$+I_{D_4}(\omega)\cdot\begin{pmatrix}\infty\\\infty\end{pmatrix}+I_{\Omega-D}(\omega)\cdot U(\omega)\quad（规定运算\ 0\cdot(\pm\infty)=0）$$

则 $\boldsymbol{W}(\omega)$ 是满足定理要求的 $\overline{\mathscr{B}}$-可测函数，为了使它成为 $\mathscr{B}$-可测的，只须在某个 μ-零集上修改即可．

证毕.

下面我们假定参数 θ 的变程为 $\mathscr{R}_m$ 的有界子集

$$\Theta\triangleq(a_1,\ b_1)\times(a_2,\ b_2)\times\cdots\times(a_m,\ b_m);\ (a_1<b_1,\ a_2<b_2,\ \cdots,\ a_m<b_m).$$

这样一来，就可以避免讨论统计量可能取 $\pm\infty$ 值的情况．这时定理 1、2 仍成立，而且得到的统计量仅取有限值．因为事实上，无论是定理 1 还是定理 2，都只涉及到 $f(\omega,\ \theta)$ 的极大值关系，而没有利用 $f(\omega,\ \theta)$ 对于固定的 θ 所具有的密度函数特征，所以在 Θ 是 $\mathscr{R}_m$ 的真子集时，我们只须作代换

$$f^*(\omega,\ \theta)=\begin{cases}f(\omega,\ \theta), & \theta\in\Theta\\ 0, & \theta\overline{\in}\Theta\end{cases}$$

就可直接引用前二定理而得结论．

为方便起见，记 $\mathscr{B}_m$ 在 Θ 上引起的 σ-域 $\mathscr{B}_m\cap\Theta$ 为 $\mathscr{B}_m^\Theta$，于是 $(\Theta,\ \mathscr{B}_m^\Theta)$ 成为可测空间．我们建立下定理：

定理 3　设 $f(\omega,\ \theta)$ 关于 $\overline{\mathscr{B}}\times\mathscr{B}_m^\Theta$ 可测，则广义极大似然估计存在．

证　因为集合

$$A \triangleq \Pi\left[\left\{\begin{pmatrix}\omega\\ \theta\end{pmatrix};\quad \omega\in\Omega,\ \theta\in\Theta,\ f(\omega,\ \theta)=\sup_{\theta\in\Theta} f(\omega,\ \theta)\right\}\right]$$

是$\overline{\mathscr{B}}$-可测集，所以有集合$B\subset\mathscr{A}$，$\mu[A-B]=0$，且B是$\mathscr{B}$-可测的．其余集B^c也是$\mathscr{B}$-可测．

对于集A利用多元截口定理，作出$\mathscr{B}$-可测函数T'满足定义2的(8)式，同样再按定理2作出$\mathscr{B}$-可测的T''满足(9)式，则新的函数

$$T(\omega)\triangleq T'(\omega)\cdot I_B(\omega)+T''(\omega)\cdot I_{B^c}(\omega)$$

即为满足定义2的广义极大似然估计． 证毕．

容易看出，当$f(\omega,\ \theta)$是关于θ右连续(或左连续)函数时，如果存在唯一的函数(a. s. $[\mathscr{P}]$)满足下式

$$f(\omega,\ S(\omega))=\sup_{\theta} f(\omega,\ \theta),\qquad \text{a. s.}[\mathscr{P}].$$

则$S(\omega)$必是统计量(a. s.$[\mathscr{P}]$)．这样一来，常见的一些密度函数族就都包含在我们的讨论中了．

参考文献

[1] Dellacherie, C., Capacitès et Processus Stochastique, *Springer-Verlag, Berlin.* (1972).
[2] Zacks, S., The Theory of Statistical Inference, *John Wiley & Sons Inc.* (1971).
[3] Loève, M., Probability Theory, *Van Nostrand, New York.* (1960).
[4] 成平，极大似然估计的 Bahadur 渐近有效性，数学学报(待发表)．

ON THE EXISTENCE OF MAXIMAL LIKELIHOOD ESTIMATORS

ZHENG WEIAN
(*Shanghai Normal University*)

ABSTRACT

In this paper, we give the necessary and sufficient condition for the existence of maximal likelihood estimators when the density functions of probability distributions are product measurable. We also show that when we adopt the generalized definition of maximal likelihood estimators, the generalized maximal likelihood estimators always exist, provided the density functions are product measurable.