数 学 年 刊
1 (2) 1980

一类一致概周期函数的结构性质

程 乃 栋
(淮南煤炭学院)

关于一致概周期函数的结构性质，在[1]、[2]中曾对傅立叶指数有唯一的极限点在有限远处的一类一致概周期函数，平行于周期函数的逼近论，建立了 Jackson 型定理和 Бернштейн 型定理，亦就是对于这一类一致概周期函数，作者在[3]中获得了类似于 Zygmund 关于周期函数的结果．在本文中，作者将研究另一类一致概周期函数的结构性质，这一类函数的傅立叶指数有唯一的极限点在无穷远处．特别，一切纯粹的周期函数属于这一类．

一

考虑一类一致概周期函数 $f(x)$，我们称 $f(x)$ 为属于函数类 $\hat{S}$，如果它的傅立叶指数满足下述条件

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\Lambda_k x},$$

$$\Lambda_0=\alpha,\ 0<\alpha\leqslant\Lambda_k<\Lambda_{k+1}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

$$\lim_k \Lambda_k=\infty,\ \Lambda_{-k}=-\Lambda_k.$$

$$|A_k|+|A_{-k}|>0\quad (k\neq 0).$$

下面，我们引入记号：设 $f(x)\in\hat{S}$，

$$e_\lambda(f)=\inf_{C_k}\{\sup_x|f(x)-\sum_{|\Lambda_k|\leqslant\lambda}C_k e^{i\Lambda_k x}|\},$$

$$E_\lambda(f)=\inf_{F(x)\in B_\lambda}\{\sup_x|f(x)-F(x)|\},$$

其中 B_λ 表示满足以下条件所有指数 $\leqslant\lambda$ 的指数型超越整函数 $F(x)$ 的集合

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|F(x)|<+\infty.$$

设
$$\hat{\Omega}_f(N)=\begin{cases}\sup\limits_{|T|<N}\left\{\sup\limits_x\left|\dfrac{1}{T}\int_0^T[f(x+t)-f(x)]dt\right|\right\}, & N>0,\\ 0, & N=0.\end{cases}$$

显然，$\hat{\Omega}_f(N)$ 是有界的、连续的不减函数，且

$$\lim_{N\to 0}\hat{\Omega}_f(N)=0.$$

引理 1 设 $\psi_{\lambda,m}(u)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{\lambda,m}(t)e^{-iut}dt,$

本文 1978 年 8 月 3 日收到，1979 年 5 月 8 日修改．

其中

$$\varphi_{\lambda,m}(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant\dfrac{\lambda}{m},\ m>2,\\ 1-\dfrac{6}{(m-1)^2}\left(1-\dfrac{m|t|}{\lambda}\right)^2-\dfrac{6}{(m-1)^3}\left(1-\dfrac{m|t|}{\lambda}\right)^3, & \dfrac{\lambda}{m}<|t|\leqslant\dfrac{m+1}{2m}\lambda,\\ 2\left(\dfrac{m}{m-1}\right)^3\left(1-\dfrac{|t|}{\lambda}\right)^3, & \dfrac{m+1}{2m}\lambda<|t|\leqslant\lambda,\\ 0, & |t|>\lambda,\end{cases}$$

则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_{\lambda,m}(u)|\,du<C,\ (C=\text{const}).$$

证 事实上，因为

$$\psi_{\lambda,m}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{\lambda,m}(t)e^{-iut}\,dt$$

$$=\frac{12m^3\lambda\left(-\dfrac{m-1}{m}\lambda u\sin\dfrac{\lambda u}{m}-4\cos\dfrac{m+1}{2m}\lambda u+3\cos\dfrac{\lambda u}{m}+\cos\lambda u\right)}{\pi(\lambda u)^4(m-1)^3}. \quad (1)$$

于是，若令 $\lambda u=v$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_{\lambda,m}(u)|\,du=\frac{24}{\pi}\left(\frac{m}{m-1}\right)^3\int_0^{+\infty}$$

$$\cdot\left|\frac{-\dfrac{m-1}{m}\lambda u\sin\dfrac{\lambda u}{m}-4\cos\dfrac{m+1}{2m}\lambda u+3\cos\dfrac{\lambda u}{m}+\cos\lambda u}{(\lambda u)^4}\right|d(\lambda u)$$

$$=\frac{24}{\pi}\left(\frac{m}{m-1}\right)^3\int_0^{+\infty}$$

$$\cdot\left|\frac{-\dfrac{m-1}{m}v\sin\dfrac{v}{m}-4\cos\dfrac{m+1}{2m}v+3\cos\dfrac{v}{m}+\cos v}{v^4}\right|dv<C.$$

证毕。

引理 2 设 $f(x)\in\hat{S}$,

$$f_{\lambda,m}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x+u)\psi_{\lambda,m}(u)\,du,$$

则 $f_{\lambda,m}(x)$ 是一致概周期函数，其傅立叶级数是

$$f_{\lambda,m}(x)\sim\sum_n\varphi_{\lambda,m}(\Lambda_n)A_ne^{i\Lambda_nx}. \quad (2)$$

证 见[4]辅助定理(1.10.2).

引理 3 设 $f(x)\in\hat{S}$,

则

$$e_\lambda(f)\leqslant\sup_x|f_{\lambda,m}(x)-f(x)|.$$

证 对于任给 $\lambda>0$，可以选取正整数 m，使得 $\dfrac{\lambda}{m}\leqslant\alpha$. 这样，由 $e_\lambda(f)$ 的定义

$$e_\lambda(f)=\inf_{C_k}\{\sup_x|f(x)-\sum_{|\Lambda_k|<\lambda}C_ke^{i\Lambda_kx}|\}$$

$$\leqslant\sup_x|f(x)-\sum\varphi_{\lambda,m}(\Lambda_k)A_ke^{i\Lambda_kx}|$$

$$=\sup_x|f(x)-f_{\lambda,m}(x)|.$$

证毕。

引理 4　设 $F(u, x)=\int_0^u [f(x+t)-f(x)]dt$,

则对于一切实数 c,

$$\sup_x |F(cu, x)| \leqslant (|c|+1)|u|\hat{\Omega}_f(|u|). \tag{3}$$

证　由 $\hat{\Omega}_f(N)$ 的定义,

$$\sup_x |F(u, x)| \leqslant |u|\hat{\Omega}_f(|u|).$$

由于 $\hat{\Omega}_f(N)$ 是关于 N 的不减函数, 故当 $|c|\leqslant 1$ 时,

$$\sup_x |F(cu, x)| \leqslant |c|\cdot|u|\hat{\Omega}_f(|u|).$$

现在证明对于一切负整数 $c=-n$, 不等式(3)成立.

事实上, $n=1$ 成立, 若设 $n=k$ 时不等式(3)成立, 即

$$\sup_x |F(-ku, x)| \leqslant (|-k|+1)|u|\hat{\Omega}_f(|u|),$$

则由
$$\sup_x \left|\int_0^{-(k+1)u} [f(x+u+t)-f(x)]dt\right| \leqslant \left|\int_u^{-ku} [f(x+t)-f(x)]dt\right|$$
$$\leqslant \left|\int_0^{-ku} [f(x+t)-f(x)]dt\right| + \left|\int_0^u [f(x+t)-f(x)]dt\right|,$$

便有
$$\sup_x |F(-(k+1)u, x)| \leqslant \sup_x |F(-ku, x)| + \sup_x |F(u, x)|$$
$$\leqslant (k+1)|u|\hat{\Omega}_f(|u|) + |u|\hat{\Omega}_f(|u|)$$
$$=(|-(k+1)|+1)|u|\hat{\Omega}_f(|u|).$$

这样由数学归纳法便证得不等式(3)对一切负整数成立.

现再证对于一切 $c>0$ 不等式(3)成立.

事实上, 对于 $c>1$($1\geqslant c>0$ 是显然的), 恒存在正整数 n, 使得 $n+1>c\geqslant n$.

由此
$$\sup_x \left|\int_0^{cu} [f(x-nu+t)-f(x)]dt\right| \leqslant \left|\int_{-nu}^{(c-n)u} [f(x+t)-f(x)]dt\right|$$
$$\leqslant \left|\int_0^{(c-n)u} [f(x+t)-f(x)]dt\right| + \left|\int_0^{-nu} [f(x+t)-f(x)]dt\right|$$

得
$$\sup_x |F(cu, x)| \leqslant \sup_x |F((c-n)u, x)| + \sup_x |F(-nu, x)|$$
$$\leqslant [(c-n)+|-n|+1]|u|\hat{\Omega}_f(|u|)$$
$$=(c+1)|u|\hat{\Omega}_f(|u|).$$

对于 $c<0$ 的情形类似可证.　　证毕。

定理 1　设 $f(x)\in\hat{S}$, 则对于任给 $\lambda>0$,

$$E_\lambda(f) \leqslant C_0\hat{\Omega}_f\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{4}$$

证　由引理 3 及 $E_\lambda(f)$、$e_\lambda(f)$ 的定义

$$E_\lambda(f) \leqslant e_\lambda(f) \leqslant \sup_x |f(x)-f_{\lambda,m}(x)|.$$

现在我们来估计 $|f(x)-f_{\lambda,m}(x)|$. 由[4]定理(1.10.1)知

$$|f(x)-f_{\lambda,m}(x)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+u)-f(x)]\psi_{\lambda,m}(u)du\right|$$

$$=\left|-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{0}^{u}[f(x+u)-f(x)]du\right\}d(\psi_{\lambda,m}(u))\right|$$

$$\leqslant\frac{12}{\pi}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{3}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left|F\left(\frac{v}{\lambda},\ x\right)\right|$$

$$\cdot\left|\left[\frac{-\frac{m-1}{m}v\sin\frac{v}{m}-4\cos\frac{m+1}{2m}v+3\cos\frac{v}{m}+\cos v}{v^{4}}\right]'\right|dv$$

又
$$\sup_{x}\left|F\left(\frac{v}{\lambda},\ x\right)\right|\leqslant(|v|+1)\cdot\frac{1}{\lambda}\hat{\Omega}_{f}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

这样便得
$$E_{\lambda}(f)\leqslant\sup_{x}|f(x)-f_{\lambda,m}(x)|\leqslant C_{0}\hat{\Omega}_{f}\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

其中
$$C_{0}=\frac{12}{\pi}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{3}\int_{-\infty}^{\infty}(|v|+1)$$

$$\cdot\left|\left[\frac{-\frac{m-1}{m}v\sin\frac{v}{m}-4\cos\frac{m+1}{2m}v+3\cos\frac{v}{m}+\cos v}{v^{4}}\right]'\right|dv.$$

证毕.

系 设 $f(x)\in\hat{S}$,

且
$$\hat{\Omega}_{f}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\leqslant A\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\alpha}\ (0<\alpha\leqslant1),$$

则
$$E_{\lambda}(f)\leqslant C\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\alpha},\tag{5}$$

其中
$$C=\text{const}.$$

证明了的这一结果包含有周期函数逼近论中的 Jackson 定理.

二

类似于周期函数逼近论中的 Бернштейн 定理, 作为定理1的逆命题, 我们有下述结果:

定理2 设 $f(x)\in\hat{S}$, 如果对于 $\lambda>0$,

$$E_{\lambda}(f)\leqslant B\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\alpha}\quad(0<\alpha\leqslant1),$$

则当 $0<\alpha<1$ 时,

$$\hat{\Omega}_{f}(N)=O(N^{\alpha}).\tag{6}$$

当 $\alpha=1$ 时,

$$\hat{\Omega}_{f}(N)=O(N(1+|\ln N|)).\tag{7}$$

证 由于 $f(x)\in\hat{S}$, $f(x)$是在整个实轴上一致连续的. 这样,若记 $f(x)$ 的连续模为

$$\omega_{1}(f,\ N)=\sup_{\substack{|t|\leqslant N\\-\infty<x<+\infty}}\{|f(x+t)-f(x)|\},$$

则由 $\hat{\Omega}_f(N)$ 的定义，便有

$$\hat{\Omega}_f(N)\leqslant\omega_1(f,\ N). \tag{8}$$

另一方面，由公式[5]

$$\omega_1\left(f,\ \frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{C}{n}\sum_{\lambda=0}^{n}E_\lambda(f)$$

及定理条件

$$E_\lambda(f)\leqslant B\left(\frac{1}{\lambda}\right)^\alpha,\quad(0<\alpha\leqslant1),$$

可得

$$\omega_1(f,\ t)=\begin{cases}O(t^\alpha), & (0<\alpha<1),\\ O(t[1+|\ln t|]), & (\alpha=1),\ (0<t\leqslant1).\end{cases} \tag{9}$$

结合(8)、(9)两式，这样我们便证得了：当 $N\leqslant1$ 时，

$$\hat{\Omega}_f(N)=\begin{cases}O(N^\alpha), & (0<\alpha<1),\\ O(N[1+|\ln N|]), & (\alpha=1).\end{cases}$$

对于 $N>1$ 的情形，由于 $\hat{\Omega}_f(N)$ 的有界性，定理的结果是显然的.　　证毕.

比较定理 1 系及定理 2，对于属于 $\hat{S}$ 的函数 $f(x)$ 而言，当 $0<\alpha<1$ 时，要使对应于它的 $\hat{\Omega}_f(N)$ 满足条件

$$\hat{\Omega}_f(N)=O(N^\alpha),\quad(0<\alpha<1)$$

的必要且充分条件是

$$E_\lambda(f)\leqslant A\cdot\frac{1}{\lambda^\alpha}.$$

当 $\alpha=1$ 时，为使 $f(x)\in\hat{S}$ 满足条件

$$\hat{\Omega}_f(N)=O(N),$$

条件

$$E_\lambda(f)\leqslant\frac{A}{\lambda}$$

仍然是必要的，下面我们可以举出例子说明这一条件已不再是充分的了。

例　设 $f(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}A_ke^{ikx}$,

其中

$$A_k=\begin{cases}0, & (k=0),\\ -\dfrac{i}{2k^2}, & (k=1,\ 2,\ \cdots),\\ \dfrac{i}{2k^2}, & (k=-1,\ -2,\ \cdots).\end{cases}$$

显然 $f(x)\in\hat{S}$.

现在对于 $\lambda>0$，我们取正整数 n 满足

$$n-1<\lambda\leqslant n$$

这样

$$\Big|f(x)-\sum_{|A_k|\leqslant\lambda}A_ke^{ikx}\Big|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\frac{1}{n}<\frac{1}{\lambda},$$

这表明对应于 $f(x)$ 的 $E_\lambda(f)$ 满足条件

$$E_\lambda(f)\leqslant\frac{A}{\lambda}.$$

现证 $\hat{\Omega}_f(N)$ 不满足条件

$$\hat{\Omega}_f(N)=O(N).$$

事实上，反设

$$\hat{\Omega}_f(N)=O(N)$$

成立，即存在常数 C_0，使得

$$\hat{\Omega}_f(N)\leqslant C_0 N$$

或
$$\sup_{|T|\leqslant N}\left\{\sup_{x}\left|\frac{1}{T}\int_0^T[f(x+t)-f(x)]dt\right|\right\}\leqslant C_0 N.$$

由此，我们便有

$$\sup_{x}\left|\int_0^N[f(x+t)-f(x)]dt\right|\leqslant C_0 N^2. \tag{10}$$

但另一方面，不难验证级数

$$\sum_{\substack{k=-\infty\\(k\neq 0)}}^{\infty} kiA_k e^{ikx}$$

在任一不包含 $2k\pi(k=0,\ \pm1,\ \cdots)$ 的闭区间内一致收敛，故当 $0<x<2\pi$ 时，

$$f'(x)=\sum_{\substack{k=-\infty\\(k\neq 0)}}^{\infty} kiA_k e^{ikx}.$$

这样，我们便有

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=+\infty.$$

(见[6]第 108 页)。

对于常数 C_0，现在取 N 充分小，使得当 $0<x<N$ 时，

$$|f'(x)|>2C_0.$$

这样当 $0<t<N$ 时，

$$|f(0+t)-f(0)|=|f'(\xi)|\cdot t>2C_0 t.$$

因之 $$\sup_{x}\left|\int_0^N[f(x+t)-f(x)]dt\right|\geqslant\left|\int_0^N[f(0+t)-f(0)]dt\right|>\int_0^N 2C_0 t\,dt=C_0N^2$$

于是产生了矛盾，因而 $\hat{\Omega}_f(N)$ 不满足条件

$$\hat{\Omega}_f(N)=O(N).$$

上面讨论表明 $\hat{S}$ 中满足不等式

$$E_\lambda(f)\leqslant\frac{A}{\lambda}$$

的函数类更为广泛. 下面，我们类似于 A. Zygmund 关于周期函数所作过的讨论，来阐明这一类函数的结构性质.

三

引入记号

$$\hat{\Omega}^*_f(N)=\begin{cases}\sup\limits_{|T|\leqslant N}\left\{\sup\limits_{x}\left|\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T[f(x+t)-2f(x)+f(x-t)]dt\right|\right\}, & N>0,\\ 0, & N=0.\end{cases}$$

这是一个关于 N 的有界、连续不减函数，且

$$\lim_{N\to 0}\hat{\Omega}_f^*(N)=0.$$

定义　用 $\hat{H}$ 表示这样的函数类，类中的元素 $f(x)$ 满足条件

$$f(x)\in\hat{S},$$

且

$$\hat{\Omega}_f^*(N)=O(N).$$

定理 3　对于 $\lambda>0$，为使不等式

$$E_\lambda(f)\leqslant\frac{A}{\lambda}$$

成立的必要且充分条件是 $f(x)\in\hat{H}$.

证　充分性：

设 $f(x)\in\hat{H}$，我们有

$$f(x)-f_{\lambda,m}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+u)-f(x)]\psi_{\lambda,m}(u)du.$$

由于 $\psi_{\lambda,m}(u)$ 是偶函数，

$$\begin{aligned}|f(x)-f_{\lambda,m}(x)|&=\left|\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+u)-2f(x)+f(x-u)]\psi_{\lambda,m}(u)du\right|\\&=\left|-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^u[f(x+u)-2f(x)+f(x-u)]du\right\}d(\psi_{\lambda,m}(u))\right|\\&\leqslant\left|\frac{12}{\pi}\left(\frac{m}{m-1}\right)^3\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{\frac{v}{\lambda}}[f(x+u)-2f(x)+f(x-u)]du\right|\right.\\&\quad\cdot\left|\left[\frac{-\frac{m-1}{m}v\sin\frac{v}{m}-4\cos\frac{m+1}{2m}v+3\cos\frac{v}{m}+\cos v}{\nu^4}\right]'\right|dv.\end{aligned}$$

类似于引理 4，我们可以证明

$$\left|\int_0^{\frac{v}{\lambda}}[f(x+u)-2f(x)+f(x+u)]du\right|\leqslant(|v|+1)\frac{1}{\lambda}\hat{\Omega}_f^*\left(\frac{1}{\lambda}\right)\leqslant(|v|+1)\cdot\frac{B}{\lambda^2}.$$

这样便有

$$E_\lambda(f)\leqslant\sup_x|f(x)-f_{\lambda,m}(x)|\leqslant A\cdot\frac{1}{\lambda},$$

其中

$$A=\frac{12}{\pi}\left(\frac{m}{m-1}\right)^3B\int_{-\infty}^{\infty}(|v|+1)$$
$$\cdot\left|\left[\frac{-\frac{m-1}{m}v\sin\frac{v}{m}-4\cos\frac{m+1}{2m}v+3\cos\frac{v}{m}+\cos\nu}{v^4}\right]'\right|dv.$$

必要性：

令

$$\omega_2(f,N)=\sup_{\substack{|t|\leqslant N\\-\infty<x<+\infty}}\{|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|\}$$

为 $f(x)$ 的广义连续模．由 $\hat{\Omega}_f^*(N)$ 的定义有

$$\hat{\Omega}_f^*(N)\leqslant\omega_2(f,N),$$

另一方面，根据广义连续模 $\omega_2(f,N)$ 及 $E_\lambda(f)$ 之间的关系式

$$\omega_2\left(f,\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{C}{n^2}\sum_{\lambda=0}^{n}(\lambda+1)E_\lambda(f)$$

及定理条件

$$E_\lambda(f) \leqslant \frac{A}{\lambda},$$

得

$$\omega_2(f, t) = O(t), \quad (0 < t \leqslant 1),$$

亦即当 $N \leqslant 1$ 时，有

$$\hat{\Omega}_f^*(N) = O(N).$$

当 $N > 1$ 时，由于 $\hat{\Omega}_f^*(N)$ 的有界性这一结果是显然的.

证毕.

参 考 文 献

[1] Е. А. Бредихина: Некоторые вопросы приближения почти-периодических функции с ограниченным спектром. ДАН СССР Т 131 № 4 (1960).

[2] Е. А. Бредихина: О приближений почти-периодических функций с ограниченным спектром. Матем. сб. **56** (98): 1 (1962).

[3] 程乃栋，论一类一致概周期函数的结构性质的特征，数学学报，**13:** 3 (1963) 或 SCIENTIA SINICA. **13:** 2 (1964).

[4] Б. М. 列维坦、余家荣、张延昌译，概周期函数，高教出版社，(1956).

[5] А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. М. Физматгиз, (1960).

[6] И. П. 纳唐松、徐家福、郑维行译，函数构造论，科学出版社，(1958).

CONSTRUCTIVE PROPERTIES OF A KIND OF UNIFORMLY ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

CHENG NAIDONG

(*Huainan Coal and Coke College*)

ABSTRACT

In this paper, we have discussed constructive properties of a kind of uniformly almost periodic functions, of which the sequence of its Fourier exponents has unique limit point at infinity.

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\Lambda_k x}$$

$$\Lambda_0 = \alpha, \; 0 < \alpha \leqslant \Lambda_k < \Lambda_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\lim_{k\to\infty} \Lambda_k = \infty, \; \Lambda_k = -\Lambda_k$$

$$|A_k| + |A_{-k}| > 0 \quad (k \neq 0)$$

Analogous to the approximation theory of periodic functions, we get some theorems similar to the Jackson theorem, Bernstein theorem and Zygmund theorem of periodic functions.