

联合最佳 L_p 逼近

史 应 光

(中国科学院计算中心)

一、引 言

在理论问题和实际问题中,常常提出需要用—个函数同时逼近几个函数、甚至是一族函数的问题,即所谓联合逼近的问题.

例如,1934年 Remes ([1],也可参看[2])在研究对有界不连续函数的逼近问题时,证明了该问题等价于对两个函数(分别是上半连续函数和下半连续函数)的联合逼近问题;又如,近年来提出了对函数本身及其各阶导函数的联合逼近问题[3];再如,在实际问题中,被逼近的函数有时是依赖于参数的,而它的参数值不能准确地知道,只是知道其变化的范围,如此也归结为不是逼近一个函数而是逼近一族函数的问题.

联合逼近问题的提法是各种各样的.本文将讨论如下比较常用的联合逼近问题.

设 (X, Σ, μ) 是 σ -有穷测度空间, $L_p = L_p(X, \Sigma, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$) 表示在空间 (X, Σ, μ) 上所有可测且 p 次幂可积的复值函数的全体组成的线性赋范空间 ([4], 41). 其范数定义为

$$\|f\| = \left\{ \int_X |f(x)|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

又设 $f_i \in L_p$ ($i=1, 2, \dots$), $\lambda_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots$), $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$, 且满足条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \|f_i\|^p < \infty. \quad (1.1)$$

令 $K \subset L_p$, 称 $h_0 \in K$ 是 $F = \{f_i\}$ 在 K 中的联合最佳 L_p 逼近, 如果

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \|f_i - h_0\|^p = \inf_{h \in K} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \|f_i - h\|^p. \quad (1.2)$$

第二节将证明当 K 是局部紧闭子集 ([9], 12) 时联合最佳 L_p 逼近的存在性.

第三节将导出任意准凸集上联合最佳 L_1 逼近的特征定理.

第四节将导出任意准凸集上联合最佳 L_p 逼近的特征定理, 这里 $1 < p < \infty$.

在讨论之前, 我们引入下列记号

$$\text{sign } x = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & (x \neq 0), \\ 0, & (x = 0). \end{cases}$$
$$Z(f) \equiv \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

$\operatorname{Re} \alpha$ 表示复数 α 的实数部分.

$\bar{\alpha}$ 表示复数 α 的共轭复数.

同时, 为简便起计, 约定在下面所有出现的符号 Σ 一律表示 $\sum_{i=1}^{\infty}$; 且 $F \equiv \{f_i\}$ 总满足条件 (1.1).

定义 集合 $K \subset L_p$ 称为准凸子集, 如果对任意 $h_1, h_2 \in K$, 都存在一数列 $t_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, $t_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 使

$$t_n h_1 + (1 - t_n) h_2 \in \bar{K} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

这里 $\bar{K}$ 表示 K 之闭包.

我们看到, 准凸集的概念是与集合的拓扑有关的一个概念. 从这个定义看出, 凸集、开集、以及其闭包是凸集的集, 都是准凸集.

二、存在定理

定理 2.1 设 K 是 $L_p (1 \leq p < \infty)$ 的局部紧闭子集, $F \subset L_p$, 则必存在一个函数 $h_0 \in K$, 使 (1.2) 成立.

证 设 $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 K 中的序列, 使

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum \lambda_i \|f_i - h_j\|^p = \inf_{h \in K} \sum \lambda_i \|f_i - h\|^p. \quad (2.1)$$

首先指出, 上式右端为有穷. 事实上, 对任一函数 $h \in K$, 总有*

$$\sum \lambda_i \|f_i - h\|^p \leq \sum \lambda_i (\|f_i\| + \|h\|)^p \leq 2^p (\sum \lambda_i \|f_i\|^p + \|h\|^p) < \infty.$$

因而 (2.1) 右端为有穷. 而对于每一个 j , 有

$$\begin{aligned} 0 \leq \|h_j\|^p &= \sum \lambda_i \|h_j\|^p \leq \sum \lambda_i (\|f_i - h_j\| + \|f_i\|)^p \\ &\leq 2^p (\sum \lambda_i \|f_i - h_j\|^p + \sum \lambda_i \|f_i\|^p). \end{aligned}$$

上式右端括号内第一项是收敛序列的第 j 项, 从而有界. 第二项依假设 (1.1) 也有界. 故 $\{\|h_j\|^p\}$ 有界, 从而 $\{\|h_j\|\}$ 有界. 由 K 之局部紧性, 存在一个在 L_p 的度量下的收敛子列. 不失一般性, 可以假设存在 $h_0 \in K$, 使

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|h_j - h_0\| = 0. \quad (2.2)$$

而

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum \lambda_i \|f_i - h_0\|^p - \inf_{h \in K} \sum \lambda_i \|f_i - h\|^p \\ &= (\sum \lambda_i \|f_i - h_0\|^p - \sum \lambda_i \|f_i - h_j\|^p) + (\sum \lambda_i \|f_i - h_j\|^p - \inf_{h \in K} \sum \lambda_i \|f_i - h\|^p). \end{aligned} \quad (2.3)$$

由 (2.2), 对任何 i 都有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_i - h_j\| = \|f_i - h_0\|.$$

这样, 对每个 i 成立

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_i - h_j\|^p = \|f_i - h_0\|^p.$$

* 对任意数 a, b , 成立不等式

$$|a+b|^p \leq [2 \max(|a|, |b|)]^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p).$$

同时容易看出, 级数 $\sum \lambda_i \|f_i - h_j\|^p$ 关于 j 是一致收敛的, 因而

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum \lambda_i \|f_i - h_j\|^p = \sum \lambda_i \|f_i - h_0\|^p. \quad (2.4)$$

而 (2.3) 式右端第二项由 (2.1), 在 $j \rightarrow \infty$ 时也应趋于零. 从而

$$\sum \lambda_i \|f_i - h_0\|^p = \inf_{h \in K} \sum \lambda_i \|f_i - h\|^p.$$

证毕.

注 注意到 (2.2) 式, (2.4) 式实际上表明泛函 $\Phi_p(h) = \sum \lambda_i \|f_i - h\|^p$ 是连续的.

三、 L_1 逼近的特征定理

引理 3.1 设 $F \subset L_1$, $h \in L_1$, 及实数 t , 则成立

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sum \lambda_i \left[\|f_i + th\| - \|f_i\| - |t| \int_{Z(f_i)} |h| d\mu \right] = \sum \lambda_i \left(\operatorname{Re} \int_X h \overline{\operatorname{sign} f_i} d\mu \right). \quad (3.1)$$

证 [5] 中证明了, 对每个 i 成立

$$\frac{1}{t} \left[\|f_i + th\| - \|f_i\| - |t| \int_{Z(f_i)} |h| d\mu \right] = \int_{X-Z(f_i)} \frac{|f_i + th| - |f_i|}{t} d\mu$$

及

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\|f_i + th\| - \|f_i\| - |t| \int_{Z(f_i)} |h| d\mu \right] = \operatorname{Re} \int_X h \overline{\operatorname{sign} f_i} d\mu. \quad (3.2)$$

但

$$\begin{aligned} \left| \int_{X-Z(f_i)} \frac{|f_i + th| - |f_i|}{t} d\mu \right| &\leq \int_{X-Z(f_i)} \left| \frac{|f_i + th| - |f_i|}{t} \right| d\mu \\ &\leq \int_{X-Z(f_i)} |h| d\mu \leq \int_X |h| d\mu = \|h\|. \end{aligned}$$

因而

$$\sum \lambda_i \left| \int_{X-Z(f_i)} \frac{|f_i + th| - |f_i|}{t} d\mu \right| \leq \sum \lambda_i \|h\| = \|h\|.$$

即级数

$$\frac{1}{t} \sum \lambda_i \left[\|f_i + th\| - \|f_i\| - |t| \int_{Z(f_i)} |h| d\mu \right] = \sum \lambda_i \int_{X-Z(f_i)} \frac{|f_i + th| - |f_i|}{t} d\mu$$

关于 t 一致收敛. 所以考虑到 (3.2), 由函数项级数的逐项求极限定理

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sum \lambda_i \left[\|f_i + th\| - \|f_i\| - |t| \int_{Z(f_i)} |h| d\mu \right] = \sum \lambda_i \left(\operatorname{Re} \int_{X-Z(f_i)} h \overline{\operatorname{sign} f_i} d\mu \right).$$

定理 3.2 使关系式

$$\sum \lambda_i \|f_i - h_0\| \leq \sum \lambda_i \|f_i - (h_0 + ch)\| \quad (3.3)$$

对所有 $c \geq 0$ 都成立的充要条件是

$$\sum \lambda_i \left(\operatorname{Re} \int_X h \overline{\operatorname{sign}(f_i - h_0)} d\mu \right) \leq \sum \lambda_i \int_{Z(f_i - h_0)} |h| d\mu. \quad (3.4)$$

证 充分性. 设 $0 \leq t \leq 1$, 由三角不等式

$$\|f + th\| = \|t(f + h) + (1-t)f\| \leq t\|f + h\| + (1-t)\|f\|,$$

或写成

$$\|f + th\| - \|f\| \leq t[\|f + h\| - \|f\|].$$

将 f 换成 $f_i - h_0$, h 换成 $-ch$, 两边同乘以 λ_i , 并对 i 求和, 得到

$$\sum \lambda_i [\|f_i - h_0 - tch\| - \|f_i - h_0\|] \leq t \sum \lambda_i [\|f_i - h_0 - ch\| - \|f_i - h_0\|], \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (3.5)$$

再在(3.1)中将 f_i 换成 $f_i - h_0$, h 换成 $-ch (c \geq 0)$, 同时取单侧极限, 得到

$$\begin{aligned} & c \sum \lambda_i \int_{Z(f_i - h_0)} |h| d\mu - c \sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h \overline{\operatorname{sign}(f_i - h_0)} d\mu \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \sum \lambda_i [\|f_i - h_0 - tch\| - \|f_i - h_0\|]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

而由(3.5)得

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \sum \lambda_i [\|f_i - h_0 - tch\| - \|f_i - h_0\|] \leq \sum \lambda_i [\|f_i - h_0 - ch\| - \|f_i - h_0\|]. \quad (3.7)$$

因此, 若(3.4)成立, 由 $c \geq 0$, 则(3.6)式的左端是非负的, 从而(3.7)式的右端也应非负. 此即(3.3)式成立.

必要性. 若(3.4)不成立, 这时在(3.6)中令 $c=1$ 得到

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \sum \lambda_i [\|f_i - h_0 - th\| - \|f_i - h_0\|] \\ &= \sum \lambda_i \int_{Z(f_i - h_0)} |h| d\mu - \sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h \overline{\operatorname{sign}(f_i - h_0)} d\mu < 0. \end{aligned}$$

从而对充分小的正数 t 有

$$\frac{1}{t} \sum \lambda_i [\|f_i - h_0 - th\| - \|f_i - h_0\|] < 0,$$

或

$$\sum \lambda_i \|f_i - h_0 - th\| < \sum \lambda_i \|f_i - h_0\|.$$

这与假设(3.3)矛盾.

证毕.

定理 3.2 是证明联合最佳 L_1 逼近的特征定理的有力工具. 下面就是本节的主要结果.

定理 3.3 设 K 是 L_1 中的准凸子集, $F \subset L_1$, $h_0 \in K$. 则 h_0 是 F 在 K 中的联合最佳 L_1 逼近的充要条件是

$$\sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X (h - h_0) \overline{\operatorname{sign}(f_i - h_0)} d\mu \leq \sum \lambda_i \int_{Z(f_i - h_0)} |h - h_0| d\mu \quad (3.8)$$

对所有 $h \in K$ 都成立.

证 充分性. 对任何 $h \in K$, 应用定理 3.2, 由(3.8)得出, 不等式

$$\sum \lambda_i \|f_i - h_0\| \leq \sum \lambda_i \|(f_i - h_0) - c(h - h_0)\|$$

对所有 $c \geq 0$ 都成立. 特别当 $c=1$ 时, 将得出不等式

$$\sum \lambda_i \|f_i - h_0\| \leq \sum \lambda_i \|f_i - h\|$$

对任何 $h \in K$ 都成立.

必要性. 当 $\lambda > 0$ 时, 对每个 i , 注意到 $Z(f_i - h_0)$ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \int_X (h - h_0) \overline{\operatorname{sign}[f_i - h_0 - \lambda(h - h_0)]} d\mu \\ &= \operatorname{Re} \int_{X - Z(f_i - h_0)} (h - h_0) \overline{\operatorname{sign}[f_i - h_0 - \lambda(h - h_0)]} d\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{Re} \int_{Z(f_i - h_0)} (h - h_0) \overline{\operatorname{sign}[f_i - h_0 - \lambda(h - h_0)]} d\mu \\
& = \operatorname{Re} \int_{X - Z(f_i - h_0)} (h - h_0) \overline{\operatorname{sign}[f_i - h_0 - \lambda(h - h_0)]} d\mu \\
& \quad - \operatorname{Re} \int_{Z(f_i - h_0)} (h - h_0) \overline{\operatorname{sign}(h - h_0)} d\mu \\
& = \operatorname{Re} \int_{X - Z(f_i - h_0)} (h - h_0) \overline{\operatorname{sign}[f_i - h_0 - \lambda(h - h_0)]} d\mu \\
& \quad - \int_{Z(f_i - h_0)} |h - h_0| d\mu.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
& \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \operatorname{Re} \int_X (h - h_0) \overline{\operatorname{sign}[f_i - h_0 - \lambda(h - h_0)]} d\mu \\
& = \operatorname{Re} \int_{X - Z(f_i - h_0)} (h - h_0) \overline{\operatorname{sign}(f_i - h_0)} d\mu - \int_{Z(f_i - h_0)} |h - h_0| d\mu.
\end{aligned}$$

但显然级数 $\sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X (h - h_0) \overline{\operatorname{sign}[f_i - h_0 - \lambda(h - h_0)]} d\mu$

关于 $\lambda \geq 0$ 是一致收敛的, 所以

$$\begin{aligned}
& \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X (h - h_0) \overline{\operatorname{sign}[f_i - h_0 - \lambda(h - h_0)]} d\mu \\
& = \sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_{X - Z(f_i - h_0)} (h - h_0) \overline{\operatorname{sign}(f_i - h_0)} d\mu - \sum \lambda_i \int_{Z(f_i - h_0)} |h - h_0| d\mu. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

这样, 若 (3.8) 对某个 $h \in K$ 不成立, 即

$$\sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X (h - h_0) \overline{\operatorname{sign}(f_i - h_0)} d\mu > \sum \lambda_i \int_{Z(f_i - h_0)} |h - h_0| d\mu. \quad (3.10)$$

而由 $Z(f_i - h_0)$ 的定义, 上式左端项应等于 (3.9) 式右端的第一项. 于是 (3.9) 式的右端应大于零. 从而当 $\lambda > 0$ 充分小时, 特别当 $\lambda < 1$ 时, 由 (3.9) 有

$$\sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X (h - h_0) \overline{\operatorname{sign}[f_i - h_0 - \lambda(h - h_0)]} d\mu > 0.$$

对这样的 λ , 进一步可得

$$\begin{aligned}
\sum \lambda_i \|f_i - h_0\| & \geq \sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X (f_i - h_0) \overline{\operatorname{sign}[f_i - h_0 - \lambda(h - h_0)]} d\mu \\
& = \sum \lambda_i \int_X |f_i - h_0 - \lambda(h - h_0)| d\mu \\
& \quad + \lambda \sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X (h - h_0) \overline{\operatorname{sign}[f_i - h_0 - \lambda(h - h_0)]} d\mu \\
& > \sum \lambda_i \int_X |f_i - h_0 - \lambda(h - h_0)| d\mu \\
& = \sum \lambda_i \|f_i - h_0 - \lambda(h - h_0)\|.
\end{aligned}$$

此即只要 $\lambda > 0$ 充分小, 就有

$$\sum \lambda_i \|f_i + h_0 - \lambda(h - h_0)\| < \sum \lambda_i \|f_i - h_0\|.$$

注意到 K 之准凸性, 存在 $\lambda^* > 0$ 满足上式且同时有

$$h_1 \equiv h_0 + \lambda^*(h - h_0) = \lambda^*h + (1 - \lambda^*)h_0 \in \bar{K}.$$

再考虑到泛函 $\Phi_1(h) = \sum \lambda_i \|f_i - h\|$ 的连续性 (第二节末尾的注), 存在 $h_2 \in K$ 使 $\|h_2 - h_1\|$

充分小, 从而 $\Phi_1(h_2) < \Phi_1(h_0)$; 此即

$$\sum \lambda_i \|f_i - h_2\| < \sum \lambda_i \|f_i - h_0\|.$$

这就违反了 h_0 是 F 在 K 中的联合最佳 L_1 逼近的假定.

证毕.

由定理 3.3 容易推出当常用的 K 为 L_1 的子空间时的特征定理.

定理 3.4 设 K 是 L_1 中的子空间, $F \subset L_1$, $h_0 \in K$. 则 h_0 是 F 在 K 中的联合最佳 L_1 逼近的充要条件是

$$\left| \sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h \overline{\operatorname{sign}(f_i - h_0)} d\mu \right| \leq \sum \lambda_i \int_{Z(f_i - h_0)} |h| d\mu \quad (3.11)$$

对所有 $h \in K$ 都成立.

证 在 K 是子空间的情形, (3.8) 对所有 $h \in K$ 都成立这一条件等价于

$$\sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h \overline{\operatorname{sign}(f_i - h_0)} d\mu \leq \sum \lambda_i \int_{Z(f_i - h_0)} |h| d\mu$$

对所有 $h \in K$ 都成立. 但当 $h \in K$ 时, 必有 $-h \in K$. 从而上面的条件又等价于 (3.11) 对所有 $h \in K$ 都成立. 证毕.

当 $L_1 \equiv L_1(E)$ 表示实轴上 Lebesgue 可测紧子集 E 上 Lebesgue 可积实值函数空间, 且当 K 是次数不超过 n 的实多项式集合 (是局部紧的) 时, 令

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \frac{1}{m}, \lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \dots = 0,$$

存在定理 2.1 (当 $p=1$ 时) 和特征定理 3.4 即是 Carroll 和 McLaughlin 在 [6] 中证明的定理 1 和定理 2.

四、 L_p 逼近的特征定理

引理 4.1 设 $F \subset L_p$, $h \in L_p$ ($1 < p < \infty$) 满足条件

$$\sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h |f_i|^{p-1} \overline{\operatorname{sign} f_i} d\mu > 0,$$

则存在 $\lambda_0 > 0$, 使当 $0 < \lambda \leq \lambda_0$ 时成立

$$\sum \lambda_i \|f_i - \lambda h\|^p < \sum \lambda_i \|f_i\|^p. \quad (4.1)$$

证 我们首先指出, 对每个 i , 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \operatorname{Re} \langle h |f_i - \lambda h|^{p-1} \overline{\operatorname{sign}(f_i - \lambda h)} \rangle = \operatorname{Re} \langle h |f_i|^{p-1} \overline{\operatorname{sign} f_i} \rangle$$

在 X 上几乎处处成立. 由控制收敛定理 ([4], 640)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \operatorname{Re} \int_X h |f_i - \lambda h|^{p-1} \overline{\operatorname{sign}(f_i - \lambda h)} d\mu = \operatorname{Re} \int_X h |f_i|^{p-1} \overline{\operatorname{sign} f_i} d\mu.$$

但当 $|\lambda| \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h |f_i - \lambda h|^{p-1} \overline{\operatorname{sign}(f_i - \lambda h)} d\mu &\leq \sum \lambda_i \int_X |h| \cdot |f_i - \lambda h|^{p-1} d\mu \\ &\leq 2^{p-1} \left(\sum \lambda_i \int_X |h| \cdot |f_i|^{p-1} d\mu + \|h\|^p \right). \end{aligned}$$

令 $q=1/(1-\frac{1}{p})$, 由 Hölder 不等式 ([4], 42)

$$\begin{aligned}\sum \lambda_i \int_X |h| \cdot |f_i|^{p-1} d\mu &\leq \sum \lambda_i \left\{ \int_X |h|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_X |f_i|^{(p-1)q} d\mu \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= \sum \lambda_i \|h\| \cdot \|f_i\|^{\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

再利用级数的 Hölder 不等式, 并考虑到 $\sum \lambda_i = 1$, 有

$$\begin{aligned}\sum \lambda_i \|h\| \cdot \|f_i\|^{\frac{p}{q}} &= \sum (\lambda_i^{\frac{1}{p}} \|h\|) (\lambda_i^{\frac{1}{q}} \|f_i\|^{\frac{p}{q}}) \\ &\leq \left\{ \sum (\lambda_i^{\frac{1}{p}} \|h\|)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum (\lambda_i^{\frac{1}{q}} \|f_i\|^{\frac{p}{q}})^q \right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{ \sum \lambda_i \|h\|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum \lambda_i \|f_i\|^p \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= \|h\| \left\{ \sum \lambda_i \|f_i\|^p \right\}^{\frac{1}{q}} < \infty.\end{aligned}$$

从而当 $|\lambda| \leq 1$ 时级数

$$\sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h |f_i - \lambda h|^{p-1} \overline{\operatorname{sign}(f_i - \lambda h)} d\mu$$

关于 λ 一致收敛.

故

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h |f_i - \lambda h|^{p-1} \overline{\operatorname{sign}(f_i - \lambda h)} d\mu \\ = \sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h |f_i|^{p-1} \overline{\operatorname{sign} f_i} d\mu > 0.\end{aligned}$$

所以存在 $\lambda_0 > 0$, 使当 $0 < \lambda \leq \lambda_0$ 时有

$$\sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h |f_i - \lambda h|^{p-1} \overline{\operatorname{sign}(f_i - \lambda h)} d\mu > 0.$$

这时

$$\begin{aligned}\sum \lambda_i \|f_i - \lambda h\|^p &< \sum \lambda_i \|f_i - \lambda h\|^p + \lambda \sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h |f_i - \lambda h|^{p-1} \overline{\operatorname{sign}(f_i - \lambda h)} d\mu \\ &= \operatorname{Re} \sum \lambda_i \int_X |f_i - \lambda h|^{p-1} [|f_i - \lambda h| + \lambda h \overline{\operatorname{sign}(f_i - \lambda h)}] d\mu \\ &= \operatorname{Re} \sum \lambda_i \int_X |f_i - \lambda h|^{p-1} f_i \overline{\operatorname{sign}(f_i - \lambda h)} d\mu \\ &\leq \sum \lambda_i \int_X |f_i - \lambda h|^{p-1} |f_i| d\mu.\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\sum \lambda_i \int_X |f_i - \lambda h|^{p-1} |f_i| d\mu &\leq \sum \lambda_i \left\{ \int_X |f_i - \lambda h|^{(p-1)q} d\mu \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_X |f_i|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum \lambda_i \|f_i - \lambda h\|^{\frac{p}{q}} \|f_i\|.\end{aligned}$$

与前面一样, 再利用级数的 Hölder 不等式, 可以得到

$$\begin{aligned}\sum \lambda_i \|f_i - \lambda h\|^p &< \sum \lambda_i \|f_i - \lambda h\|^{\frac{p}{q}} \|f_i\| \leq \left\{ \sum \lambda_i \|f_i - \lambda h\|^p \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum \lambda_i \|f_i\|^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \\ \text{或} \quad \left\{ \sum \lambda_i \|f_i - \lambda h\|^p \right\}^{\frac{1}{p}} &< \left\{ \sum \lambda_i \|f_i\|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

它等价于 (4.1).

证毕.

定理 4.2 设 $F \subset L_p$, $h \in L_p$ ($1 < p < \infty$), 则

$$\sum \lambda_i \|f_i\|^p \leq \sum \lambda_i \|f_i - \lambda h\|^p \quad (4.2)$$

对所有 $\lambda \geq 0$ 都成立的充要条件是

$$\sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h |f_i|^{p-1} \overline{\operatorname{sign} f_i} d\mu \leq 0. \quad (4.3)$$

证 充分性. 若(4.3)成立, 则对 $\lambda \geq 0$, 首先有

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i \|f_i\|^p &\leq \sum \lambda_i \|f_i\|^p - \lambda \sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h |f_i|^{p-1} \overline{\operatorname{sign} f_i} d\mu \\ &= \operatorname{Re} \sum \lambda_i \int_X |f_i|^{p-1} [|f_i| - \lambda h \overline{\operatorname{sign} f_i}] d\mu \\ &= \operatorname{Re} \sum \lambda_i \int_X |f_i|^{p-1} (f_i - \lambda h) \overline{\operatorname{sign} f_i} d\mu \\ &\leq \sum \lambda_i \int_X |f_i|^{p-1} |f_i - \lambda h| d\mu, \end{aligned}$$

与上面的引理 4.1 的证明一样, 两次利用 Hölder 不等式, 最后得到

$$\sum \lambda_i \|f_i\|^p \leq \sum \lambda_i \|f_i - \lambda h\|^p.$$

必要性. 若(4.3)不成立, 即

$$\sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h |f_i|^{p-1} \overline{\operatorname{sign} f_i} d\mu > 0.$$

由引理 4.1, 存在正数 λ , 使

$$\sum \lambda_i \|f_i - \lambda h\|^p < \sum \lambda_i \|f_i\|^p.$$

这与(4.2)相矛盾.

证毕.

定理 4.3 设 $F \subset L_p$, $h \in L_p$ ($1 < p < \infty$), 则 (4.2) 对所有 λ (当 L_p 是实函数空间时 λ 为实数, 当 L_p 是复函数空间时 λ 为复数) 都成立的充要条件是

$$\sum \lambda_i \int_X h |f_i|^{p-1} \overline{\operatorname{sign} f_i} d\mu = 0. \quad (4.4)$$

证 我们仅对 L_p 是复函数空间的情形给出证明, 另一情形的证明是类似的.

(4.2) 式对所有 λ 都成立当且仅当 (4.2) 式对 $\lambda = \pm t$ 及 $\lambda = \pm jt$ (其中 t 为任意非负数而 $j = \sqrt{-1}$) 都成立. 由定理 4.2, 这分别得到等价条件

$$\sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X [\pm h |f_i|^{p-1} \overline{\operatorname{sign} f_i}] d\mu \leq 0$$

及

$$\sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X [\pm jh |f_i|^{p-1} \overline{\operatorname{sign} f_i}] d\mu \leq 0.$$

这四个式子一起又等价于 (4.4) 式.

证毕.

现在我们来证明本节的主要结果.

定理 4.4 若 K 是 L_p ($1 < p < \infty$) 的准凸子集, $F \subset L_p$, $h_0 \in K$, 则 h_0 是 F 在 K 中的联合最佳 L_p 逼近的充要条件是

$$\sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X (h - h_0) |f_i - h_0|^{p-1} \overline{\operatorname{sign}(f_i - h_0)} d\mu \leq 0 \quad (4.5)$$

对所有 $h \in K$ 都成立.

证 充分性. 对任何 $h \in K$, 应用定理 4.2, 得出不等式

$$\sum \lambda_i \|f_i - h_0\|^p \leq \sum \lambda_i \|(f_i - h_0) - \lambda(h - h_0)\|^p$$

对所有 $\lambda \geq 0$ 都成立, 特别取 $\lambda = 1$, 将得出

$$\sum \lambda_i \|f_i - h_0\|^p \leq \sum \lambda_i \|f_i - h\|^p$$

对任何 $h \in K$ 都成立.

必要性. 若 (4.5) 对某一个 $h \in K$ 不成立, 即

$$\sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X (h - h_0) |f_i - h_0|^{p-1} \overline{\operatorname{sign}(f_i - h_0)} d\mu > 0.$$

由引理 4.1, 存在充分小的正数 λ , 特别可以取 $\lambda \leq 1$, 使

$$\sum \lambda_i \| (f_i - h_0) - \lambda(h - h_0) \|^p < \sum \lambda_i \| f_i - h_0 \|^p,$$

或写成

$$\sum \lambda_i \| f_i - [\lambda h + (1 - \lambda) h_0] \|^p < \sum \lambda_i \| f_i - h_0 \|^p.$$

考虑到 K 之准凸性及泛函 $\Phi_p(h) = \sum \lambda_i \| f_i - h \|^p$ 之连续性, 与定理 3.3 的证明类似, 可知存在 $h_2 \in K$, 使

$$\sum \lambda_i \| f_i - h_2 \|^p < \sum \lambda_i \| f_i - h_0 \|^p.$$

从而与 h_0 是 F 在 K 中的联合最佳 L_p 逼近的假设发生矛盾.

证毕.

由定理 4.4 可以推出常用的两个特殊形式的定理.

定理 4.5 设 K 是 $L_p (1 < p < \infty)$ 的子空间, $F \subset L_p$, $h_0 \in K$. 则 h_0 是 F 在 K 中的联合最佳 L_p 逼近的充要条件是

$$\sum \lambda_i \int_X h |f_i - h_0|^{p-1} \overline{\operatorname{sign}(f_i - h_0)} d\mu = 0 \quad (4.6)$$

对所有 $h \in K$ 都成立.

证 充分性. 若对所有 $h \in K$ 满足 (4.6), 这样, 对 $h - h_0 \in K$ 也应满足 (4.6), 从而也就满足 (4.5). 因而按定理 4.4, h_0 是联合最佳逼近.

必要性. 由 h_0 是联合最佳逼近, 考虑到子空间也是凸集, 从而 (4.5) 应对所有 $h \in K$ 都成立. 由于 K 是子空间, 因而有

$$h_0 \pm h \in K, h_0 \pm jh \in K, (j = \sqrt{-1}).$$

将这四个函数分别代替 (4.5) 中的 h , 得到的这四个式子, 将推得 (4.6) 式.

证毕.

如果 K 是 L_p 中的凸锥, 即满足条件

$$K + K \subset K, \lambda K \subset K \quad (\lambda \geq 0),$$

显然凸锥也是凸集, 这时成立下面的特征定理.

定理 4.6 设 K 是 $L_p (1 < p < \infty)$ 中的凸锥, $F \subset L_p$, $h_0 \in K$, 则 h_0 是 F 在 K 中的联合最佳 L_p 逼近的充要条件是满足

$$(1) \quad \sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h |f_i - h_0|^{p-1} \overline{\operatorname{sign}(f_i - h_0)} d\mu \leq 0$$

对所有 $h \in K$ 都成立;

$$(2) \quad \sum \lambda_i \operatorname{Re} \int_X h_0 |f_i - h_0|^{p-1} \overline{\operatorname{sign}(f_i - h_0)} d\mu = 0.$$

证 充分性是显然的, 因为满足条件 (1) 与 (2) 者必满足 (4.5), 从而由定理 4.4 知, h_0 是联合最佳逼近.

必要性. 若 h_0 是联合最佳逼近, 由定理 4.4 知, (4.5) 应对所有 $h \in K$ 都成立. 特别取 $h = 0$ 与 $2h_0$, 由 K 是凸锥, 它们都应当属于 K . 从而满足 (4.5) 式. 由此得到 (2). 进而由 (4.5) 与 (2) 就推得 (1).

证毕.

当 $\lambda_1=1, \lambda_2=\lambda_3=\dots=0$ 时, 在第三节和第四节所得诸定理之特殊形式, 分别就是在 [7] 和 [8] 中给出的主要结果.

参 考 文 献

- [1] E. Remes, Sur la détermination des polynomes d'approximation de degré donné. *Comm. Soc. Math. Kharkoff*, (4), **10** (1934), 41—63.
- [2] P. J. Laurent & Pham-Dinh-Tuan, Global approximation of a compact set by elements of a convex set in a normed space, *Numer. Math.*, **15**: 2 (1970), 137—150.
- [3] B. L. Chalmers, Uniqueness of best approximation of a function and its derivatives, *J. Approx. Theory*, **7**: 3 (1973), 213—225.
- [4] 关肇直, 泛函分析讲义, 高等教育出版社, 北京, (1958).
- [5] B. R. Kripke & T. J. Rivlin, Approximation in the metric of $L^1(X, \mu)$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **119**: 1 (1965), 101—122.
- [6] M. P. Carroll & H. W. McLaughlin, L_1 approximation of vector-valued functions, *J. Approx. Theory*, **7**: 2 (1973), 122—131.
- [7] 史应光, 在空间 $L(X, \Sigma, \mu)$ 中的最佳逼近的特征, *计算数学*, **2**: 3 (1980), 197—203.
- [8] R. B. Holmes, A course on optimization and best approximation, *Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg. New York*, (1972), 77—78.
- [9] 李文清, 泛函分析, 科学出版社, 北京, (1960).

BEST SIMULTANEOUS L_p APPROXIMATION

SHI YINGGUANG

(The Computing Centre, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper we discuss the existence of best simultaneous L_p approximation and give the characterization theorems of best simultaneous L_p approximation using the elements of an arbitrary quasiconvex set K in the space $L_p(X, \Sigma, \mu)$. A set $K \subset L_p(X, \Sigma, \mu)$ is called quasiconvex if for arbitrary elements $h_1, h_2 \in K$ there exists a sequence $t_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$), $t_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) such that

$$t_n h_1 + (1 - t_n) h_2 \in \bar{K} \quad (n=1, 2, \dots),$$

where $\bar{K}$ denotes a closure of K .