数 学 年 刊
1 (2) 1980

有相同击中分布的可列马尔可夫过程

墨 文 川
（山东大学）

文献[2]对满足文献[1]条件(A)的 Hunt 过程，证明了如下的定理：

设 $x(t)$和 $x^*(t)$ 是两个 Hunt 过程，则它们有相同的击中分布的充分必要条件是：存在一个连续的随机时间替换 $z(t)$，使得 $x(z(t))$ 和 $x^*(t)$ 有相同的转移函数.

本文对有保守 Q 矩阵的可列状态的马尔可夫过程（一般说，它们是非 Hunt 过程），证明了相同的定理，并且找到了易于检验的另一组使两过程有相同击中分布的充分必要条件.

证明的方法大体是：首先对最小过程，然后对一阶过程，最后，用文献[5, 6]中得到的一种强极限定理，对一般情况进行证明.

作者在写作本文时，得到侯振挺教授的鼓励，他并具体提出了改进意见，谨致谢意.

§1 约 定

设 $X=\{x(t,\ \omega),\ t<\sigma(\omega)\}$ 是定义在完备概率空间$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$上的齐次可列马尔可夫过程，状态空间 $I=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$，其转移函数为 $\{P_{ij}(t),\ i,\ j\in I,\ t\geqslant 0\}$. 我们假定它是标准的，即

$$\lim_{t\downarrow 0} P_{ij}(t)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j.\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

众所周知，$P_{ij}(t)$ 在零点的右导数存在

$$P'_{ij}(0^+)\equiv q_{ij}$$

且 $0\leqslant q_{ij}<+\infty\ (i\neq j)$，$0\leqslant q_i\equiv -q_{ii}\leqslant +\infty$，$\sum_{j\in I} q_{ij}\leqslant 0$，$(i\in I)$. 本文通篇规定 $0\leqslant q_i<+\infty\ (i\in I)$，同时，$\sum_{j\in I} q_{ij}=0\ (i\in I)$，即矩阵 $Q=(q_{ij})$是保守的. 为简便起见，本文只对 $0<q_i<\infty$ 证明结论，对 $q_i=0$ 的情况，只在全文结束时作一短注.

由文献[3]知，X 可以有下面几条性质：

1. 样本函数在 I 上右连续.
2. 过程可分，Borel 可测，有强马氏性. 本文有些未经说明的术语，均可见[3, 5, 6]等文献.

设 $E\subset I$，过程 X 首次到达集 E 的时间

本文 1978 年 12 月 8 日收到.

$$T_E=\begin{cases}\inf\ \{t: x(t)\in E\}, & \text{若这样的 } t \text{ 存在.}\\ \sigma, & \text{反之.}\end{cases}$$

现设 $X^*=\{x^*(t),\ t<\sigma^*(\omega)\}$ 是定义在同一状态空间 I 上的可列马尔可夫过程，并具有前述的性质. 自然，允许 X^* 定义在不同的概率空间$(\Omega^*, \mathscr{F}^*, P^*)$上. 对 $E\subset I$，可以类似定义 X^* 首次到达集 E 的时间 T_E^*. 称两个过程 X 和 X^* 有相同的击中分布，是指对任意的 $E\subset I$ 和一切的 $i, j\in I$，都有

$$P_i\{x(T_E)=j\}=P_i^*\{x^*(T_E^*)=j\}. \tag{1}$$

这里 $P_i(A)=P(A|x(0)=i)$, $P_i^*(A^*)=P_i^*(A^*|x^*(0)=i)$. 以后，为书写的便利，我们把凡在 P_i 上已有 $*$ 的情形，其内部的 x^* 等等的 $*$ 一概略去. 这不会引起混淆. 例如，(1) 式可简写成

$$P_i\{x(T_E)=j\}=P_i^*\{x(T_E)=j\}. \tag{2}$$

称 $\tau(t, \omega)$为过程 X 的随机时间替换，如果对每个固定的 ω, $\tau(0, \omega)=0$, $\tau(t, \omega)$ 是 t 的不减函数；对每个固定的 t, $\tau(t, \omega)$是过程 X 的可选时(随机时间).

如果对每个固定的 ω, $\tau(t, \omega)$ 还是 t 的严格递增的连续函数，则称它为连续随机时间替换.

§2 最小过程

最小过程的定义可见[3].

定理 1 为使两个齐次可列马尔可夫过程 $X=\{x(t),\ t<\sigma\}$ 和 $X^*=\{x^*(t),\ t<\sigma^*\}$ 有相同的击中分布，只需(1)式对任意有限集 E 成立.

证 令 E 为 I 的任一无限子集，可取单调递增的有限集列 E_n，使得 $E=\bigcup\limits_n E_n$. 显然有

$$T_{E_n}\downarrow T_E.$$

由过程的右连续性，对 $j\in E$

$$P_i\{x(T_E)=j\}=\lim_{n\to\infty}P_i\{x(T_{E_n})=j\}$$

立得结论.

推论 若两过程的击中分布相同，则它们的嵌入矩阵相同.

证 对任意的 $i\in I$, $P_i\{T_{(i)^c}=\tau_1\}=1$，这里 τ_1 表示过程 X 的第一个跳跃点，故嵌入矩阵的

$$r_{ij}=P_i\{x(\tau_1)=j\}=P_i\{x(T_{(i)^c})=j\},$$

因 $P_i^*\{x(T_{(i)^c})=j\}=P_i\{x(T_{(i)^c})=j\}$，所以立得结论. 也就是对一切的 $i, j\in I$，都有

$$\frac{q_{ij}}{q_i}=\frac{q_{ij}^*}{q_i^*}. \tag{3}$$

定理 2 两个最小过程的击中分布相同的充分必要条件是它们的嵌入矩阵相同.

证 必要性已如前证，现证充分性. 以 $\{\bar{x}(t),\ t<\zeta_1\}$ 表最小过程，这里 ζ_1 是过程的

首次无穷. 令 $E\in I$, E 有限, 设 $j\in E$, τ_n 是 X 的第 n 次跳跃, $\tau_0=0$, 则

$$\begin{aligned}P_i\{\bar{x}(T_E)=j\}&=\sum_{n=0}^{\infty}P_i\{T_E=\tau_n,\ \bar{x}(\tau_n)=j\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}P_i\{x(\tau_k)\notin E,\ \text{一切 } k<n,\ \bar{x}(\tau_n)=j\}.\end{aligned}$$

此式右端完全由嵌入矩阵决定. 从而, 若(3)式成立, 再由定理 1, 即得结论.

定理 3 设 $\{\bar{x}(t),\ t<\zeta_1\}$ 和 $\{\bar{x}^*(t),\ t<\zeta_1^*\}$ 是两个最小过程, 则它们有相同击中分布的充要条件是存在一个连续的随机时间替换 $\tau(t)$, 使得 $y(t)=\bar{x}(\tau(t))$ 与 $\bar{x}^*(t)$ 有相同的转移函数.

证　据 [2], 只需证最小过程是 Hunt 过程, 即几乎所有的样本函数右连续, 有左极限, 满足强马氏性和拟左连续性. 除最后一点外, 其他皆显然.

称过程具拟左连续性, 是指对任意递增的可选时列, 概率为 1, 过程在其上取值的极限等于在它们的极限上所取的值.

[4] 中定理 6、7, 给出一个使过程满足拟左连续性的充分条件, 易见, 对此处也是适合的. 我们希望证明最小过程满足这个充分条件.

令 $\mathscr{F}=\{E_n,\ E_n$ 是单增的有限集, $\bigcup_n E_n=I\}$, 则最小过程必是 $\mathscr{F}$ 有界的. 即对每个 ω 和任意常数 $T<\zeta_1(\omega)$, 存在 $\Gamma\in\mathscr{F}$, 使得 $\bar{x}_t(\omega)\in\Gamma$ 对一切 $t\in[0,\ T]$ 成立.

事实上, 由于过程的样本函数是阶梯函数, 跳跃点的极限是 ζ_1, 因此在 $[0,\ T]$ 内, 至多包含有限多个跳跃点, 即 $(\bar{x}_t(\omega),\ t\in[0,\ T])$ 占据 I 中的一个有限集, 它必然被 $\mathscr{F}$ 中某集所包含.

其次, 最小过程的转移函数 $\bar{P}_{ij}(t)$ 满足条件

$$M(E_n):\ \lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant\delta\\ i\in E_n}}\sum_{j\neq i}\bar{P}_{ij}(s)=0,\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

由于在这里 $E_n\in\mathscr{F}$ 都是有限集, 所以只要证明对每个 i, 有

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{0\leqslant s\leqslant\delta}\sum_{j\neq i}\bar{P}_{ij}(s)=0.$$

因
$$\sum_{j\neq i}\bar{P}_{ij}(s)\leqslant 1-\bar{P}_{ii}(s)\leqslant 1-e^{-q_is},$$

故
$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{0\leqslant s\leqslant\delta}\sum_{j\neq i}\bar{P}_{ij}(s)\leqslant\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{0\leqslant s\leqslant\delta}[1-e^{-q_is}]\leqslant\lim_{\delta\downarrow 0}(1-e^{-q_i\delta})=0$$

$M(E_n)$ 和 $\mathscr{F}$ 有界, 保证了最小过程的拟左连续性, 定理得证.

若对最小过程的嵌入马氏链构造 Martin 边界, 则由定理 2, 若两个最小过程有相同的击中分布, 则有相同的 Martin 边界, 关于嵌入链的非负过分函数族也相同.

为叙述简单起见, 我们假设有 $C\in I$, 使得对一切 $j\in I$, $P_c\{T_{(j)}<\zeta_1\}>0$, 则 Martin 核可以定义为

$$K_c(i,\ j)=\frac{P_i\{T_{(j)}<\zeta_1\}}{P_c\{T_{(j)}<\zeta_1\}}.$$

所以, $K_c(i,\ j)=K^*(i,\ j)$. 设共同的 Martin 边界是 B.

定理 4 若最小过程 X 与 $\bar{X}^*$ 有相同的击中分布, 则对任何 B 的可测子集 A,

$$P_i\{\lim_{t\uparrow\zeta_1}\bar{x}(t)\in A\}=P_i^*\{\lim_{t\uparrow\zeta_1}\bar{x}(t)\in A\}\equiv h(i,\ A).\tag{4}$$

证 习知，对 $\bar{x}(t)$ 的任意(关于嵌入链的)非负过分函数 u，可以定义

$$u(i, A)=\lim_{n\to\infty}E_i\{u(x(T_{[G_n]}))\}. \tag{5}$$

这里的 G_n 是包含 A 的开集列，它们的闭包递降趋于 A、$[G_n]=G_n\cap I$，$T_{[G_n]}$ 为首次到达 $[G_n]$ 的时间. 若 $\bar{x}^*(t)$ 与 $\bar{x}(t)$ 有相同的击中分布，u 同时为 $\bar{x}^*(t)$ 的过分函数，注意到(5)式右端完全由嵌入矩阵决定，所以二过程的 $u(i, A)$ 相同. 取 u 是 I 的示性函数，得到(4)式，定理得证.

§3 一阶过程

一阶过程的定义见 [6]，设 ζ_1 是过程的第一飞跃点，则对一阶过程 $X=\{x(t), t<\sigma(\omega)\}$，

$$\{\omega: x(\zeta_1)=+\infty\}=\phi$$

且对任意的 $t<\sigma$，在 $[0, t]$ 内至多有限个飞跃点. 我们注意，对一般满足 §1 约定的过程，ζ_1 总是存在的.

令有限集 $D\subset I$，β 表示在 ζ_1 之后首次到达集 D 的时间. 即

$$\beta=\begin{cases}\inf\{t: t\geqslant\zeta_1, x(t)\in D\}, & \text{若这样的 } t \text{ 存在,}\\ +\infty, & \text{反之.}\end{cases}$$

引理 1 若过程 X 和 X^* 的击中分布相同，则有

$$P_i\{x(\beta)=j\}=P_i^*\{x(\beta)=j\}. \tag{6}$$

证 $j\notin D$ 平凡. 证 $j\in D$ 的情况，记最小过程的嵌入链为 $\{x_m, m\geqslant 0\}$，并令

$$A_m=\{x_n\notin D, n\geqslant m\},$$

则因过程保守，当 $n\uparrow\infty$ 有 $x_n\to\infty$，$P(A_m)\uparrow 1$. 故

$$\begin{aligned}P_i\{x(\beta)=j\}&=\lim_{m\to\infty}P_i\{A_m, x(\beta)=j\}\\&=\lim_{m\to\infty}E_i\{P_{x_m}(x_n\notin D, n\geqslant 0, x(\beta)=j)\}\\&=\lim_{m\to\infty}\sum_{k\notin D}r_{ik}^{(m)}P_k\{x_n\notin D, n\geqslant 0, x(\beta)=j)\}\\&=\lim_{m\to\infty}\sum_{k\notin D}r_{ik}^{(m)}P_k\{T_D\geqslant\zeta_1, x(T_D)=j\}.\end{aligned} \tag{7}$$

这里 $r_{ik}^{(n)}$ 为嵌入链的 n 阶转移概率，由定理 1 的推论，有

$$r_{ik}^{(n)}=r_{ik}^{(n)*} \tag{8}$$

由定理 2. 两个最小过程的击中分布相同，然而

$$P_i\{\bar{x}(\bar{T}_D)=j\}=P_i\{x(T_D)=j, T_D<\zeta_1\}.$$

从而 $$P_i\{x(T_D)=j, T_D\geqslant\zeta_1\}=P_i^*\{x(T_D)=j, T_D\geqslant\zeta_1\}.$$

综合上式与(8)式，由(7)式引理得证.

定理 5 设 X 和 X^* 是一阶过程，则 X^* 与 X 有相同击中分布的充分必要条件是二者有相同的嵌入矩阵且 $x(\zeta_1)$ 和 $x^*(\zeta_1^*)$ 有相同的分布.

证 必要性. 令 $D_n\uparrow I$，且 D_n 是有限集，在首次无穷 ζ_1 之后首次到达 D_n 的时刻记为 β_n，易见. $\beta_n\downarrow\zeta_1$，由引理 1，知对一切 n，

$$P_i\{x(\beta_n)=j\}=P_i^*\{x(\beta_n)=j\}.$$

据样本函数的右连续性，必要性得证.

充分性. 令 ζ_n 表示过程 X 的第 n 个飞跃点($\zeta_0=0$)，因 X 是一阶过程，故 $\zeta_n\uparrow\sigma$. 记 X 的最小过程为 $\bar{X}=\{\bar{x}(t)=x(t),\ t<\zeta_1\}$，并对任一集 $E\subset I$，令 $\bar{T}_E$ 表示 $\bar{X}$ 首次进入集 E 的时刻，则

$$\begin{aligned}P_i\{x(T_E)=j\}&=\sum_{n=0}^{\infty}P_i\{x(T_E)=j,\ \zeta_n\leqslant T_E<\zeta_{n+1}\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}P_i\{x(t)\notin E,\ t<\zeta_n,\ x(T_E)=j,\ \zeta_n\leqslant T_E<\zeta_{n+1}\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in I}P_i\{x(t)\notin E,\ t<\zeta_n,\ x(\zeta_n)=k,\ x(T_E)=j,\ \zeta_n\leqslant T_E<\zeta_{n+1}\}\\&=\sum_{k\in I}\sum_{n=0}^{\infty}P_i\{x(t)\notin E,\ t<\zeta_n,\ x(\zeta_n)=k\}\cdot P_k(\bar{x}(\bar{T}_E)=j).\end{aligned}$$

因 $P_k(\bar{x}(\bar{T}_E)=j)$ 由嵌入矩阵决定，所以，只需证 $P_i\{x(t)\notin E,\ t<\zeta_n,\ x(\zeta_n)=k\}$ 由嵌入矩阵和 $\Pi_{ij}=P_i\{x(\zeta_1)=j\}$ 决定. 令 $A_n=\{x(t)\notin E,\ t<\zeta_n\}$. 则

$$\begin{aligned}P_i\{A_1,\ x(\zeta_1)=k\}&=P_i\{(x(\zeta_1)=k).\ (x(\zeta_1)=k,\ \bar{x}(\bar{T}_E)\in E)\}\\&=\Pi_{ik}-P_i\{\bar{x}(\bar{T}_E)\in E,\ x(\zeta_1)=k\}\\&=\Pi_{ik}-\sum_{l\in E}P_i\{\bar{x}(T_E)=e\}\cdot\Pi_{lk},\end{aligned}$$

它由嵌入矩阵和 $\{\Pi_{ij}\}$ 决定，对 $n=2$，因

$$\begin{aligned}P_i\{A_2,\ x(\zeta_2)=k\}&=\sum_l P_i\{A_1,\ x(\zeta_1)=l,\ Q_{\zeta_1}(A_1,\ x(\zeta_1)=k)\}\\&=\sum P_i\{A_1,\ x(\zeta_1)=l\}\cdot P_l\{A_1,\ x(\zeta_1)=k)\}.\end{aligned}$$

故也有相同结论. 对一般的 n，不难用同样方式以归纳法证毕. 定理充分性得证.

定理 6 设 X 和 X^* 是两个一阶过程，则两者有相同击中分布的充分必要条件是存在一个连续的随机时间替换 $\tau(t)$，使得 $y(t)=x(\tau(t))$ 与 $x^*(t)$ 有相同的转移函数.

证 必要性. 由定理 1 的推论知两个过程的嵌入矩阵相同，故二者的最小过程的击中分布相同. 由定理 3，存在一个最小过程 $\bar{x}(t)$ 的连续随机时间替换 $\bar{\tau}(t)$，使得 $\bar{y}(t)=\bar{x}(\bar{\tau}(t))$ 和 $\bar{x}^*(t)$ 有相同的转移函数. 因 $\bar{\tau}(t)$ 连续，严格增加，因此它的反函数 $\bar{\varphi}(t)$ 存在，也是连续，严格增加. 它是 $\bar{x}(t)$ 的非负齐次可加泛函(定义见[8]). 由[8]，$\bar{\varphi}(t)$ 只能是积分型的，即

$$\bar{\varphi}(t)=\int_0^t H(\bar{x}(u))du\quad(t<\zeta_1)$$

这里 H 是 I 上严格正的函数. 现令

$$\varphi(t)=\int_0^t H(x(u))du\quad(t<\sigma)$$

要证它的反函数 $\tau(t)$ 就是满足定理要求的连续随机时间替换，为此，只需证明 $x(\tau(t))$ 与 $x^*(t)$ 有相同的转移函数，先证

引理 2 在定理 6 的条件下，设 ζ_n 是 $x(t)$ 的第 n 个飞跃点，则对一切 n，

$$P_i\{\varphi(\zeta_n)>t\}=P_i^*\{\zeta_n>t\}\tag{9}$$

证 当 $n=1$ 时，

$$P_i\{\varphi(\zeta_1)>t\}=P_i\{\bar{y}(t)\in I\}$$
$$=\sum_{j\in I}\bar{P}_{ij}(t)=\sum_{j\in I}\bar{P}^*_{ij}(t)=P^*_i\{\zeta_1>t\}.$$

当 $n=2$ 时,

$$\varphi(\zeta_2)=\int_0^{\zeta_2}H(x(u))du=\varphi(\zeta_1)+\theta_{\zeta_1}\varphi(\zeta_1) \tag{10}$$

这里 θ 是 [8] 中定义的推移算子, $\varphi(\zeta_1)$ 和 $\theta_{\zeta_1}\varphi(\zeta_1)$ 独立且

$$\begin{aligned}P_i\{\theta_{\zeta_1}\varphi(\zeta_1)>t\}&=E_i\{P_{x(\zeta_1)}\{\varphi(\zeta_1)>t\}\}\\&=\sum_{j\in I}\Pi_{ij}P_j\{\varphi(\zeta_1)>t\}\\&=\sum_{j\in I}\Pi_{ij}P^*_j\{\zeta_1>t\}\\&=P^*_i\{\zeta_2-\zeta_1>t\}.\end{aligned}$$

由(10)式, $\varphi(\zeta_2)$ 是两个独立变量之和, $\zeta^*_2=\zeta^*_1+(\zeta^*_2-\zeta^*_1)$ 也是两个独立变量之和, 分别两两"同分布", 因而 $\varphi(\zeta_2)$ 和 ζ^*_2 "同分布".

余者不难用归纳法并利用过程的齐次性证明, 引理证毕.

现继续证明定理 6 的必要性.

$$P_i\{x(\tau(t))=j\}=\sum_{n=1}^{\infty}P_i\{x(\tau(t))=j,\ \zeta_{n-1}\leqslant\tau(t)<\zeta_n\} \tag{11}$$

注意当 $\zeta_{n-1}\leqslant\tau(t)<\zeta_n$ 时, 有

$$\varphi(\zeta_{n-1})\leqslant t<\varphi(\zeta_n),\quad 0\leqslant t-\varphi(\zeta_{n-1})<\theta_{\zeta_{n-1}}(\varphi(\zeta_1)). \tag{12}$$

所以, 上式右端和的一般项又可写成

$$P_i\{x(\tau(t))=j,\quad 0\leqslant t-\varphi(\zeta_{n-1})<\theta_{\zeta_{n-1}}(\varphi(\zeta_1))\}$$
$$=\int_0^t E_i\{P_{x(\zeta_{n-1})}\{\bar{x}(\bar{\tau}(t-u))=j,\quad 0\leqslant t-u<\varphi(\zeta_1)\}\}\cdot F_{i,n-1}(du).$$

此处的 $$F_{i,n-1}(t)=P_i\{\varphi(\zeta_{n-1})<t\}.$$

由(9)式, $$F_{i,n-1}(t)=F^*_{i,n-1}(t)=P^*_i\{\zeta_{n-1}<t\}.$$

再由(8)式, 知(12)式右端又等于

$$P^*_i\{x(t)=j,\ \zeta_{n-1}\leqslant t<\zeta_n\}.$$

对 n 求和, 与(11)式比较, 必要性证毕.

充分性的证明比较明显, 因 $\tau(t)$ 严格增加且连续, 从而若 T_E 是 $x(t)$ 首次到达集 E 的时间, 则 $\varphi(T_E)$ 是 $y(t)$ 首次到达集 E 的时间, 它应该与 T^*_E "同分布", 击中分布由转移函数决定, 故

$$P_i\{y(\varphi(T_E))=j\}=P^*_i\{x(T_E)=j\}.$$

而左端即 $P_i\{x(T_E)=j\}$, 充分性证毕.

对一阶过程, 我们进而可以探究击中分布的求解.

令 $\tau^{(n,k)}$ 表示第 n 次无穷 ζ_n 之后的第 k 个跳跃点, 并令

$$\sigma_A=\begin{cases}\inf\ (t:\ \tau^{(0,1)}\leqslant t<\sigma,\quad x(t)\in A), & \\ +\infty, & \text{若上述集空.}\end{cases}$$

$$H\sigma_A=\begin{cases}\sigma_A, & \text{如 } \sigma_A\leqslant\sigma_H,\\ +\infty, & \text{反之.}\end{cases}$$

$$Hf_{iA}^{(n)}=P_i\{\tau^{(n-1,1)}\leqslant H\sigma_A<\tau^{(n,1)}\},$$
$$Hf_{iA}^{*}=P_i\{H\sigma_A<+\infty\},$$
$$H\tilde{f}_{iA}^{*}=P_i\{H\sigma_A<\zeta_1\}.$$

而击中分布 $$P_i\{x(T_E)=j\}=\begin{cases}0, & j\notin E,\\ \delta_{ij}, & j\in E,\ i\in E,\\ E\{j\}f_{ij}^{*}, & j\in E,\ i\notin E.\end{cases}$$

所以，求击中分布的问题即可化为 Hf_{iA}^{*} 求解的问题，对此有

引理 3 $\{Hf_{iA}^{*},\ i\in I\}$ 是非负线性方程组

$$x_i=\sum_{j\notin A\cup H}(\Pi_{ij}-\sum_{l\in A\cup H}{}_{A\cup H}\tilde{f}_{il}^{*}\Pi_{lj})x_j+\sum_{j\in A}(\Pi_{ij}-\sum_{l\in A\cup H}{}_{A\cup H}\tilde{f}_{il}^{*}\Pi_{lj})+H\tilde{f}_{iA}^{*}$$

的最小非负解.

由 [7] 定理 9.3.2, 知 $\{H\tilde{f}_{iA}^{*},\ i\in I\}$ 是非负线性方程组

$$x_i=\sum_{j\notin A\cup H\cup(i)}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\sum_{j\in A\setminus(i)}\frac{q_{ij}}{q_i}\quad(i\in I)$$

的最小非负解，从而 $H\tilde{f}_{iA}^{*}$ 由嵌入矩阵唯一决定，而 Hf_{iA}^{*} 则由嵌入矩阵和 $\{\Pi_{ij}\}$ 唯一决定，这也可作为定理 5 的充分性的证明，下证本引理.

首先证明

引理 4 $P_i\{x(s)\notin A\cup H,\ \tau^{(0,1)}\leqslant s\leqslant\zeta_1,\ x(\zeta_1)=j\}=\Pi_{ij}-\sum_{l\in A\cup H}{}_{A\cup H}\tilde{f}_{il}^{*}\cdot\Pi_{lj}.$

证　上式右端

$$\begin{aligned}&=P_i\{x(\zeta_1)=j\}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l\in A\cup H}P_i\{x(\tau^{(0,s)})\in A\cup H,\ s<n,\ x(\tau^{(0,n)})=l,\ x(\zeta_1)=j\}\\
&=\Pi_{ij}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l\in A\cup H}P_i\{x(\tau^{(0,s)})\notin A\cup H,\ s<n,\ x(\tau^{(0,n)})=l\}\\
&\quad\cdot P_i\{x(\zeta_1)=j\mid x(\tau^{(0,s)})\notin A\cup H,\ x(\tau^{(0,n)})=l\}\\
&=\Pi_{ij}-\sum_{l\in A\cup H}\sum_{n=1}^{\infty}P_i\{x(\tau^{(0,s)})\notin A\cup H,\ s<n,\ x(\tau^{(0,n)})=l\}\cdot P\{x(\zeta_1)=j\mid x(0)=l\}\\
&=\Pi_{ij}-\sum_{l\in A\cup H}{}_{A\cup H}\tilde{f}_{i,l}^{*}\cdot\Pi_{lj}.\end{aligned}$$

再往证引理 3. 因

$$\begin{aligned}Hf_{iA}^{(1)}&=P_i\{\tau^{(0,1)}\leqslant H\sigma_A<\tau^{(1,1)}\}\\
&=P_i\{\tau^{(0,1)}\leqslant H\sigma_A<\zeta_1\}+P_i\{H\sigma_A=\zeta_1\}\\
&=H\tilde{f}_{iA}^{*}+\sum_{j\in A}P_i\{x(s)\notin A\cup H,\ \tau^{(0,1)}\leqslant s<\zeta_1,\ x(\zeta_1)=j\}\\
&=H\tilde{f}_{iA}^{*}+\sum_{j\in A}(\Pi_{ij}-\sum_{j\in A\cup H}{}_{A\cup H}\tilde{f}_{il}^{*}\Pi_{lj}).\end{aligned}$$

最后一个等式即据引理 4

$$\begin{aligned}Hf_{iA}^{(n+1)}&=P_i\{\tau^{(n,1)}\leqslant H\sigma_A<\tau^{(n+1,1)}\}\\
&=\sum_{j\notin A\cup H}P_i\{x(s)\in A\cup H,\ \tau^{(0,1)}\leqslant s<\zeta_1,\ x(\zeta_1)=j,\ \tau^{(n,1)}\leqslant H\sigma_A<\tau^{(n+1,1)}\}\\
&=\sum_{j\notin A\cup H}(\Pi_{ij}-\sum_{l\in A\cup H}{}_{A\cup H}\tilde{f}_{il}^{*})P_j\{\tau^{(n-1,1)}\leqslant H\sigma_A<\tau^{(n,1)}\}\\
&=\sum_{j\notin A\cup H}(\dot{\Pi}_i-\sum_{l\in A\cup H}{}_{A\cup H}\tilde{f}_{il}^{*})Hf_{jA}^{(n)}.\end{aligned}$$

于是，由

$$Hf_{iA}^{*}=\sum_{n=1}^{\infty}Hf_{iA}^{(n)}$$

及[7]系3、2、3，立得引理.

§4 一般过程

用[6]的记法、令

$$\beta_0^{(n)}(\omega)=0,\quad D_n=\{0, 1, 2, \cdots, n\},$$

$\sigma_k^{(n)}$ 为 $\beta_{k-1}^{(n)}$ 之后的第一飞跃点.

$\beta_k^{(n)}$ 为在 $\sigma_k^{(n)}$ 之后的首次到达 D_n 的时刻.

$$\tau_k^{(n)}=\begin{cases}0, & (k=0),\\ \sum_{n=1}^{k}(\sigma_s^{(n)}-\beta_{s-1}^{(n)}), & (k>0).\end{cases}$$

$$\alpha_t^{(n)}=\begin{cases}\beta_{k-1}^{(n)}+t-\tau_{k-1}^{(n)}, & (\tau_{k-1}^{(n)}\leqslant t<\tau_k^{(n)}),\\ \sigma, & (t\geqslant\sigma^{(n)}).\end{cases}$$

这里 $\sigma^{(n)}=\lim\limits_{k\to+\infty}\tau_k^{(n)}$，[6]中指出，$\alpha_t^{(n)}$ 对任意固定的 n，都是过程 X 的随机时间替换，$x^{(n)}(t)=x(\alpha_t^{(n)})$ 是一阶过程.

定理7 设 X 是一可列马尔可夫过程，则另一可列马尔可夫过程 X^* 与之有相同击中分布的充要条件是它们嵌入矩阵相同且

$$P_i\{x(\beta_1^{(n)})=j\}=P_i^*\{x(\beta_1^{(n)})=j\},\quad (n=1, 2, \cdots, i, j\in I). \tag{13}$$

证 由定理1的推论和引理1，立得定理的必要性证明. 为证充分性，由定理1，只要证明对任一有限集 E，$P_i\{x(T_E)=j\}$，$(i, j\in I)$，由嵌入矩阵和 $P_i\{x(\beta_1^{(n)})=j\}$ 唯一决定，因 E 为有限集，故存在 $n>0$，使 $E\subset D_n$，以 $T_E^{(n)}$ 表示 $x^{(n)}(t)$ 首次进入 E 的时刻，于是

$$P_i\{x(T_E)=j\}=P_i\{x^{(n)}(T_E^{(n)})=j\}.$$

但由定理5，右端显然由嵌入矩阵和 $P_i\{x(\beta_1^{(n)})=j\}$ 所唯一决定，从而右端亦然，定理证毕.

定理8 两个齐次可列马尔可夫过程 X 和 X^* 有相同击中分布的充要条件是存在一个连续随机时间替换 $\tau(t)$，使得 $x(\tau(t))=y(t)$ 与 $x^*(t)$ 有相同的转移函数.

证 必要性. 由定理1和定理2，知最小过程有相同的击中分布，所以嵌入矩阵相同. 对一阶过程 $x^{(n)}(t)$ 来说，若令 $\zeta_k^{(n)}$ 表示 $x^{(n)}(t)$ 的第 k 个飞跃点，则由引理1，利用归纳法可证对一切 $i, j\in I$

$$P_i\{x^{(n)}(\zeta_{k-1}^{(n)})=j\}=P_i^*\{x^{(n)}(\zeta_{k-1}^{(n)})=j\}.$$

由定理5，一阶过程 $x^{(n)}(t)$ 和 $x^{(n)*}(t)$ 的击中分布相同，由定理6，存在连续的随机时间替换 $\tau^{(n)}(t)$ 使得

$$P_i\{x^{(n)}(\tau^{(n)}(t))=j\}=P_i^*\{x^{(n)}(t)=j\}.$$

仍由[8]知，$\tau^{(n)}(t)$ 的反函数 $\varphi^{(n)}(t)$ 只能是积分型的泛函.

$$\varphi^{(n)}(t)=\int_0^t H^{(n)}(x^{(n)}(u))\,du.$$

由于对任意的 n, $x^{(n)}(t)$ 的最小过程都是共同的, 定理 6 的证明指出, 诸 $H^{(n)}$ 也可取为共同的, 即可取

$$\varphi^{(n)}(t)=\int_0^t H(x^{(n)}(u))du.$$

令

$$\varphi(t)=\int_0^t H(x(u))\,du.$$

要证 $\varphi(t)$ 的反函数 $\tau(t)$ 即为所求, $\tau(t)$ 无疑是一个连续的随机时间替换, 所以只需证明 $x(\tau(t))$ 与 $x^*(t)$ 有相同的转移函数.

我们注意, 当 $\tau_{k-1}^{(n)}\leqslant\tau^{(n)}(t)<\tau_k^{(n)}$ 时

$$t=\int_0^{\tau^{(n)}(t)} H(x^{(n)}(u)\,du=\int_0^{\zeta_1} H(x(u))du+\int_{\beta_1^{(n)}}^{\sigma_2^{(n)}} H(x(u))du+\cdots$$

$$+\int_{\beta_{k-1}^{(n)}}^{\beta_{k-1}^{(n)}+\tau^{(n)}(t)-\tau_{k-1}^{(n)}} H(x(u))\,du.$$

而

$$t=\int_0^{\tau(t)} H(x(u))du,$$

故

$$\tau(t)\leqslant\beta_{k-1}^{(n)}+\tau^{(n)}(t)-\tau_{k-1}^{(n)}=\alpha_{\tau^{(n)}(t)}^{(n)}.$$

并显然有 $\alpha_{\tau^{(n)}(t)}^{(n)}\downarrow\tau(t)$, 由过程的连续性

$$\begin{aligned}P_i\{x(\tau(t))=j\}&=\lim_{n\to\infty}P_i\{x(\alpha_{\tau^{(n)}(t)}^{(n)})=j\}\\&=\lim_{n\to\infty}P_i\{x^{(n)}(\tau^{(n)}(t))=j\}\\&=\lim_{n\to\infty}P_i^*\{x^{(n)}(t)=j\}\\&=P_i^*\{x(t)=j)\}.\end{aligned}$$

必要性证毕. 充分性的证明仿定理 6 可得.

注　对 $q_i=0$ 的情况, 比对 i 是过程 x 的吸引状态, 必有

$$P_i\{x(T_E)=j\}=\begin{cases}0, & i\notin E,\\ \delta_{ij}, & i\in E.\end{cases}$$

反之亦然, 易见, 若两个过程的击中分布相同, 则它们的吸引状态相同. 并且, 任何连续随机时间替换不改变吸引状态. 所以, 本文的结论原则上对 $q_i=0$ 也成立.

参　考　文　献

[1] Hunt, G. A., Markoff process and potentials, I., *Illinois Journ. Math.*, **1**: 1 (1957), 44—93.

[2] Blumenthal, R. M., Getoor, R. K. & McKean, H. P., Markov processes with identical hitting distributions., *Illinois Journ. Math.*, **6**: 3 (1962).

[3] Chung K. L., Markov Chains with stationary transition probabilities, (1960).

[4] Дынкин, Е. Б., Основания теория Марковских процессов, Москва, (1959).

[5] 王梓坤, 生灭过程构造论, 数学进展, (1962).

[6] 侯振挺, 齐次可列马尔可夫的样本函数的构造, 中国科学, **3** (1975).

[7] 侯振挺、郭青峰, 齐次可列马尔可夫过程, 科学出版社, (1978).

[8] 墨文川, 齐次可列马尔可夫过程的可加泛函, 山东大学学报, **2** (1978).

COUNTABLE HOMOGENEOUS MARKOV PROCESSES WITH IDENTICAL HITTING DISTRIBUTIONS

MO WENCHUAN

(*Shandong University*)

ABSTRACT

A theorem of Blumenthal, Getoor and McKean (1962) states: Let both $X(t)$ and $X^*(t)$ be Hunt processes, then they have identical hitting distributions if there exists a continuous random time substitute $Z(t)$ such that $X(Z(t))$ and $X^*(t)$ have identical transition functions.

In this paper an analogous theorem is established for countable homogeneous Markov processes with conservative Q-matrix (in general, they are not Hunt processes), and another necessary and sufficient condition is found.