数 学 年 刊
1 (3, 4) 1980

# 半鞅局部时的几个公式

严 加 安
(中国科学院数学研究所)

## §0. 引 言

本文将建立有关半鞅局部时的几个公式,并将其应用于半鞅. 此外,给出 Azéma-Yor 公式的一个变种.

令 $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_t))$ 为一满足通常条件的空间. 设 $X$ 为一半鞅, 我们用 $L(X)$ (或 $L$) 表示 $X$ 在 0 处的局部时(简称局部时), 即 $L(X)$ 为一零初值连续适应增过程,使得

$$|X_t| = |X_0| + \int_0^t (I_{[X_{s-}>0]} - I_{[X_{s-}\leq 0]}) dX_s + 2\sum_{0<s\leq t} (I_{[X_{s-}\leq 0]} X_s^+ + I_{[X_{s-}>0]} X_s^-) + L_t(X). \tag{0.1}$$

(见 Meyer [1]). 这时还有

$$X_t^+ = X_0^+ + \int_0^t I_{[X_{s-}>0]} dX_s + \sum_{0<s\leq t} (I_{[X_{s-}\leq 0]} X_s^+ + I_{[X_{s-}>0]} X_s^-) + \frac{1}{2} L_t(X). \tag{0.2}$$

我们一般没有 $L(X) = L(-X)$, 也就是说 $L(X)$ 不是对称的. Jacod 在 [2] 中提议对称地定义半鞅在 0 处的局部时 $\hat{L}(X)$

$$|X_t| = |X_0| + \int_0^t \operatorname{sgn} X_{s-} dX_s + \sum_{0<s\leq t} (\Delta|X_s| - \operatorname{sgn} X_{s-} \Delta X_s) + \hat{L}_t(X). \tag{0.3}$$

这里约定 $\operatorname{sgn}0 = 0$. 而在 Meyer [1] 中, 曾约定 $\operatorname{sgn}0 = -1$, 这是 $L(X)$ 的非对称性来源. 我们将看到: Jacod 关于局部时的定义更为合理.

在本文中, 我们将经常利用如下基本事实: 测度 $dL(X)$ (或 $d\hat{L}(X)$) 以 $H = \{s: X_{s-} = 0\}$ 为支撑. 例如, 我们有 $\int_0^t I_{[X_{s-}=0]} dL_s = L_t$.

## §1. 局部时的基本公式

**定理 1** 设 $X$ 为一半鞅, 我们有

$$L_t(X) = 2\left[\int_0^t I_{[X_{s-}=0]} dX_s^+ - \sum_{0<s\leq t} I_{[X_{s-}=0]} X_s^+\right], \tag{1.1}$$

$$L_t(X) = 2\left[\int_0^t I_{[X_{s-}\leq 0]} dX_s^+ - \sum_{0<s\leq t} I_{[X_{s-}\leq 0]} X_s^+\right], \tag{1.1$'$}$$

$$\hat{L}_t(X) = \int_0^t I_{[X_{s-}=0]} d|X_s| - \sum_{0<s\leq t} I_{[X_{s-}=0]} |X_s|, \tag{1.2}$$

本文 1980 年 1 月 18 日收到.

$$L_t(X)=\hat{L}_t(X)+\int_0^t I_{[X_{s-}=0]}dX_s-\sum_{0<s\leqslant t}I_{[X_{s-}=0]}X_s, \tag{1.3}$$

$$\hat{L}(X)=\frac{1}{2}[L(X)+L(-X)], \tag{1.4}$$

$$L(X)=L(X^+), \tag{1.5}$$

$$\hat{L}(X)=\hat{L}(-X)=\hat{L}(|X|). \tag{1.6}$$

证 考虑积分$\int_0^t I_{[X_{s-}=0]}dX_s^+$及$\int_0^t I_{[X_{s-}<0]}dX_s^+$，由(0.2)立刻推得(1.1)及(1.1)′. 同样地，考虑积分$\int_0^t I_{[X_{s-}=0]}d|X_s|$，由(0.3)推得(1.2). 注意到$\{s:X_{s-}\leqslant 0\}=\{s:X_{s-}^+=0\}$，由(1.1)及(1.1)′推得(1.5). 其余公式由(1.1)及(1.2)推得.

注 类似地，我们可以建立下列公式

$$\int_0^t I_{[X_{s-}<0]}dX_s^+=\sum_{0<s\leqslant t}I_{[X_{s-}<0]}X_s^+,$$

$$\int_0^t I_{[X_{s-}>0]}d|X_s|=\int_0^t I_{[X_{s-}>0]}dX_s+2\sum_{0<s\leqslant t}I_{[X_{s-}>0]}X_s^-,$$

$$\int_0^t|X_{s-}|d|X_s|=\int_0^t X_{s-}dX_s+\sum_{0<s\leqslant t}(|X_{s-}X_s|-X_{s-}X_s).$$

**系 1.1** 设$X$为一半鞅，则过程$\int_0^\cdot I_{[X_{s-}=0]}dX_s^+$及$\int_0^\cdot I_{[X_{s-}=0]}dX_s^-$都为增过程. $\hat{L}(X)$为增过程$\int_0^\cdot I_{[X_{s-}=0]}d|X_s|$的连续部分. 过程$\int_0^\cdot I_{[X_{s-}=0]}dX_s$为有限变差过程，于是有$\int_0^\cdot I_{[X_{s-}=0]}dX_s^c=0$. (这最后结果属于 Meyer [1])

**系 1.2** 设$X$为一半鞅，则$L(X)$及$\hat{L}(X)$分别关于$X^+$及$|X|$的自然$\sigma$－域族适应(对连续半鞅情形，这一事实已在[3]中得到).

**系 1.3** 设$X$为一半鞅，若$X\geqslant 0$，则$L=2\hat{L}$；若$X\leqslant 0$，则$L=0$.

**系 1.4** 设$X=N+V$，其中$N$为一连续局部鞅，$V$为一适应有限变差过程. 如果$\int_0^\cdot I_{[X_{s-}=0]}dV_s^c=0$，这里$V^c$表示$V$的连续部分，则有$L(X)=\hat{L}(X)=L(-X)$.

证 由于$\int_0^\cdot I_{[X_{s-}=0]}dN_s=\int_0^\cdot I_{[X_{s-}=0]}dX_s^c=0$(系 1.1)，故有

$$\int_0^t I_{[X_{s-}=0]}dX_s=\int_0^t I_{[X_{s-}=0]}dV_s=\sum_{0<s\leqslant t}I_{[X_{s-}=0]}\Delta V_s$$
$$=\sum_{0<s\leqslant t}I_{[X_{s-}=0]}\Delta X_s=\sum_{0<s\leqslant t}I_{[X_{s-}=0]}X_s.$$

于是，由(1.3)得$L(X)=\hat{L}(X)$. 再由(1.4)得$L(X)=L(-X)$.

**系 1.5** 设$X$、$Y$为两个非负半鞅，则有

$$\hat{L}_t(X+Y)=\int_0^t I_{[Y_{s-}=0]}d\hat{L}_s(X)+\int_0^t I_{[X_{s-}=0]}d\hat{L}_s(Y). \tag{1.7}$$

特别，如果$\{s:X_{s-}=0\}=\{s:Y_{s-}=0\}$，则有

$$\hat{L}_t(X+Y)=\hat{L}_t(X)+\hat{L}_t(Y). \tag{1.8}$$

证 令$A_t=\int_0^t I_{[X_{s-}+Y_{s-}=0]}d(X_s+Y_s)$. 由(1.2)，$\hat{L}(X+Y)$为$A$的连续部分，故得(1.7). 另一结论显然.

下一定理表明：对称局部时$\hat{L}$比非对称局部时较易处理.

**定理 2**　设 $X$、$Y$ 为两个半鞅，则有

$$\hat{L}_t(XY)=\int_0^t |X_{s-}|d\hat{L}_s(Y)+\int_0^t |Y_{s-}|d\hat{L}_s(X). \tag{1.9}$$

证　由(1.2)及分部积分公式我们有

$$\begin{aligned}
\hat{L}_t(XY)&=\int_0^t I_{[X_{s-}Y_{s-}=0]}d|X_sY_s|-\sum_{0<s\leq t} I_{[X_{s-}Y_{s-}=0]}|X_sY_s|\\
&=\int_0^t I_{[X_{s-}Y_{s-}=0]}|X_{s-}|d|Y_s|+\int_0^t I_{[X_{s-}Y_{s-}=0]}|Y_{s-}|d|X_s|\\
&\quad+\int_0^t I_{[X_{s-}Y_{s-}=0]}d[|X|,\ |Y|]_s-\sum_{0<s\leq t} I_{[X_{s-}Y_{s-}=0]}|X_sY_s|\\
&=\int_0^t I_{[Y_{s-}=0]}|X_{s-}|d|Y_s|+\int_0^t I_{[X_{s-}=0]}|Y_{s-}|d|X_s|\\
&\quad+\int_0^t I_{[X_{s-}Y_{s-}=0]}d[|X|,\ |Y|_s]-\sum_{0<s\leq t} I_{[X_{s-}Y_{s-}=0]}|X_sY_s|\\
&=\int_0^t |X_{s-}|d\hat{L}_s(Y)+\int_0^t |Y_{s-}|d\hat{L}_s(X)\\
&\quad+\int_0^t I_{[X_{s-}Y_{s-}=0]}d\langle |X|^c,\ |Y|^c\rangle_s+B_t.
\end{aligned}$$

其中 $B_t$ 表示其余项之和，而每项为一纯断有限变差过程．由于 $\hat{L}(XY)$ 连续，故 $B_t=0$. 另一方面，由(0.3)，

$$\langle |X|^c,\ |Y|^c\rangle_t=|X_0Y_0|+\int_0^t \operatorname{sgn}X_{s-}\operatorname{sgn}Y_{s-}d\langle X^c,\ Y^c\rangle_s.$$

故我们有

$$\int_0^t I_{[X_{s-}Y_{s-}=0]}d\langle |X|^c,\ |Y|^c\rangle_s=0.$$

(1.9)得证．

注　由(1.9)及(1.3)我们可以推得

$$\begin{aligned}
L_t(XY)=&\int_0^t|X_{s-}|dL_s(Y)+\int_0^t|Y_{s-}|dL_s(X)-2\Big[\int_0^t X_{s-}^{-}I_{[Y_{s-}=0]}dY_s\\
&+\int_0^t Y_{s-}^{-}I_{[X_{s-}=0]}dX_s\Big]+2\sum_{0<s\leq t}[I_{[Y_{s-}=0]}X_{s-}^{-}Y_s+I_{[X_{s-}=0]}Y_{s-}^{-}X_s],
\end{aligned} \tag{1.10}$$

这一公式比(1.9)复杂得多．

**定理 3**　设 $X$ 为一半鞅，$f$ 为 $R$ 上的一非负凸函数，使得 $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$. 令 $f'=\frac{1}{2}(f'_{左}+f'_{右})$，又令 $\rho$ 为 $f$ 的在分布意义下的二阶导数，则有

$$\hat{L}_t(f(X))=f'(0)\Big[\int_0^t I_{[X_{s-}=0]}dX_s-\sum_{0<s\leq t} I_{[X_{s-}=0]}X_s\Big]+\frac{1}{2}\rho(\{0\})\hat{L}_t(X). \tag{1.11}$$

证　令 $\hat{L}^a(X)=\hat{L}(X-a)$. 依照 Jacod[2]，我们有

$$\begin{aligned}
f(X_t)=&f(X_0)+\int_0^t f'(X_{s-})dX_s+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{L}_t^a(X)\rho(da)\\
&+\sum_{0<s\leq t}[f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s].
\end{aligned}$$

依假定，我们有 $\{s:f(X_{s-})=0\}=\{s:X_{s-}=0\}$. 利用 $d\hat{L}^a(X)$ 以 $\{s:X_{s-}=a\}$ 为支撑这一事实并利用 Fubini 定理，我们容易由公式(1.2)推得(1.11)．

**系** 设 $X$ 为一半鞅,对一切 $\alpha>1$,我们有 $\hat{L}(|X|^{\alpha})=0$. 因此,若 $\hat{L}(X)\neq 0$,则对一切 $\beta:0<\beta<1$, $|X|^{\beta}$ 不是半鞅. (在 $X$ 为连续局部鞅情形,这一结果属于 Yor[4])

我们用 $\Sigma$(或 $\Sigma(\mathscr{F}_t)$, 如果有必要)表示下述半鞅 $X$ 的集合: $X$ 为一连续半鞅 $N$ 与一零初值有限变差过程 $V$ 之和,其中测度 $dV$. 以 $\{s: X_{s-}=0\}$ 为支撑.

下面是 $\Sigma$ 的元素的一个刻划,它推广了 Yor[5] 中的一个结果.

**定理 4** 设 $X$ 为一半鞅,则下列断言等价: i) $X\in\Sigma$; ii) $\int_0^{\cdot} I_{[X_{s-}\neq 0]}dX_s$ 为一连续局部鞅; iii) $\int_0^{\cdot} X_{s-}dX_s$(或 $X^2-[X,X]$) 为一连续局部鞅.

**证** i)⇒ii). 设 $X\in\Sigma$, $X=N+V$, 其中 $N=X^c$. 由系 1.1 有 $\int_0^{\cdot} I_{[X_{s-}=0]}dN_s=0$, 故有

$$\int_0^t I_{[X_{s-}=0]}dX_s=\int_0^t I_{[X_{s-}=0]}dV_s=V_t.$$

从而 $\int_0^t I_{[X_{s-}\neq 0]}dX_s=X_t-X_0-V_t=N_t-X_0$, 它为连续局部鞅.

ii)⇒iii) 显然. 往证 iii)⇒i). 设 iii) 成立, 则 $X_{s-}\Delta X_s=0$. 于是 $\sum_{0<s\leq t} I_{[X_{s-}\neq 0]}|\Delta x_s|=0$,

从而有

$$\sum_{0<s\leq t}|\Delta x_s|=\sum_{0<s\leq t} I_{[X_{s-}=0]}|X_s|<+\infty$$

令 $A_t=\sum_{0<s\leq t}\Delta X_s$, 设 $X-A=N+B$ 为连续半鞅 $X-A$ 的典则分解. 令 $V=A+B$, 则由假定, 过程 $\int_0^{\cdot} X_{s-}dV_s=\int_0^{\cdot} X_{s-}dX_s-\int_0^{\cdot} X_{s-}dN_s$ 为连续局部鞅, 故 $\int_0^{\cdot} X_{s-}dV_s=0$ 这表明 $dV$ 以 $\{s: X_{s-}=0\}$ 为支撑, 即 $X\in\Sigma$.

**系** 设 $X$ 为一半鞅, 则 $X\in\Sigma\Rightarrow|x|\in\Sigma$, 若 $X$ 连续, 则 $X\in\Sigma\Leftrightarrow|x|\in\Sigma$.

**证** 首先, 由 (0.3) 及系 1.1 推知 $\langle|X|^c, |X|^c\rangle=\langle X^c, X^c\rangle$, 由此利用定理中 i) 与 iii) 的等价性推得系的结论.

## §2. Azéma-Yor 公式的一个变种

设 $H$ 为一右闭循序随机集. 对 $t\geq 0$, 令

$$\tau_t(\omega)=\sup\{s<t: (s, \omega)\in H\}, \quad D_t(\omega)=\inf\{s>t: (s, \omega)\in H\}$$

这里按通常约定 $\sup(\phi)=0$, $\inf\phi=+\infty$.

设 $Y$ 为一半鞅, 使得 $Y_{D_t}I_{[D_t<\infty]}=0$. a. s., 对一切 $t\in R_+$ 成立. 又设 $Z$ 为一有界可料过程, 则 $(Z_{\tau_t})$ 为一可料过程, 并且我们有如下 Azéma-Yor 公式(见 Yor [5]):

$$Y_tZ_{\tau_t}=Y_0Z_0+\int_0^t Z_{\tau_s}dY_s.$$

现设 $(C_t)$ 为一右连续适应增过程. 令

$$j_t=\inf\{s: C_s>t\}$$

并令 $\overline{\mathscr{F}}_t=\mathscr{F}_{j_t}$, $B_t=C_{t-}$.

下一定理是 Azéma-Yor 公式的变种.

**定理 5**　设 $X$ 为一半鞅(相应地, 部局鞅), 使得对一切 $t\in R_+$, 有 $X_{j_t}I_{[j_t<\infty]}=0$ a. s.. 若 $(h_t)$ 为一有界 $(\mathscr{F}_t)$ 可料过程, 则 $(h_{B_t})$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 可料过程, 并且我们有

$$\int_0^t h_{B_s}dX_s=h_{B_t}X_t-h_0X_0. \tag{2.1}$$

特别, $(h_{B_t}X_t)$ 为一半鞅(相应地, 局部鞅). 我们有

$$\hat{L}_t(h_BX)=\int_0^t |h_{B_s}|d\hat{L}_s(X). \tag{2.2}$$

证　设 $S$ 为一 $(\mathscr{F}_t)$ 停时, 则 $j_S$ 为 $(\mathscr{F}_t)$ 停时. 令 $h=I_{[0,S]}$. 由于 $t\leqslant j_s\Leftrightarrow B_t\leqslant s$, 我们有 $h_{B.}=I_{[0,j_S]}$. 这时容易验证(2.1)成立. 然后由单调类定理推广到一般情形.

现证公式(2.2). 记 $X'_t=h_{B_t}X_t$. 由(2.1) $\Delta X'_t=h_{B_t}\Delta X_t$, 故 $X'_{t-}=h_{B_t}X_{t-}$. 另一方面, 我们有

$$|X'_t|=|h_{B_t}||X_t|=\int_0^t|h_{B_s}|d|X_s|+|h_0||X_0|.$$

既然 $\hat{L}(X')$ 是连续增过程, 我们有

$$\hat{L}_t(X')=\int_0^t I_{[X'_{s-}=0]}d|X'_s|-\sum_{0<s\leqslant t}I_{[X'_{s-}=0]}|X'_s|=\int_0^t I_{[h_{B_s}X_{s-}=0]}|h_{B_s}|d|X_s|-\cdots$$

$$=\int_0^t I_{[X_{s-}=0]}|h_{B_s}|d|X_s|-\cdots=\int_0^t|h_{B_s}|d\hat{L}_s(X).$$

**系 5.1**　设 $X$ 为一半鞅(相应地, 局部鞅), 使得对一切 $t\in R_t$, $X_{j_t}I_{[j_t<\infty]}=0$ a. s.. 若 $f$ 为一有界 Borel 函数, 则 $(f(B_t)X_t)$ 为一半鞅(相应地, 局部鞅).

**系 5.2**　设 $X$ 为一半鞅(相应地, 局部鞅), $f$ 为一有界 Borel 函数. 则 $(f(L_t(X))X_t)$ 及 $(f(\hat{L}_t(X))X_t)$ 为半鞅(相应地, 局部鞅).

证　对一切 $t\in R_t$, 令

$$j_t=\inf\{s:L_s>t\}.$$

固定一 $\omega$. 如果 $j_t(\omega)<\infty$, 则 $j_t(\omega)$ 是 $L.(\omega)$ 的右增点. 因此, 存在 $s_n\downarrow\downarrow j_t(\omega)$, 使得对每个 $s_n$, 有 $X_{s_n-}(\omega)=0$, 从而我们有

$$X_{j_t}(\omega)=\lim_{n\to\infty}X_{s_n-}(\omega)=0.$$

故由定理推得本系的结论(注意 $L$ 连续). 对 $\hat{L}$ 情形, 证明相同.

注　本系的结果属于 Yor[5].

作为结束, 应该指出: 从 Azéma-Yor 公式可以推得一个与(2.2)类似的公式. 更确切地说, 采用本节开头部分的假设和记号, 我们有

$$\hat{L}_t(YZ_\tau)=\int_0^t|Z_{\tau_s}|d\hat{L}_s(Y). \tag{2.3}$$

对 $Y$ 为连续半鞅情形, 这一公式已在[5]中被 Yor 建立.

## 参　考　文　献

[1] P. A. Meyer, Un cours sur les intégrales stochastiques. *Sém. Prob.* X, *Lect. Notes in Math.*, **511** (1976).

[2] J. Jacod, Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales. *Lect. Notes in Math.*, **714** (1979).

[3] M. Chaleyat-Maurel, M. Yor, Les filtrations de $|X|$ et $X^+$, lorsque $X$ est une semimartingale continue Temps Locaux. Astérisque $n°$ **52—53**, *Soc. Math. France*, (1978).

[4] M. Yor, Un exemple de processus qui n'est pas une semimartingale. (ibid)

[5] M. Yor, Sur le balayage des semimartingales continues. *Sém. Prob.* XIII, *Lect. Notes in Math.*, **721** (1979).

# SOME FORMULAS FOR THE LOCAL TIME OF THE SEMIMARTINGALES

YAN JIAAN
(*Institute of Mathematatica, Academia Sinica*)

## ABSTRACT

Let $X$ be a semimartingale, we denote by $L(X)$ (resp. $\hat{L}(X)$) the local time at 0 of $X$ in the sense of Meyer[1] (resp. Jacod[2]). We establish the following theorems.

**Theorem 1.** *Let $X$ be a semimartingale. We have*

$$\hat{L}_t(X) = \int_0^t I_{[X_{s-}=0]} d|X_s| - \sum_{0<s\leq t} I_{[X_{s-}=0]} |X_s|$$

$$\hat{L}(X) = \frac{1}{2}[L(X) + L(-X)]$$

$$L(X) = L(X^+), \quad \hat{L}(X) = \hat{L}(-X) = \hat{L}(|X|).$$

**Theorem 2.** *Let $X$ and $Y$ be two semimartingales. We have*

$$\hat{L}_t(XY) = \int_0^t |X_{s-}| d\hat{L}_s(Y) + \int_0^t |Y_{s-}| d\hat{L}_s(X).$$

**Theorem 3.** *Let $X$ be a semimartingale, and $f$ be a positive convex function on $R$ such that $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Then we have*

$$\hat{L}_t(f(X)) = f'(0)\left[\int_0^t I_{[X_{s-}=0]} dX_s - \sum_{0<s\leq t} I_{[X_{s-}=0]} X_s\right] + \frac{1}{2}\rho(\{0\})\hat{L}_t(X),$$

*where $f' = \frac{1}{2}(f'_{\text{right}} + f'_{\text{left}})$ and $\rho$ is the second derivative of $f$ in the sense of the distributions.*

**Corollary.** *Let $X$ be a semimartingale. We have $\hat{L}(|X|^\alpha) = 0$ for $\alpha > 1$. If $\hat{L}(X) \neq 0$, then for $0<\beta<1$, $|X|^\beta$ is not a semimartingale.*

**Theorem 4.** *Let $X$ be a semimartingale. The following statements are equivalent.*

i) $X \in (\Sigma) \triangleq \{Y = N + V : N$ *is a continuous local martingale, and $V$ is a process of finite variation such that $dV$ is supported by* $\{s: Y_{s-} = 0\}\}$;

ii) $\int_0^\cdot I_{[X_{s-}\neq 0]} dX_s$ *is a continuous local martingale;*

iii) $\int_0^\cdot X_{s-} dX_s$ ( or $X^2 - [X, X]$) *is a continuous local martingale.*

**Corcllcry.** *Let $X$ be a continuous semimartingale. Then we have $X \in (\Sigma) \Leftrightarrow |X| \in (\Sigma)$.*

Let $(C_t)$ be an adapted right continuous process of finite variation. Set

$$j_t = \inf\{s : C_s > t\}, \quad \bar{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_{j_t}, \quad B_t = C_{t-}.$$

The following is a variant of Azema-Yor formula.

**Theorem 5.** *Let $X$ be a semimartingale such that $X_{j_t} I_{[j_t<\infty]}=0$ a. s. for any $t \in R_+$. If $(h_t)$ is bounded $(\overline{\mathscr{F}}_t)$-predictable process, then $(h_{B_t})$ is $(\mathscr{F}_t)$-predictable, and we have*

$$\int_0^t h_{B_s} dX_s = h_{B_t} X_t - h_0 X_0,$$

$$\hat{L}_t(h_B X) = \int_0^t |h_{B_s}| d\hat{L}_s(X).$$