数 学 年 刊
1 (3, 4) 1980

微分算子环的素理想

钟 家 庆
(中国科学院数学研究所)

大家知道，多复变典型域调和函数论的基本事实是[2]：设 R 为四类典型域之一，Γ 为其特征边界，Δ 是 R 的 Laplace-Beltrami 算子，$f\in C^\infty(R)$ 称为调和的，如果 $\Delta f=0$. 设 f 为调和函数，其在 Γ 的连续边界值为 φ，那么 f 在 R 中的值由以下 Poisson 积分给出

$$f(Z)=\int_\Gamma P(Z,\ U)\varphi(U)\dot{U},\quad \forall Z\in R \tag{1}$$

四类典型域的 Poisson 核都已具体给出[1]. 以 $R_I(n)$：$I-Z\bar{Z}'>0$ 为例，这里 Z 是 $n\times n$ 矩阵，其特征边界 $\Gamma=U(n)=\{U|U\bar{U}'=I\}$，其 Laplace 算子为

$$\Delta=\operatorname{tr}[(I-Z\bar{Z}')\partial_{\bar{Z}}(I-\bar{Z}'Z)\partial'_Z], \tag{2}$$

相应的 Poisson 核为

$$P(Z,\ U)=\frac{\det(I-Z\bar{Z}')^n}{|\det(I-ZU')|^{2n}},\ U\in\Gamma=U(n). \tag{3}$$

熟知，对 $\forall U\in U(n)$，$\Delta P(Z,\ U)=0$. 除了 Δ 使 $P(Z,\ U)$ 零化以外，华罗庚教授在[1]中曾指出，下列 n^2 个二阶微分算子的每一个

$$\{\partial_{\bar{Z}}(I-\bar{Z}'Z)\partial'_Z\}_{ij},\quad 即\quad \sum_{\alpha,\beta=1}^n\Big(\delta_{\alpha\beta}-\sum_{k=1}^n\bar{Z}_{k\alpha}Z_{k\beta}\Big)\frac{\partial^2}{\partial\bar{Z}_{i\alpha}\partial Z_{j\beta}}, \tag{4}$$

都使 $P(Z,\ U)$ 零化. 针对这种一组微分算子具有"公共 Poisson 核"的现象，华罗庚教授曾提出这样的问题：研究使同一 Poisson 核零化的所有微分算子(在微分算子环中显然构成一左理想)的代数结构.

这一问题如和多项式理想论中的 Nullstellensatz 联系起来将更有启发. Hilbert 的 Nullstellensatz 如下：如 $g_1,\ \cdots g_m\in\mathscr{R}[x_1,\ \cdots x_n]$，$\mathscr{R}$ 表实数域，设 Ω 为 $g_i(i=1,\ \cdots m)$ 在 $\mathscr{C}$ 中的公共零点集. 如 $f\in\mathscr{R}[x_1,\ \cdots x_n]$，$f$ 的零点集包含 Ω，则存在正整数 σ，使 $f^\sigma\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ (g_1,\ \cdots g_m))$. 显然，如果理想 $(g_1,\ \cdots g_m)$ 是素的 (Prime)，则 $\sigma=1$，即 $f\equiv 0\ ((\mathrm{mod}(g_1,\ \cdots g_m))$.

设 $T_1,\ \cdots T_m$ 是定义在某一域上的 m 个微分算子，Ω 表其公共解的集合. 那么对 $T_1,\ \cdots T_m$ 可以联系以下两个微分算子环中的(左)理想：

1° $$(T_1,\ \cdots T_m)=\sum_{i=1}^m A_i\Big(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \cdots\ \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)T_i;$$

2° $$H(T_1,\ \cdots T_m)=\{微分算子\ T\,|\,Tf=0,\ \forall f\in\Omega\}.$$

本文 1978 年 12 月 13 日收到。

显然，$(T_1, \cdots T_m) \subseteq H(T_1, \cdots T_m)$. 我们引进以下

定义 理想$(T_1, \cdots T_m)$称为素的，如果$H(T_1, \cdots T_m) = (T_1, \cdots T_m)$.

回到前面典型域的情况，如 Δ 为 Laplace 算子，即要问：何时 (Δ) 是素的？如果 $H(\Delta) \neq (\Delta)$，那么 $H(\Delta)$的基是什么？

本文的目的在于初步讨论这一问题．给出了使$(T_1 \cdots T_m)$成为素理想的充分条件，这些条件看来概括了典型域的情况．在第一节中，我们证明，如 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ 或 $\Delta =$ 超球的调和算子(秩为 1 的典型域)，则 $H(\Delta) = (\Delta)$，即(Δ)是素的．在第二节中，讨论了当 $T_1, \cdots T_m$ 是常系数时，$(T_1, \cdots T_m)$为素理想的充分条件，并不要求它们有 Poisson 核．在第三节中，讨论了当 $T_1, \cdots T_m$ 为变系数时的情况，给出了$(T_1, \cdots T_m)$成为素理想的充分条件，主要是要求它们具有某种群不变性和公共的"Poisson 核"．在第四节中，以 $R_I(2)$为例，给出了使 Poisson 核零化的微分算子理想的基．

1

熟知，通常 $\mathscr{R}^n$ 的 Laplace 算子

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{1.1}$$

有基本解 $1/r^{n-2}$，$r = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$\forall (a_1, \cdots a_n) \in \mathscr{R}^n$．我们欲证，一切使 $1/r^{n-2}$ 零化的微分算子组成以 Δ 为基的主理想．

我们以 P_m 表 m 次齐式所成空间．满足 $\Delta f = 0$ 的 $f \in P_m$ 称为 m 次调和齐式，全体 m 次调和齐式所成空间记为 H_m.

引理 1 任何 $p_m(x_1, \cdots x_n) \in P_m$，可以唯一表成

$$p_m(x_1, \cdots x_n) = p_{m-2}(x_1, \cdots x_n) r^2 + h_m(x_1, \cdots x_n), \tag{1.2}$$

其中 $p_{m-2} \in P_{m-2}$，$h_m \in H_m$，$r^2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)$.

证 考虑同态 Δ: $P_m \to P_{m-2}$，$p_m \to \Delta p_m$．显然，$H_m = \mathrm{Ker}\,\Delta$．在 P_m 中取子空间 $r^2 P_{m-2}$，则 $\Delta(r^2 P_{m-2}) = P_{m-2}$，这只要看 $\dim r^2 P_{m-2} = \dim P_{m-2}$ 和如

$$\Delta r^2 p_{m-2} = 0 \Rightarrow p_{m-2} = 0$$

即可．

因此，对任何 $p_m \in P_m$，$\Delta p_m \in P_{m-2}$，由上述，存在 $p_{m-2} \in P_{m-2}$，使 $\Delta p_m = \Delta(r^2 p_{m-2})$，令 $p_m - r^2 p_{m-2} = h_m$，显然，$h_m \in H_m$，即 $p_m = r^2 p_{m-2} + h_m$．至于分解的唯一性是显然的，引理证毕．

引理 2 任何微分算子 T，如 $T(\Sigma(x_i - a_i)^2)^{-\frac{n-2}{2}} = 0$，$\forall (a_1, \cdots a_n) \in \mathscr{R}^n$，则 T 亦使一切调和齐式为零．

证 记 $x = (x_1, \cdots x_n)$，$a = (a_1, \cdots a_n)$，$(x, x) = \Sigma x_i^2$，$r = \sqrt{(x, x)}$．令

$$\xi = x/r \in \mathscr{R}^n.$$

考虑 $\Sigma(a_i - t x_i)^2$，其中$(a, a) = 1$，则

$$\Sigma(a_i-tx_i)^2=t^2\Sigma\left(x_i-\frac{a_i}{t}\right)^2=t^2r^2+\Sigma a_i^2-2t(a,\ x)$$
$$=1+t^2r^2-2tr(a,\ \xi). \tag{1.3}$$

由熟知的等式[4],

$$(1+t^2r^2-2rt(a,\ \xi))^{-\frac{n-2}{2}}=\sum_{m=0}^{\infty}h_m(x_1,\ \cdots x_n)t^m, \tag{1.4}$$

其中 $h_m(x_1,\ \cdots x_n)\in H_m$, 并且当 a 遍历单位球 $(a,\ a)=1$ 时, $\{h_m(x_1,\ \cdots x_n)\}$ 可以线性生成一切 m 次调和齐式.

因此, 如 $T(\Sigma(x_i-a_i)^2)^{-\frac{n-2}{2}}=0$, 由(1.3), 亦有 $T(1+t^2r^2-2tr(a,\ \xi))^{-\frac{n-2}{2}}=0$, $\forall a$ 和 t, 再由(1.4), 即知 $Th_m=0$, 因而亦使 H_m 零化. 证毕.

定理 1　设 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, 则 (Δ) 是素理想.

证　因 Δ 有基本解 $1/r^{n-2}$, $r=(\Sigma(x_i-a_i)^2)^{\frac{1}{2}}$, $\forall a_i\in\mathscr{R}$, 故只要证, 一切使 $1/r^{n-2}$ 零化的微分算子均属于理想 (Δ) 即可.

设　$T=\Sigma a_{i_1\cdots i_n}(x)\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}\in H(\Delta)$, ($H(\Delta)$, (Δ) 意义均见本文序言), 因而 $T(\Sigma(x_i-a_i)^2)^{-\frac{n-2}{2}}=0$, $\forall a_i\in\mathscr{R}$.

任意固定一点 x^0, 令 $y=x-x^0$, 那么

$$0=T(\Sigma(x_i-a_i)^2)^{-\frac{n-2}{2}}\Big|_x=\Sigma a_{i_1\cdots i_n}(y+x^0)\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial y_1^{i_1}\cdots\partial y_n^{i_n}}(\Sigma(y_i+x_i^0-a_i)^2)^{-\frac{n-2}{2}}\Big|_y.$$

令

$$\Sigma a_{i_1\cdots i_n}(y+x^0)\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial y_1^{i_1}\cdots\partial y_n^{i_n}}=\widetilde{T}_y,$$

那么上式即 $\widetilde{T}_y(\Sigma(y_i+x_i^0-a_i)^2)^{-\frac{n-2}{2}}=0$, $\forall a_i\in\mathscr{R}$. 因 a_i 可任意, 因此

$$\widetilde{T}_y(\Sigma(y_i-a_i)^2)^{-\frac{n-2}{2}}=0,\ \forall a_i\in\mathscr{R}. \tag{1.5}$$

令 $y=0$, $\widetilde{T}_y$ 在 0 的值

$$\widetilde{T}_y(0)=\Sigma a_{i_1\cdots i_n}(x^0)\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial y_1^{i_1}\cdots\partial y_n^{i_n}}\overset{\text{记作}}{=\!=}\widetilde{T}_0, \tag{1.6}$$

成为对 $\frac{\partial}{\partial y_i}$ $(i=1,\ \cdots n)$ 的常系数微分算子. 由(1.5)和 a_i 可以任意, 因而 $\widetilde{T}_0$ 亦使 $(\Sigma(y_i-a_i)^2)^{-\frac{n-2}{2}}$ 零化. 以 T_i 表 $\frac{\partial}{\partial y_i}$, 那么 $\widetilde{T}_0$ 可写为

$$\widetilde{T}_0=\Sigma b_{i_1\cdots i_n}T_1^{i_1}\cdots T_n^{i_n},\ b_{i_1\cdots i_n}=a_{i_1\cdots i_n}(x^0).$$

由引理 1, 存在常系数微分算子 $q(T_1,\ \cdots T_n)$ 和 $h(T_1,\ \cdots T_n)$, 使

$$\widetilde{T}_0=q(T_1,\ \cdots T_n)(T_1^2+\cdots T_n^2)+h(T_1,\ \cdots T_n), \tag{1.7}$$

其中 $h(T_1,\ \cdots T_n)$ 中将 T_i 换成 y_i 则是 y 的调和多项式. 因 $\widetilde{T}_0(\Sigma(y_i-a_i)^2)^{-\frac{n-2}{2}}=0$, 由引理 2, $\widetilde{T}_0$ 使一切调和多项式零化. 如 $h(T_1,\ \cdots T_n)=\Sigma C_{i_1\cdots i_n}T_1^{i_1}\cdots T_n^{i_n}$, 取其相应的多项式 $h(y_1,\ \cdots y_n)=\Sigma C_{i_1\cdots i_n}y_1^{i_1}\cdots y_n^{i_n}$, 则

$$h(T_1,\ \cdots T_n)h(y_1,\ \cdots y_n)\big|_{y=0}=\Sigma C_{i_1\cdots i_n}\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial y_1^{i_1}\cdots\partial y_n^{i_n}}(\Sigma C_{i_1\cdots i_n}y_1^{i_1}\cdots y_n^{i_n})$$
$$=\Sigma i_1!\cdots i_n!C_{i_1\cdots i_n}^2.$$

将(1.7)作用到$h(y_1, \cdots y_n)$上去，在$y=0$进行计算，注意$\widetilde{T}_0$使一切调和多项式零化，因而

$$0=\widetilde{T}_0 h(y_1, \cdots y_n)=[q(T_1, \cdots T_n)(T_1^2+\cdots T_n^2)+h(T_1, \cdots T_n)]h(y_1, \cdots y_n)$$
$$=h(T_1, \cdots T_n)h(y_1, \cdots y_n)=\Sigma C_{i_1\cdots i_n}^2 i_1!\cdots i_n!.$$

所以
$$C_{i_1\cdots i_n}=0.$$
因此
$$\widetilde{T}_0=q(T_1, \cdots T_n)(T_1^2+\cdots+T_n^2), \tag{1.8}$$
此即
$$\Sigma a_{i_1\cdots i_n}(x^0)\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial y_1^{i_1}\cdots\partial y_n^{i_n}}=q\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial y_n}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\right).$$
换回$x=y+x^0$，注意到$\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial y_i}$，$q\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial y_n}\right)$的系数原只和$x^0$有关，今$x^0$任取，故得
$$T=\Sigma a_{i_1\cdots i_n}(x)\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}=Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)=Q\Delta\subset(\Delta).$$

定理证毕.

系　任何常系数微分算子$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$使$(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{-\frac{n-2}{2}}$零化者，一定组成以$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$为基的主理想.

证　因为当$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$为常系数时，其使$(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{-\frac{n-2}{2}}$零化，一定就使$(\Sigma(x_i-a_i)^2)^{-\frac{n-2}{2}}$零化，$\forall a_i\in\mathscr{R}$，然后由定理1即得.

下面记$z=(z_1, \cdots z_n)$，$u=(u_1, \cdots u_n)$，z_i, $u_i\in$ 复数域$\mathscr{C}$. 记$\Delta_0=\Sigma\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_i}$，我们称关于$z$, $\bar{z}$的m次齐式f满足$\Delta_0 f=0$为m次调和齐式. 全体m次调和齐式所成空间记作H_m.

以B记n维复超球　$z\bar{z}'=\Sigma z_i\bar{z}_i<1$，熟知，$B$的Laplace为
$$\Delta=(1-z\bar{z}')\Sigma(\delta_{ij}-z_i\bar{z}_j)\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}. \tag{1.9}$$
由超球的调和函数论[2]，Δ的Poisson核是
$$P(z, u)=(1-z\bar{z}')^n/|1-z\bar{u}'|^{2n},\ z\in B,\ u\in\partial B=\{u\bar{u}'=1\}$$
我们首先要研究$P(z, u)$的展开与调和多项式的关系.

由$(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$，$a_k=\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)}$，得
$$P(z, u)=(1-z\bar{z}')^n\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z\bar{u}')^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\bar{z}u')^k\right)=\sum_{m=0}^{\infty}h_m(z, u). \tag{1.10}$$
$$h_m(z, u)=\sum_{k+l=m}a_k a_l(z\bar{u}')^k(\bar{z}u')^l-C_n^1(z\bar{z}')\sum_{k+l=m-2}a_k a_l(z\bar{u}')^k(\bar{z}u')^l+$$
$$\cdots+(-1)^\nu C_n^\nu(z\bar{z}')^\nu\sum_{k+l=m-2\nu}a_k a_l(z\bar{u}')^k(\bar{z}u')^l, \tag{1.11}$$
这里$\nu=\min\left\{n, \left[\frac{m}{2}\right]\right\}$. 由上式可见，$h_m(z, u)$的各项对$z$, $\bar{z}$是齐次的，对u, $\bar{u}$也是齐次的. 但对u而言，u_i, $\bar{u}_i(i=1, \cdots n)$并非全都独立，而必须在条件

$$u_1\bar{v}_1+\cdots+u_n\bar{u}_n=1 \tag{1.12}$$

下进行"约化". 约化的规则是, $u_1\bar{v}_1$ 一律代之以 $1-u_2\bar{u}_2-\cdots-u_n\bar{u}_n$. 显然, 任何单项式经过约化, 最高次数不变, 但可能出现低两次的项. 今后我们将不再能约化的单项式(对 u_i, $\bar{u}_i$ 而言)称为既约单项式. 显然, 单项式 $u_1^{i_1}\cdots u_n^{i_n}\bar{u}_1^{j_1}\cdots\bar{u}_n^{j_n}$ 是既约的充要条件为 $i_1\cdot j_1=0$.

引理3 设多项式 $f(z, u)$ 对 z, $\bar{z}$ 是 m 次的, 对 u, $\bar{u}$ 也是 m 次的, 并满足:

1° $f(z, u)$ 是 $z\bar{u}'$, $\bar{z}u'$ 的实系数 m 次齐式, $f(z, u)=F(z\bar{u}', \bar{z}u')$.

2° $f(z, u)$ 中出现所有的单项式 $z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}\bar{z}_1^{j_1}\cdots\bar{z}_n^{j_n}$, $\forall_{i,j}$ 满足 $\Sigma i+\Sigma j=m$.

那么 $f(z, u)$ 在 $u_1\bar{u}_1=1-u_2\bar{u}_2-\cdots-u_n\bar{u}_n$ 的尽可能约化下

$$f(z, u)=\Sigma a_i(z)b_i(u)+\text{对 } u, \bar{u} \text{ 不高于 } m-2 \text{ 次项}, \tag{1.13}$$

其中 $b_i(u)$ 是对 u, $\bar{u}$ 彼此独立的 m 次既约单项式, 则有:

1° 所有 $a_i(z)$ 是对 z, $\bar{z}$ 的 m 次调和齐式, 系数是实的;

2° $\{a_i(z)\}$ 线性无关;

3° $\{a_i(z)\}$ 组成 m 次调和齐式空间 H_m 的一组基.

证

1° 事实上, 任意固定 u, $u\bar{u}'=1$, 作 U, $U\bar{U}'=I$, 使

$$U=\begin{pmatrix} \bar{v}_1 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{v}_n & * & \cdots & * \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

考虑变换 $w=zU$, 那么不难验证

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial w_i\partial\bar{w}_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_i}=\Delta_0,\ w=zU=(w_1, \cdots w_n)$$

则

$$\begin{aligned}\Delta_0 f(z, u)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_i}f(z, u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial w_i\partial\bar{w}_i}F(z\bar{u}', \bar{z}u')\\ &=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial w_i\partial\bar{w}_i}F(w_1, \bar{w}_1)\quad(\text{由}(1.14),\ w_1=z\bar{u}')\\ &=\sum_{i+j=m-2}a_{ij}w_1^i\bar{w}_1^j=\sum_{i+j=m-2}a_{ij}(z\bar{u}')^i(\bar{z}u')^j.\end{aligned} \tag{1.15}$$

另一方面, 由假设(1.13)

$$\Delta_0 f(z, u)=\sum_i(\Delta_0 a_i(z))b_i(u)b_i(u)+\text{对 } u, \bar{u} \text{ 不高于 } m-2 \text{ 次项}, \tag{1.16}$$

但(1.15)经过约化

$$\sum_{i+j=m-2}a_{ij}(z\bar{u}')^i(\bar{z}u')^j=\text{对 } u, \bar{u} \text{ 不高于 } m-2 \text{ 次项}. \tag{1.17}$$

比较(1.15), (1.16), (1.17), 注意到 $b_i(u)$ 是彼此独立的, 因而得到 $\Delta_0 a_i(z)=0$, $a_i(z)\in H_m$. 至于 $a_i(z)$ 是实系数的, 由 $f(z, u)$ 的假定即可推知, 因为约化过程不会改变系数的实性.

2° $\{a_i(z)\}$ 线性无关.

依假定, $f(z, u)=F(z\bar{u}', \bar{z}u')$, 因此展开后 z_i 和 $\bar{u}_i$, $\bar{z}_i$ 和 u_i 的次数相同, 同时因它包含一切 $z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}\bar{z}_1^{j_1}\cdots\bar{z}_n^{j_n}$ 项, 因而

$$f(z,\ u)=\Sigma a_{i,j}z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}\bar z_1^{j_1}\cdots\bar z_n^{j_n}\bar u_1^{i_1}\cdots\bar u_n^{i_n}u_1^{j_1}\cdots u_n^{j_n},\ a_{ij}\neq 0,$$

$$\forall\, i=(i_1,\ \cdots i_n),\ j=(j_1,\ \cdots j_n),\ \Sigma_i+\Sigma_j=m, \tag{1.18}$$

经过约化，一切 $\bar u_1^{i_1}\cdots\bar u_n^{i_n}u_1^{j_1}\cdots u_n^{j_n}(i_1\geqslant 1,\ j_1\geqslant 1)$ 都要约化到既约项去，而对任一既约项，例如 $u_1^{i_1^0}\cdots u_n^{i_n^0}\bar u_1^{j_1^0}\cdots\bar u_n^{j_n^0}(i_1^0\cdot j_1^0=0)$，它是 (1.13) 中的某一 $b_{i_0}(u)$，作为它的系数 $a_{i_0}(z)$，由 (1.18) 一定包含 $z_1^{i_1^0}\cdots z_n^{i_n^0}\bar z_1^{j_1^0}\cdots\bar z_n^{j_n^0}$，而这一单项是(1.13)中其它任何 $a_i(z)\ (i\neq i_0)$ 所不含有的，因为所有 $a_i(z)\ (i\neq i_0)$ 中项除了本身独有的单项外都是由 (1.18) 中那些可约化项(即 $z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}\bar z_1^{j_1}\cdots\bar z_n^{j_n}$，$i_1\geqslant 1$，$j_1\geqslant 1$) 组合而来．既然每个 $a_i(z)$ 都含有一特殊单项为其它 $a_j(z)\ (j\neq i)$ 所不含有，$\{a_i(z)\}$ 自然是线性无关的．

3° $\{a_i(z)\}$组成 H_m 的一组基．

证明的方法是计算维数．依假定，$f(z,\ u)$ 含有一切既约项，既约项的个数也就是全部 $\{a_i(z)\}$ 的个数．记 $d_{m,k}$ 为 k 个变量的 m 次齐式所成空间的维数，熟知

$$d_{m,k}=\frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(k)\Gamma(m+1)}=C_{m+k-1}^{k-1}. \tag{1.19}$$

而既约项分为三类：$i_1=0,\ j_1\neq 0$；$i_1\neq 0,\ j_1=0$；$i_1=0,\ j_1=0$．$i_1=0$ 的共 $d_{m,2n-1}$ 项，$j_1=0$ 的共 $d_{m,2n-1}$ 项，$i_1=j_1=0$ 的共 $d_{m,2n-2}$ 项，因此全部既约项共计

$$2(d_{m,2n-1}-d_{m,2n-2})+d_{m,2n-2}=2d_{m,2n-1}-d_{m,2n-2}$$

项．另一方面，关于 $z,\ \bar z$ 的 m 次调和式的维数由引理1知是，$\dim H_m=d_{m,2n}-d_{m-2,2n}$，因此只需验证

$$d_{m,2n}-d_{m-2,2n}=2d_{m,2n-1}-d_{m,2n-2}.$$

由(1.19)，这是极易复验的．引理至此证毕．

注　本引理有着独立的兴趣．它给出了一种调和齐式完全组的新作法．我们可以从满足引理条件的任何齐式，例如 $\sum\limits_{k+l=m}(z\bar u')^k(\bar zu')^l$ 出发，经过约化，则全体 $u,\ \bar u$ 的既约项的系数就构成 H_m 的一组基．

现在回到超球的 Poisson 核 $P(z,\ u)$，由(1.10)，$P(z,\ u)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}h_m(z,\ u)$，将 $h_m(z,\ u)$ 对 $u,\ \bar u$ 进行约化，由(1.11)

$$\begin{aligned}h_m(z,\ u)&=\sum_{k+l=m}a_ka_l(z\bar u')^k(\bar zu')^l+\text{对 } u,\ \bar u \text{ 的低次项}\\&=\sum_{i=1}^{d_m}a_m^{(i)}(z)b_m^{(i)}(u)+\text{对 } u,\ \bar u \text{ 的低次项}.\end{aligned} \tag{1.20}$$

因 $\sum\limits_{k+l=m}a_ka_l(z\bar u')^k(\bar zu')^l$ 显然满足引理3的条件，因而 $\{a_m^{(i)}(z)\}$ 构成 H_m 的一组基，

$$d_m=\dim H_m.$$

引理4　设最高阶为 l 的常系数微分算子 T 满足

$$TP(z,\ u)\big|_{z=0}=0. \tag{1.21}$$

将 T 按各阶齐次展开 $T=T^{(l)}+T^{(l-1)}+\cdots+T^{(0)}$，$T^{(i)}$ 为 i 阶微分算子，则

$$T^{(l)}H_l=0. \tag{1.22}$$

证　由(1.10)，(1.21)，(1.20)，得

$$\begin{aligned}0=TP(z,\ u)\Big|_{z=0}&=\sum_{m=0}^{\infty}Th_m(z,\ u)\Big|_{z=0}=\sum_{m=0}^{l}T^{(m)}h_m(z,u)\Big|_{z=0}\\&=\sum_{m=0}^{l}T^{(m)}\Big(\sum_{i=0}^{d_m}a_m^{(i)}(z)b_m^{(i)}(u)+\text{对 } u,\ \bar u \text{ 的低次项}\Big)\end{aligned}$$

$$=\sum_{i=0}^{d_l} T^{(l)} a_l^{(i)}(z) b_l^{(i)}(u) + \text{对 } u,\ \bar{u} \text{ 的低于 } l \text{ 次项} = 0.$$

由引理，$\{b_l^{(i)}(u)\}$ 是独立的，故

$$T^{(l)} a_l^{(i)}(z) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant d_l.$$

而 $\{a_l^{(i)}(z)\}$ 构成 H_l 的一组基，故 $T^{(l)} H_l = 0$.

定理 2　以 $\varDelta$ 记超球 $\sum_{i=1}^{n} z_i \bar{z}_i < 1$ 的 Laplace 算子

$$\varDelta = (1 - z\bar{z}') \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - z_i \bar{z}_j) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j},$$

则 $H(\varDelta) = (\varDelta)$，即 $(\varDelta)$ 是素理想.

证　因 $\varDelta$ 具 Poisson 核 $P(z, u) = 0$，$\varDelta P(z, u) = 0$，$\forall u$，$u\bar{u}' = 1$. 设

$$T\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \sum_{i+j<l} a_{i_1 \cdots i_n j_1 \cdots j_n}(z, \bar{z}) \frac{\partial^{i_1 + \cdots + j_n}}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_n^{i_n} \partial \bar{z}_1^{j_1} \cdots \partial \bar{z}_n^{j_n}} \in H(\varDelta).$$

因而 $TP(z, u) = 0$，$\forall u\bar{u}' = 1$. 取 $z = 0$，记

$$T\left(0, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \sum_{i+j<l} a_{i_1 \cdots i_n j_1 \cdots j_n}(0) \frac{\partial^{i_1 + \cdots + j_n}}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_n^{i_n} \partial \bar{z}_1^{j_1} \cdots \partial \bar{z}_n^{j_n}} = T_0$$

$$= T_0^{(l)} + T_0^{(l-1)} + \cdots + T_0^{(0)}. \tag{1.23}$$

$T_0^{(i)}$ 是 T_0 的各阶齐次项. 因 $TP(z, u) = 0$. 所以，$T_0 P(z, u)|_{z=0} = 0$.

由引理 4

$$T_0^{(l)} H_l = 0. \tag{1.24}$$

H_l 是关于 z, $\bar{z}$ 的 l 次调和齐式所成空间.

由引理 1，存在 $l-2$ 次常系数微分算子 $q\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$ 和 l 次常系数微分算子 $h\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$，使

$$T_0^{(l)} = q\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \varDelta_0 + h\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right). \tag{1.25}$$

这里的 $h\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$ 如将 $\frac{\partial}{\partial z} \to z$，得到的齐式 $h(z, \bar{z}) \in H_l$. 由引理 3，(1.20) 中的 $\{a_l^{(i)}(z)\}$，$1 \leqslant i \leqslant d_l$ 组成 H_l 的一组基，今 $h(z, \bar{z}) \in H_l$，因而存在 $b_i \in \mathscr{C}(1 \leqslant i \leqslant d_l)$，使

$$h(z, \bar{z}) = \sum_{i=1}^{d_l} b_i a_l^{(i)}(z) = \Sigma b_{i_1 \cdots i_n j_1 \cdots j_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} \bar{z}_1^{j_1} \cdots \bar{z}_n^{j_n}.$$

仍由引理 3，$a_l^{(i)}(z)$ 的系数是实的，所以

$$\hat{h}(z, \bar{z}) = \sum_{i=1}^{d_l} \bar{b}_i a_l^{(i)} = \Sigma \bar{b}_{i_1 \cdots i_n j_1 \cdots j_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} \bar{z}_1^{j_1} \cdots \bar{z}_n^{j_n}$$

仍在 H_l 之中. 将 (1.25) 作用到 $\hat{h}(z, \bar{z})$ 上，注意 $T_0^{(l)} H_l = 0$，$\varDelta_0 H_l = 0$，因而有

$$0 = h\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \hat{h}(z, \bar{z}) = \Sigma b_{i_1 \cdots i_n j_1 \cdots j_n} \frac{\partial^{i_1 + \cdots + j_n}}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial \bar{z}_n^{j_n}} (\Sigma \bar{b}_{i_1 \cdots i_n j_1 \cdots j_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} \bar{z}_1^{j_1} \cdots \bar{z}_n^{j_n})$$

$$= \Sigma i_1! \cdots i_n! j_1! \cdots j_n! |b_{i_1 \cdots i_n j_1 \cdots j_n}|^2.$$

故 $b_{i_1 \cdots i_n j_1 \cdots j_n} = 0$，(1.25) 成为

$$T_0^{(l)} = q\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \varDelta_0. \tag{1.26}$$

在多复变典型域的理论[1]中熟知，对于超球 B: $z\bar{z}'<1$ 及其边界 ∂B 的任意点对 $(z, u)\in Bx\partial B$，可以通过 B 的一个解析自同胚 γ，将 $(z, u)\xrightarrow{r}(w, v)$ 其中 $w\in B$ 可予先指定，并且 Poisson 核还满足

$$P(w, v)=\frac{P(z, u)}{P(z_0, u)}, \tag{1.27}$$

这里 $z_0=\gamma^{-1}(0)$.

现在任意固定 $z_0\in B$，考虑 B 的解析自同胚 γ

$$\gamma:\ z_0\to 0,\quad (z, u)\to(w, v). \tag{1.28}$$

设 γ 的表达式为 $w=f(z; z_0)$，由(1.27)

$$TP(z, u)\,|_{z_0}=[T_wP(w, v)]_{w=0}P(z_0, u)=0, \tag{1.29}$$

这里 T_w 是算子 $T\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ 经 $w=f(z; z_0)$ 变换而来，即

$$T_w\left(0, \frac{\partial}{\partial w}\right)=T\left(z_0, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.30}$$

因 $P(z_0, u)\neq 0$，因此由(1.29)

$$T_w\left(0, \frac{\partial}{\partial w}\right)P(w, v)\,|_{w=0}=0,\ \forall v\in\partial B,$$

于是，由上面的全部讨论，得

$$T_w\left(0, \frac{\partial}{\partial w}\right)=Q\left(\frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w_1\partial\bar{w}_1}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial w_n\partial\bar{w}_n}\right)+\text{低次项}. \tag{1.31}$$

现在回到 B 的 Laplace 算子

$$\varDelta\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)=(1-z\bar{z}')\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_{ij}-z_i\bar{z}_j)\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}$$

熟知，$\varDelta$ 是 B 的不变微分算子，即如果 γ: $z\to w$ 是 B 的解析自同胚，那么[1]

$$\varDelta\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)=\varDelta\left(w, \frac{\partial}{\partial w}\right). \tag{1.32}$$

今取 γ 为(1.28)所示，那么有

$$\varDelta\left(z_0, \frac{\partial}{\partial z}\right)=\varDelta\left(0, \frac{\partial}{\partial w}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial w_i\partial\bar{w}_i},$$

于是由(1.30)，(1.31)得

$$T\left(z_0, \frac{\partial}{\partial z}\right)=Q^*\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\varDelta\left(z_0, \frac{\partial}{\partial z}\right)+\text{低次项} \tag{1.33}$$

因 z_0 是任意固定的，上式即

$$T=Q^*\varDelta+T_1,\quad T_1\text{ 的次数 }<T\text{ 的次数}, \tag{1.34}$$

但 $T_1=T-Q^*\varDelta$ 仍使 $P(z, u)$ 零化，对次数作归纳法，直到次数为 1，而一阶微分算子使 $P(z, u)$ 零化者只能恒为零，因为由引理 4，这样的一阶算子必须使所有的 z_i 和 $\bar{z}_i$ 零化．这样，最后得到

$$T=Q\varDelta\in(\varDelta).$$

证毕.

2

本节研究常系数微分算子组 $T_1, \cdots T_m$, 使 $(T_1, \cdots T_m)$ 成为素理想的充分条件. 讨论的基础是 Maaß. H 关于广义调和形式的一个结果[3]:

定理(Maaß. H)　设齐次形式 $f_1(x), \cdots f_q(x) \in \mathscr{R}[x_1, \cdots x_n]$, 其组成的多项式理想 $(f_1, \cdots f_q)$ 是素的, 又设 $f_1, \cdots f_q$ 的公共零点集为 $\Omega(\subset \mathscr{C}^n)$, 则任何一个 k 次齐式 $u(x)$ 可以表成

$$u(x)=\sum_{i=1}^{q} p_i(x) f_i(x)+\Sigma(a_i' x)^k, \quad a_i=(a_i^1, \cdots a_i^n) \in \Omega, \tag{2.1}$$

这里 $a_i'x$ 表 a_i 和 x 的内积. 注意, 如果 $f(x)$ 是 g 次齐式 $f(x)=\sum\limits_{\Sigma i=g} a_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$, 那么不难验证

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(a'x)^k=\sum_{\Sigma i=g} a_{i_1\cdots i_n} \frac{\partial^g}{\partial x_1^{i_1}\cdots \partial x_n^{i_n}}(a'x)^k=\begin{cases} g!\,C_k^g f(a)(a'x)^{k-g}, & k \geqslant g, \\ 0, & k<g. \end{cases} \tag{2.2}$$

因此, 如果 a 是 $f(x)$ 的零点, 则

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(a'x)^k=0, \quad \forall k \in \mathscr{Z}^+. \tag{2.3}$$

定理 3　设 $T_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \cdots, T_m\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ 是具实的常系数齐次微分算子, 如果相应的齐式 $T_1(x_1, \cdots x_n), \cdots, T_m(x_1, \cdots x_n)$ 生成的理想 $(T_1, \cdots T_m)$ 是素的, 那么在常系数微分算子环中 $\left(T_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \cdots, T_m\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right)$ 也构成素理想.

证　设常系数微分算子 $G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \in H(T_1, \cdots T_m)$, $H(T_1, \cdots T_m)$ 的意义如引言所述, 要证 $G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \in (T_1, \cdots T_m)$. 写出 $G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ 的相应多项式: $G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \to G(x_1, \cdots x_n)=G$, 设 $G=G_1+\cdots+G_l$ 是各阶齐式的分解. 对每一 G_i 引用 Maaß 定理的分解(2.1), 得

$$G(x_1, \cdots x_n)=\sum_{i=1}^{m} Q_i(x_1, \cdots x_n) T_i(x_1, \cdots x_n)+\Sigma(a_i'x)^l+\Sigma(b_i'x)^{l-1}+\cdots+\Sigma(c_i'x), \tag{2.4}$$

$$a_i, b_i, \cdots, c_i \in \Omega,$$

这里 Ω 是 $T_i(x_1, \cdots x_n)$ $(i=1, \cdots m)$ 的公共零点集. 因此, 由(2.3), 对 $1 \leqslant j \leqslant m$, 有

$$T_j\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)(a_i'x)^l=0, \quad \cdots, \quad T_j\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)(c_i'x)=0, \tag{2.5}$$

由定理假设, 诸 $T_j\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ 具实系数, 因此 $(\bar{a}_i'x)^l$, $(\bar{b}_i'x)^{l-1}, \cdots (\bar{c}_i'x)$ 同样满足

$$T_j\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)(\bar{a}_i'x)^l=0, \quad \cdots, \quad T_j\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)(\bar{c}_i'x)=0, \quad \forall\, 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{2.6}$$

记 $\Sigma(a_i'x)^l=\sum\limits_{\Sigma i=g} a_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}, \cdots \Sigma(c_i'x)=\sum\limits_{\Sigma i=1} c_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$, 那么(2.4)相应成为

$$G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)=\sum_{i=1}^{m} Q_i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) T_i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$
$$+\sum_{\Sigma i=l} a_{i_1\cdots i_n} \frac{\partial^l}{\partial x_1^{i_1}\cdots \partial x_n^{i_n}}+\sum_{\Sigma i=l-1} b_{i_1\cdots i_n} \frac{\partial^{l-1}}{\partial x_1^{i_1}\cdots \partial x_n^{i_n}}$$
$$+\cdots+\sum_{\Sigma i=1} c_{i_1\cdots i_n} \frac{\partial}{\partial x_1^{i_1}\cdots \partial x_n^{i_n}}. \tag{2.7}$$

由(2.6), $\Sigma(\overline{a}_i' x)^l$ 是 $T_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $\cdots T_m\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ 的公共解，因而也是 $G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ 的解 $\left(\because G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \in H(T_1, \cdots T_m)\right)$, 将(2.7)作用于 $\Sigma(\overline{a}_i' x)^l=\Sigma \overline{a}_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$, 即得

$$0=\Sigma|a_{i_1\cdots i_n}^2| i_1!\cdots i_n!+x \text{ 的高于零次项}.$$

因而 $a_{i_1\cdots i_n=0}$, 即 $\Sigma(\overline{a}_i' x)^l=\Sigma(a_i' x)^l=0$. 在此基础上，再将(2.7)作用于 $\Sigma(\overline{b}_i' x)^{l-1}$, 同样有 $\Sigma(b_i' x)^{l-1}=0$, 如此下去，最后有

$$G\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)=\Sigma Q_i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) T_i\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \in (T_1, \cdots T_m).$$

证毕.

系 如果 $F(x_1, \cdots x_n)$ 是实系数不可约齐式，那么在常系数微分算子环中，$\left(F\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right)$ 是素理想.

证 由 Nullstelensatz, $(F(x_1, \cdots x_n))$ 作为多项式理想是素的，然后由定理3即得.

3

下面讨论变系数的微分算子组. 设 M 是 $\mathscr{R}^n$ 中一域，不妨设 $0 \in M$, 且具有一可递的变换群 G.

定义 M 上一组线性微分算子 $T_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots, T_m\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ 称为 G-不变的，如果 $\forall x, y \in M, y=xg, g \in G$ 都有

$$T_i\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(y) T_j\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right), \quad i=1, \cdots m. \tag{3.1}$$

而 $a_{ij}(y) \in C^\infty(M)$.

定义 线性微分算子组下 $T_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots, T_m\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ 称为具有一"Poisson 核" $P(x, t)$, $x \in M$, $t \in N$, 这里 N 是某一在 G 下可递的流形. 如果满足:

1° $$T_i\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) P(x, t)=0, \ \forall t \in N, \ 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{3.2}$$

2° 对 $g \in G$, $x_0 \to 0$, $(x, t) \to (y, t')$, 成立

$$P(x, t)=P(y, t') f(x_0; t, t'), \ f(x_0; t, t') \neq 0. \tag{3.3}$$

我们还需要下面的

定义 设线性微分算子组 $T_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $\cdots$, $T_m\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ 具有一满足(3.2), (3.3)的 Poisson 核 $P(x, t)$. 如果对任何常系数微分算子 $T\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, 满足

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)P(x, t)\big|_{x=0}=0, \ \forall t\in N \tag{3.4}$$

就导致

$$T\in\left(T_1\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots T_m\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right), \tag{3.5}$$

那么我们称 $T_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $\cdots$, $T_m\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ 对 $P(x, t)$ 是完全的.

定理 4 设 M 在群 G 下可递, M 上的线性微分算子组 $T_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $\cdots$, $T_m\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ 满足:

1° 它是 G-不变的;

2° 它有一 Poisson 核 $P(x, t)$, 并且对 $P(x, t)$ 是完全的则理想 $\left(T_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots, T_m\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$是素的.

证 设 $T\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\in H(T_1, \cdots T_m)$, 因而 $T\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)P(x, t)=0$, $\forall x\in M$, $t\in N$. 现任意固定 $x_0\in M$, 由 M 在 G 下可递, 存在 $g_0\in M$, 使 $g_0: x_0\to 0$. 设在 g_0 下, $(x, t)\to(y, t')$. 于是由(3.3)

$$T\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)P(x, t)\bigg|_{x=x_0}=T^*\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)P(y, t')f(x_0; t, t')\bigg|_{y=0}=0.$$

这里 $T^*\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ 是由 $T\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ 经变换 $y=xg_0$ 而来, 因此, $T\left(x_0, \frac{\partial}{\partial x}\right)=T^*\left(0, \frac{\partial}{\partial y}\right)$. 由(3.3)假定 $f(x_0; t, t')\neq 0$, 得

$$T^*\left(0, \frac{\partial}{\partial y}\right)P(y, t')\bigg|_{y=0}=0, \tag{3.6}$$

其中 t' 可遍历 N, 这是因为假定 G 亦在 N 上可递, 再根据 T_j 对 $P(x, t)$ 的完全性(3.5), 就有

$$T^*\left(0, \frac{\partial}{\partial y}\right)=\sum_{i=1}^{m}Q^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)T_i\left(0, \frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{3.7}$$

利用算子组 $T_1, \cdots T_m$ 的 G-不变性, 在(3.1)中取 $g=g_0$, 并在 $y=0$ 进行计算, 于是

$$T_i\left(0, \frac{\partial}{\partial y}\right)=\sum_{j=1}^{m}b_{ij}(x_0)T_j\left(x_0, \frac{\partial}{\partial x}\right), \ 1\leqslant i\leqslant m, \tag{3.8}$$

由(3.7)、(3.8)及 $T^*\left(0, \frac{\partial}{\partial y}\right)=T\left(x_0, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ 即得

$$T\left(x_0, \frac{\partial}{\partial x}\right)=\Sigma Q_i\left(x_0, \frac{\partial}{\partial x}\right)T_i\left(x_0, \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

因 x_0 任意, 上式即为 $T\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\equiv 0\left(T_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots, T_m\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$. 证毕.

应用定理4时难以验证的是算子组 $T_j\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ 对其 Poisson 核的完全性. 下面的定理5将给出一个方法. 为此我们引进

定义 设 $T_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots, T_m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ 为一组常系数微分算子，齐次多项式 $f(x_1, \cdots x_n)$ 称为 $\{T_1, \cdots T_m\}$-调和的，如果

$$T_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x_1, \cdots x_n)=0, \quad i=1, 2, \cdots m. \tag{3.9}$$

定理5 设 $T_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots, T_m\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ 具有 Poisson 核 $P(x, t)$，并满足:

1° 对 $T_1\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots, T_m\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ 这些实系数微分算子，如将 $\frac{\partial}{\partial x_i}\to x_i$，得到的多项式 $T_j(x_1, \cdots x_n)$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ 生成的理想 $(T_1(x_1, \cdots x_n), \cdots, T_m(x_1, \cdots x_n))$ 是素的;

2° $P(x, t)$ 在 $x=0$ 附近按 x 的方幂展开

$$P(x, t)=p_0+p_1(x, t)+p_2(x, t)+\cdots \tag{3.10}$$

其 l 次项 $(1\leqslant l<\infty)$ 又可表为

$$p_l(x, t)=\sum_i h_{ll}^{(i)}(x)\varphi_{ll}^{(i)}(t)+\sum_{k<l}\sum_j h_{lk}^{(j)}(x)\varphi_{lk}^{(j)}(t), \tag{3.11}$$

其中 $h_{ll}^{(i)}(x)$, $h_{lk}^{(j)}(x)$ 是 x 的 l 次齐式，而 $\{h_{ll}^{(i)}(x)\}$ 组成 l 次 $\left\{T_1\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots, T_m\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}$-调和齐式的基，而 $\{\varphi_{ll}^{(i)}(t), \varphi_{lk}^{(j)}(t)\}$ 在 N 上是彼此独立的(线性无关的)

则 $T_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots, T_m\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ 对 $P(x, t)$ 是完全的.

证 由完全性的定义(3.4), (3.5), 我们要证对任何常系数(可以是复的)微分算子 T, 满足 $TP(x, t)|_{x=0}=0$, 则 $T\equiv 0\left(T_1\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots, T_m\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$.

设 $T=T^{(1)}+T^{(2)}+\cdots+T^{(l)}$ 是其齐次分解，由(3.10),

$$\begin{aligned}0&=TP(x, t)|_{x=0}=T(p_0+p_1(x, t)+p_2(x, t)+\cdots|_{x=0}\\&=\sum_{i=1}^{l}T^{(i)}p_i(x, t)\Big|_{x=0}=\sum_i(T^{(l)}h_{ll}^{(i)}(x))\varphi_{ll}^{(i)}(t)+\sum_{\substack{j,k,s\\k<l,s<l}}(*)\varphi_{k,s}^{(j)}(t).\end{aligned}$$

由 $\varphi_{ll}^{(i)}(t)$, $\varphi_{ks}^{(j)}(t)$ 的独立性，得

$$T^{(l)}h_{ll}^{(i)}(x)=0,$$

而依假定，$\{h_{ll}^{(i)}(x)\}$ 是 l 次 $\left\{T_1\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots, T_m\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}$-调和式的一组基，因此，$T^{(l)}$ 可使任何 l 次 $\left\{T_1\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots T_m\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}$-调和式零化.

由假设，$(T_1(x_1, \cdots x_n), \cdots T_m(x_1, \cdots x_n))$ 是素理想，根据 H. Maaß 定理，存在多项式 $Q_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 和 l 次 $\left\{T_1\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots T_m\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}$-调和式 $h_l(x)$ (只要注意(2.1), (2.3)中的 $(a_i'x)^l$ 就是调和的), 使

$$T^{(l)}(x)=\sum_{i=1}^{m}Q_i(x)T_i(x_1, \cdots x_n)+h_l(x). \tag{3.12}$$

这里 $T^{(l)}(x)$ 是微分算子 $T^{(l)}$ 的相应齐式. 注意由上面的解释, $T^{(l)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)h_l(x)=0$. 将(3.12)写成微分算子的形式, 得

$$T^{(l)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{i=1}^{m}Q_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)T_i\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right)+h_l\left(\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{3.13}$$

因 $T_j\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ 是实系数的, 因此 $\bar{h}_l(x)$ 也是 $\left\{T_1\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots, T_m\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}$-调和的, 将(3.13)作用于 $\bar{h}_l(x)$, 即有

$$h_l\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{h}_l(x)=0.$$

即得 $h_l(x)=0$, 因而 $T^{(l)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\equiv 0\left(T_1\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots, T_m\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$. 同样考虑

$$T-T^{(l)}=T^{(l-1)}+\cdots+T^{(1)},$$

即可知最后有

$$T\equiv 0\left(T_1\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right), \cdots T_m\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right),$$

这就证明了定理.

4

本节将以 $R_I(2)$ 为例, 来讨论第三节中定理的应用. 因为只属例证, 有些细节将略去证明. 序言中已指出, 对于 $R_I(n): I-Z\bar{Z}'>0$, [1] 中已指出

$$\partial_{\bar{Z}}(I-\bar{Z}'Z)\partial'_Z, \quad \partial_Z=\left(\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right)_{1\le i, j\le n}\partial_{\bar{Z}}=\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{ij}}\right)_{1\le i, j\le n} \tag{4.1}$$

中的每一个都使其 Poisson 核零化. 事实上, 另一组

$$\partial'_Z(I-Z\bar{Z}')\partial_{\bar{Z}} \tag{4.2}$$

也使 Poisson 核零化. 这点我们可从下面看出: 熟知 $R_I(n)$ 在变换群 G

$$W=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \quad \overline{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}}'\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I\end{pmatrix}$$

下可递, 并且有

$$(I-W\bar{W}')\partial_{\bar{W}}(I-\bar{W}'W)\partial'_W=(Z\bar{B}'+\bar{A}')^{-1}(I-Z\bar{Z}')\partial_{\bar{Z}}(I-\bar{Z}'Z)\partial'_Z(Z\bar{B}'+\bar{A}'),$$

$$(I-\bar{W}'W)\partial'_W(I-W\bar{W}')\partial_{\bar{W}}=\overline{(ZC+D)}'^{-1}(I-\bar{Z}'Z)\partial'_Z(I-Z\bar{Z}')\partial_{\bar{Z}}\overline{(ZC+D)}'.$$

因此(4.1), (4.2)都是 G–不变组. 要证 (4.2) 使 Poisson 核零化, 只需在 $Z=0$ 验证即可

$$\partial'_Z\partial_{\bar{Z}}P(Z, U)\Big|_{Z=0}=\partial'_Z\partial_{\bar{Z}}\frac{\det(I-Z\bar{Z}')^n}{|\det(I-Z\bar{U}')|^{2n}}\Big|_{Z=0}=n^2\bar{U}'U-n^2I=0.$$

下面我们要证明这两组算子 (4.1), (4.2) 合起来生成一个素理想, 它们正是使 $P(Z, U)$ 零化的微分算子环.

考虑 $\partial_{\bar{Z}}\partial'_Z$, $\partial'_Z\partial_{\bar{Z}}\to\bar{Z}Z'$, $Z'\bar{Z}$, 根据定理 4 与定理 5, 最后的结论只有待于验证:

1° 由 $\bar{Z}Z'$, $Z'\bar{Z}$ 的元素生成一个多项式的素理想;

2° Poisson 核 $P(Z, U)$ 对算子组 $\{\partial_{\bar{Z}}\partial'_Z, \partial'_Z\partial_{\bar{Z}}\}$ 而言是完全的.

而要验证 2°, 必需讨论所谓 U-调和式.

定义 设 $Z=(z_{ij})$ 是 $n\times n$ 方阵, z_{ij}, $\bar{z}_{ij}$ 的多项式 $f(Z)$, 如果满足

$$\partial_{\bar{Z}}\partial'_Z f(Z)=\partial'_Z\partial_{\bar{Z}} f(Z)=0 \tag{4.3}$$

则 $f(Z)$ 称为 U-调和的.

因为 $P(Z, U)$ 中的 $U\in U(n)$. $U(n)$ 相当于定理 4 中的 N. $U=(u_{ij})$, 关于 U, $\bar{U}$ 的单项式并不全是独立的, 必须在 $U\bar{U}'=\bar{U}'U=I$ 下进行约化. (见 §1 的(1.12)). 我们有以下

引理 设 $f(Z, \bar{Z})$ 是 Z, $\bar{Z}$ 的 m 次齐式, 满足

$$f(Z\bar{U}, \bar{Z}U)=f(\bar{U}Z, \bar{Z}U),\ \forall U\in U(n),$$

那么在 $U\bar{U}'=\bar{U}'U=I$ 的条件下进行约化后

$$f(Z\bar{U}, \bar{Z}U)=\sum_{i=1}^{N_m}\varphi_i(Z, \bar{Z})\xi_i(U)+\text{对 } U, \bar{U} \text{ 的低次项}, \tag{4.4}$$

这里 $\xi_i(U)$ 是 U, $\bar{U}$ 的 m 次既约单项式, 彼此独立, 那么 $\varphi_i(Z, \bar{Z})$ 是 m 次 U-调和式.

证 因为

$$\frac{\partial}{\partial\bar{Z}}f(Z\bar{U}, \bar{Z}U)=\frac{\partial}{\partial Y}f(Z\bar{U}, Y)\Big|_{Y=\bar{Z}U}\cdot U',$$

$$\frac{\partial'}{\partial Z}f(\bar{U}Z, \bar{Z}U)=\frac{\partial'}{\partial x}f(X, \bar{Z}U)\Big|_{X=\bar{U}Z}\cdot\bar{U}.$$

因此

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{Z}}\partial'_Z f(Z\bar{U}, \bar{Z}U)&=\partial_{\bar{Z}}\partial'_Z f(\bar{U}Z, \bar{Z}U)=\partial_{\bar{Z}}\{\partial'_X f(X, \bar{Z}U)\}_{X=\bar{U}Z}\cdot\bar{U}\\&=\partial_{\bar{X}}\{\partial'_X f(X, \bar{X})\}_{\substack{X=\bar{U}Z\\ \bar{X}=\bar{Z}U}}\cdot U'\bar{U}=\partial_{\bar{X}}\partial'_X f(X, \bar{X})\Big|_{\substack{X=\bar{U}Z\\ \bar{X}=\bar{Z}U}},\end{aligned}$$

代入(4.4)中就得

$$\sum_i\partial_{\bar{Z}}\partial'_Z\varphi_i(Z, \bar{Z})\cdot\xi_i(U)+\text{对 } U, \bar{U} \text{ 的低次项}=\text{对 } U, \bar{U} \text{ 的低次项},$$

所以

$$\sum_i\partial_{\bar{Z}}\partial'_Z\varphi_i(Z, \bar{Z})\xi_i(U)=0.$$

由 $\xi_i(U)$ 的无关性, 得 $\partial_{\bar{Z}}\partial'_Z\varphi_i(Z, \bar{Z})=0$, 同理 $\partial'_Z\partial_{\bar{Z}}\varphi_i(Z, \bar{Z})=0$, 引理证毕.

现在我们将 $P(Z, U)$ 在 $Z=0$ 附近展开, 设

$$\det(I-X)^{-n}=\sum_{j=0}^{\infty}A_j(x),\ A_j(x) \text{ 是 } X \text{ 的 } j \text{ 次齐式},$$

则

$$\det(I-Z\bar{U}')^{-n}=\sum_{j=0}^{\infty}A_j(Z\bar{U}'),$$

$$\det(I-\bar{Z}U')^{-n}=\Sigma A_j(\bar{Z}U').$$

所以

$$\begin{aligned}P(Z, U)&=\det(I-Z\bar{Z}')^n\det(I-Z\bar{U}')^{-n}\det(I-\bar{Z}U')^{-n}\\&=(1-n\,\mathrm{tr}(Z\bar{Z}')+\cdots)\cdot\sum_{j=0}^{\infty}A_j(Z\bar{U}')\cdot\sum_{l=0}^{\infty}A_l(\bar{Z}U')\\&=\sum_{m=0}^{\infty}p_m(Z, U),\end{aligned}$$

$$p_m(Z,\ U)=\sum_{i+j=m}A_i(Z\overline{U}')A_j(\overline{Z}U')-n\,\mathrm{tr}(Z\overline{Z}')\sum_{i+j=m-2}A_i(Z\overline{U}')A_j(\overline{Z}U')+\cdots$$
$$=\sum_{i+j=m}A_i(Z\overline{U}')A_j(\overline{Z}U')+\text{对 } U,\ \overline{U} \text{ 的低次项} \tag{4.5}$$

不妨将 U' 看成 U，令 $f(Z,\ \overline{Z})=\sum_{i+j=m}A_i(Z)P_j(\overline{Z})$，那么因为 $A_i(Z)$ 是 $\det(I-Z)^{-n}$ 的展开项，故 $A_i(Z\overline{U})=A_i(\overline{U}Z)$，所以 $f(Z\overline{U},\ \overline{Z}U)=f(\overline{U}Z,\ \overline{Z}U)$，由以上引理，当

$$\sum_{i+j=m}A_i(Z\overline{U})A_j(\overline{Z}U)$$

对 $U\overline{U}'=\overline{U}'U=I$ 进行约化时，可得

$$p_m(Z,\ U)=\sum_{i+j=m}A_i(Z\overline{U})A_j(\overline{Z}U)+\text{对 } U,\ \overline{U} \text{ 的低次项}$$
$$=\sum_i\varphi_i(Z,\ \overline{Z})\xi_i(U)+\text{对 } U,\ \overline{U} \text{ 的低次项}, \tag{4.6}$$

其中 $\varphi_i(Z,\ \overline{Z})$ 是 U-调和式，而 $\xi_i(U)$ 是 m 次既约单项式. 进一步的讨论，还可证明，当 Z 是 2×2 方阵时，下面两事实亦成立：

命题　(4.6) 中的 $\varphi_i(Z,\ \overline{Z})$ 构成 $\{\partial_{\overline{Z}}\partial_{Z'},\ \partial_{Z'}\partial_{\overline{Z}}\}-m$ 次调和式的一组基.

命题　如 $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_{11} & y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{pmatrix}$, 则 XY, YX 的元素生成一个素理想.

取 $\overline{Z}=X$, $Y=Z'$, 即有 $\overline{Z}Z'$, $Z'\overline{Z}$ 的元素生成一个素理想.

以上两命题在 2 阶方阵时都可通过直接的. 但相当烦琐的讨论加以证明，限于篇幅，证明的细节在此不赘.

这样，根据定理 5，在 $n=2$ 时，$P(Z,\ U)$ 对 $\{\partial_{\overline{Z}}\partial_{Z'},\ \partial_{Z'}\partial_{\overline{Z}}\}$ 而言是完全的，再由定理 4 即得下面的结论：

定理　当 $n=2$ 时，$R_I(2)$ 上微分算子组

$$(\partial_{\overline{Z}}(I-\overline{Z}'Z)\partial_{Z'},\ \partial_{Z'}(I-Z\overline{Z}')\partial_{\overline{Z}}) \tag{4.7}$$

生成的理想是素的.

注　因为 $\mathrm{tr}\,\partial_{Z'}(I-Z\overline{Z}')\partial_{\overline{Z}}=\mathrm{tr}\partial_{\overline{Z}}(I-\overline{Z}'Z)\partial_{Z'}$，基 (4.7) 中有一个线性关系.

因为 $R_I(2)$ 的 LapLace 算子 $\varDelta=\mathrm{tr}[(I-Z\overline{Z}')\partial_{\overline{Z}}(I-\overline{Z}'Z)\partial_{Z'}]$ 的解由 Poisson 积分（序言中的(1)）给出，因而任何 $T\in H(\varDelta)$，必有 $TP(Z,\ U)=0$，由定理得 $T\in(\partial_{\overline{Z}}(I-\overline{Z}'Z)\partial_{Z'},\ \partial_{Z'}(I-Z\overline{Z}')\partial_{\overline{Z}})$，反之任何 $(\partial_{\overline{Z}}(I-\overline{Z}'Z)\partial_{Z'},\ \partial_{Z'}(I-Z\overline{Z}')\partial_{\overline{Z}})$ 中元素都使 Poisson 核零化，因而亦使所有调和函数零化，因而亦在 $H(\varDelta)$ 之中，故

$$H(\varDelta)=(\partial_{\overline{Z}}(I-\overline{Z}'Z)\partial_{Z'},\ \partial_{Z'}(I-Z\overline{Z}')\partial_{\overline{Z}}),$$

但显然 $(\varDelta)\subsetneqq(\partial_{\overline{Z}}(I-\overline{Z}'Z)\partial_{Z'},\ \partial_{Z'}(I-Z\overline{Z}')\partial_{\overline{Z}})$，这样就有

$$(\varDelta)\subsetneqq H(\varDelta)=(\partial_{\overline{Z}}(I-\overline{Z}'Z)\partial_{Z'},\ \partial_{Z'}(I-Z\overline{Z}')\partial_{\overline{Z}}).$$

参 考 文 献

[1] 华罗庚，*多复变函数论中典型域的调和分析*，科学出版社，1958.
[2] 华罗庚、陆启铿，典型域的调和函数论(I)，*数学学报*，**8** (1958).
[3] Maaß, H., Zur theorie der Harmonichen Formen, *Math. Ann.*, **137** (1959).
[4] Erdelyi, A. et al., Higher transcendental functions, New York, 1953.

ON PRIME IDEALS OF THE RING OF DIFFERENTIAL OPERATORS

ZHONG JIAQING
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

For given linear differential operators $P_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \cdots, P_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, let $(P_1, \cdots, P_m)$ be the left ideal generated by $P_1, \cdots, P_m$, and F be the space of the common solutions of the operators P_i $(i=1, \cdots, m)$, i. e., $F=\{f \mid P_i f=0, i=1, \cdots, m\}$. Inspired by the Hilbert's Nullstallensatz, we introduce another ideal $H(P_1, \cdots, P_m)$ related to $P_1, \cdots, P_m$, $H(P_1, \cdots, P_m)=\{P \mid Pf=0, \forall f \in F\}$. Obviously, $(P_1, \cdots, P_m) \subseteq H(P_1, \cdots, P_m)$.

Definition *The ideal $(P_1, \cdots, P_m)$ is prime if $H(P_1, \cdots, P_m)=(P_1, \cdots, P_m)$.*

The aim of this paper is to study under what conditions the ideal $(P_1, \cdots, P_m)$ is prime. We have the following results:

Theorem 1 *(Δ) is prime, where Δ is the Laplace operator of $\mathscr{R}^n$, i. e.,*

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Theorem 2 *(Δ_B) is prime, where Δ_B is the Laplace-Beltrami operator of*

$$B=\left\{(Z_1, \cdots, Z_n) \in \mathscr{C}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2<1\right\}.$$

It is well known that

$$\Delta_B=\sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij}-z_i \bar{z}_j) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}.$$

Theorem 3 *Suppose $T_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \cdots, T_m\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ are differential operators with constant coefficients, then $(T_1, \cdots, T_m)$ is prime if the corresponding polynomial ideal $(T_1(X_1, \cdots, X_n), \cdots, T_m(X_1, \cdots, X_n))$ is prime in the usual sense.*

For general linear differential operators with variable coefficients, we have given some sufficient conditions for which $(P_1, \cdots, P_m)$ is prime (see Th. 4). The two important ones among these sufficient conditions are that $P_1, \cdots, P_m$ possess a Poisson kernel and they satisfy group invariance in some sense.

Finally, as an example, we study in detail the case of the classical domain

$$R(2)=\left\{Z=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, I-ZZ'>0\right\}.$$

We show that $H(\Delta_{R(2)}) \neq (\Delta_{R(2)})$, i. e., $(\Delta_{R(2)})$ is not prime, and we also give the basis of the ideal $H(\Delta_{R(2)})$, where $\Delta_{R(2)}$ is the Laplace-Beltrami operator of $R(2)$.