数 学 年 刊
1 (3, 4) 1980

n 维扩充空间中一个有蜕化面的偏微分方程

吉 新 华 (中国科学院数学研究所)　　陈 德 泉 (中国科学院应用数学研究所)

§1. 引　言

我们所研究的空间是 n 维扩充空间,即欧几里德空间连同 ∞ 点,它是与 $n+1$ 维空间中的 Riemann 球同胚的 n 维流形. 在其上的变换群是以单位球为绝的双有理变换群

$$\begin{cases} y=\dfrac{xT+xx'v_1+v_2}{xu_2'+xx'b+d}, \\ yy'=\dfrac{xu_1'+xx'a+c}{xu_2'+xx'b+d}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 a, b, c, d 为实数, x, y, u_1, u_2, v_1, v_2 是 n 维实向量, T 为 $n\times n$ 矩阵.

可以证明此变换群中以 $xx'=1$ 为绝对的变换构成子群, 记为 GH, 其演出元素为双曲平移.

$$\begin{cases} y=\dfrac{x+\frac{1}{2}(1+xx')(1+uu')^{-\frac{1}{2}}u}{xu'+\frac{1}{2}(1+xx')(1+uu')^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(1-xx')}T, \\ T=I-\dfrac{1-\sqrt{1+uu'}}{uu'}u'u. \end{cases} \tag{1.2}$$

正交变换

$$y=x\Gamma,\quad \Gamma\Gamma'=I \tag{1.3}$$

以及反演

$$y=\frac{x}{xx'}. \tag{1.4}$$

变换群 GH 下的微分不变量是

$$\frac{dxdx'}{(1-xx')^2}. \tag{1.5}$$

以(1.5)式做为我们的 Riemann 度量,对应的不变微分算子是

$$\Delta=(1-xx')^2\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+2(n-2)(1-xx')\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

我们研究方程

$$(1-xx')\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}+2(n-2)\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial U}{\partial x_i}=0. \tag{1.6}$$

它的 Poisson 公式是

本文1979年1月24日收到, 1980年4月19日修改。

$$U(x)=\frac{1}{w_{n-1}}\underset{vv'=1}{\int\cdots\int}\left(\frac{1-xx'}{1-2xv'+xx'}\right)^{n-1}U(v)\dot{v}. \tag{1.7}$$

华罗庚教授证明了(见[1])公式(1.7)是方程(1.6)的单位球 Dirichlet 内问题的解答.

注意到,当 $n=2$ 时(1.6)是二维 Laplace 方程. 二维 Laplace 方程经单位圆反演是不变的,但 n 维($n\geqslant 3$) Laplace 方程就不再有此性质了. (1.6)也是二维 Laplace 方程的 n 维推广,与二维相仿,它保持了经单位球反演不变的性质.

但是,方程(1.6)与 Laplace 方程也有不同之处,即虽然它在单位球内外均为椭圆型,但以 $xx'=1$ 为蜕化面. 对于(1.6),如果给了一个区域全部在球内或球外的边界值,那就是通常的椭圆型方程的边值问题. 现在考虑包括一部分蜕化面的情况. 我们指出,最大值原理在现在所考虑的情况下是不正确的.

例如,n 为奇数时 Poisson 核($x=\rho u$, $uu'=1$)

$$\left(\frac{1-xx'}{1-2xv'+xx'}\right)^{n-1}=\left(\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\langle u,\ v\rangle+\rho^2}\right)^{n-1}$$

处处为正,但在单位球面上 $u\neq v$ 处,它的数值为零. 如果取一个区域包括一部分单位球面,但不包有 $x=v$,则这个区域内有一函数在退化面上取极小值.

在本文中,首先给出极大值原理和唯一性定理,然后给出方程(1.6)的各种解答. 类比二维 Laplace 方程,我们也称(1.6)的解答为调和函数. 这里讨论的主要问题是: 1)在退化面上给条件的全空间(包括 ∞)的调和函数; 2)在与单位球面同心的其它球面上给条件的全空间(包括 ∞)的调和函数; 3)蜕化面在边界上的 Dirichlet 问题; 4)蜕化面在区域内部的 Dirichlet 问题.

§2. 极大值原理

定理 1(极大值原理)$\partial\mathscr{D}_1$ 和 $\partial\mathscr{D}_2$ 是区域 $\mathscr{D}$ 的边界,C 为 $\mathscr{D}$ 内一低维流形,函数 u 满足:

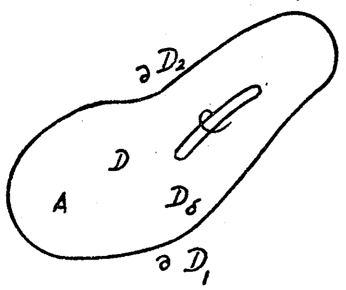
① 在 $\mathscr{D}+\partial\mathscr{D}_1+\partial\mathscr{D}_2$ 上连续;

② 在 $\mathscr{D}$ 除 C 上二阶连续可微;

③ u 适合方程

$$\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}=0, \tag{2.1}$$

其中 a_{ij} 适合条件



在 $\mathscr{D}$(除 C)$+\partial\mathscr{D}_1$ 上 $[a_{ij}]$ 为正定矩阵. (2.2)

在 C 和 $\partial\mathscr{D}_2$ 上 $\sum\limits_{ij=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j=0$ 方程蜕化 (2.3)

则 u 的极大值(或极小值)只能在边界和退化面 C 上达到.

证 若不然,设 u 在边界和 C 上的极大值是 M,则存在 $\mathscr{D}$ 内非 C 上一点 A,有

$$u(A)>M+\delta \tag{2.4}$$

δ 是充分小的正数,又由于对 u 的假设,必然存在一个在 $\mathscr{D}$ 内部的除去包含蜕化面 $\partial\mathscr{D}_2$

和 C 的小邻域后所余下的区域 $\mathscr{D}_\delta$，使得 A 在区域 $\mathscr{D}_\delta$ 内，且 u 在 $\mathscr{D}_\delta$ 的边界 $\partial\mathscr{D}_\delta$ 上的极大值 M_δ 满足

$$M_\delta \leqslant M+\delta$$

因此有

$$M_\delta \leqslant M+\delta<u(A). \tag{2.5}$$

另一方面，显然 (2.1) 在 $\mathscr{D}_\delta+\partial\mathscr{D}_\delta$ 上为一般的椭圆型方程且满足 (2.2). 因此对于区域 $\mathscr{D}_\delta$，u 的极大值必然在边界 $\partial\mathscr{D}_\delta$ 上达到. 这和(2.5)矛盾，说明假设(2.4)错误，用完全相同的方法也可以证明关于极小值的结论.　　证毕.

§3. 全空间(包括 ∞)的调和函数

由于存在蜕化面，方程(1.6)与二维 Laplace 方程的显著不同是存在不恒为常数的全空间(包括 ∞)的解答.

定理 2　设 $f(v)$ 是在退化面 $vv'=1$ 上定义的二阶连续可微函数，则存在在全空间(包括 ∞)适合方程(1.6)的二阶连续可微函数

$$U(\rho,\ u)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega_{n-1}}\displaystyle\int\cdots\int_{vv'=1}\left(\dfrac{1-\rho^2}{1-2\rho uv'+\rho^2}\right)^{n-1}f(v)\dot{v}, & \rho<1 \quad (3.1a)\\[2ex] \dfrac{1}{\omega_{n-1}}\displaystyle\int\cdots\int_{vv'=1}\left(\dfrac{\rho^2-1}{\rho^2-2\rho uv'+1}\right)^{n-1}f(v)\dot{v}, & \rho>1 \quad (3.1b)\end{cases}$$

(其中 ω_{n-1} 为 $n-1$ 维单位球面表面积，$uu'=1$)，它是在蜕化面上适合条件

$$\lim_{\rho\to1\pm0}U(\rho,\ u)=f(u) \tag{3.2}$$

的(1.6)的唯一解答.

证　由于方程(1.6)经单位球反演不变，(3.1b)适合方程且(3.1)满足条件(3.2)是显然的. 以下只要证明 $U(\rho,\ u)$ 在蜕化面上二阶连续可微，即证明二阶法微商连续. 为此把(3.1)展开成收敛的幂级数.

当 $\rho<1$ 时

$$\begin{aligned}U(\rho,\ u)&=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1}\left(\frac{1-\rho^2}{1-2\rho uv'+\rho^2}\right)^{n-1}f(v)\dot{v}\\&=\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l+n-2)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(l+n-1)}{(n-2)\Gamma(n-1)\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)}F\left(l,\ 1-\frac{n}{2},\ l+\frac{n}{2},\ \rho^2\right)\rho^l\\&\quad\times\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')f(v)\dot{v}\end{aligned}$$

当 $\rho>1$ 时

$$\begin{aligned}U(\rho,\ u)&=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1}\left(\frac{\rho^2-1}{\rho^2-2\rho uv'+1}\right)^{n-1}f(v)\dot{v}\\&=\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2l+n-2)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(l+n-1)}{(n-2)\Gamma(n-1)\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)}F\left(l,\ 1-\frac{n}{2},\ l+\frac{n}{2},\ \rho^{-2}\right)\rho^{-l}\\&\quad\times\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')f(v)\dot{v}\end{aligned}$$

其中 $P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')$ 是超球函数，$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$ 是超几何函数．对以上的幂级数可逐项求偏微商，容易证明

$$\lim_{\rho\to1-0}\frac{d}{d\rho}\left[\rho^l F\left(l,\ 1-\frac{n}{2},\ l+\frac{n}{2},\ \rho^2\right)\right]=0;$$

$$\lim_{\rho\to1+0}\frac{d}{d\rho}\left[\rho^{-l} F\left(l,\ 1-\frac{n}{2},\ l+\frac{n}{2},\ \rho^{-2}\right)\right]=0,$$

因此
$$\left.\frac{\partial U}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=0$$

即(3.1)右端是连续可微函数．又由

$$\frac{\partial^2U(\rho^{-1},\ u)}{\partial\rho^2}=2\rho^{-3}\left[\frac{\partial U(\rho,\ u)}{\partial\rho}\right]_{\rho=\rho^{-1}}+\rho^{-4}\left[\frac{\partial^2U(\rho,\ u)}{\partial\rho^2}\right]_{\rho=\rho^{-1}}$$

得到
$$\left.\frac{\partial^2U(\rho^{-1},\ u)}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=1}=\left.\frac{\partial^2U(\rho,\ u)}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=1}$$

已知 Legendre 函数 $P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')$ 的连续可微性，(1.6) 的解答在单位球内外关于 $\theta_1,\ \cdots,\ \theta_{n-1}$ 的各阶导数的连续性是显然的．所以(3.1)右端是二阶连续可微函数．

显然，这里所讨论的问题在单位球内外分别都满足定理 1 条件．容易得到唯一性．

证毕．

以后，将看到还存在别种形式的全空间(包括 ∞)的调和函数．

§4．偏微分方程的级数解答

方程(1.6)的球坐标形式是

$$\frac{(1-\rho^2)^n}{\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-2}}\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\left(\frac{1-\rho^2}{\rho}\right)^2\partial_u^2U=0,\tag{4.1}$$

其中

$$\partial_u^2=\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}+\frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}+\cdots+\frac{1}{\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-2}}\frac{\partial^2}{\partial\theta_{n-1}^2}+(n-2)\operatorname{ctg}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}$$
$$+(n-3)\frac{\operatorname{ctg}\theta_2}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}+\cdots+\frac{\operatorname{ctg}\theta_{n-2}}{\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-3}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}}.$$

(4.1)也可以写成

$$\rho^2\frac{\partial^2U}{\partial\rho^2}+\rho\left[(n-2)\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}+1\right]\frac{\partial U}{\partial\rho}+\partial_u^2U=0.\tag{4.2}$$

用分离变量法求解方程(4.2)，令

$$U(\rho,\ u)=\varphi(\rho)\psi(u)$$

得到

$$\partial_u^2\psi(u)=-l(l+n-2)\psi(u)\quad(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\tag{4.3}$$

和

$$\rho^2\varphi''(\rho)+\rho\left[(n-2)\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}+1\right]\varphi'(\rho)-l(l+n-2)\varphi(\rho)=0\quad(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).\tag{4.4}$$

方程(4.3)解答已知(见[1])．为求解(4.4)，令

$$\rho^2=\eta$$

及
$$\varphi(\rho)=\eta^{-\frac{l+n-2}{2}}\Phi(\eta)$$

得到
$$\eta(1-\eta)\Phi''+\left\{\left(2-l-\frac{n}{2}\right)-\left(4-l-\frac{3}{2}n\right)\eta\right\}\Phi'-(2-l-n)\left(1-\frac{n}{2}\right)\Phi=0$$

这是一个超几何方程. 当 $l>0$ 时它的解已知(见[2]). 进一步可得(4.4)的解(当 $l>0$ 时)为

$$\begin{cases}\varphi_l^1(\rho)=\rho^l F\left(1-\frac{n}{2},\ l,\ l+\frac{n}{2},\ \rho^2\right); & (4.5)\\ \varphi_l^2(\rho)=\rho^{2-l-n}(1-\rho^2)^{n-1}F\left(1-l,\ \frac{n}{2},\ n,\ 1-\rho^2\right). & (4.6)\end{cases}$$

另一方面, (4.4)中令 $l=0$, 则得
$$\frac{(1-\rho^2)^n}{\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)=0. \tag{4.7}$$

所以
$$\frac{d\varphi}{d\rho}=c\,\frac{(1-\rho^2)^{n-2}}{\rho^{n-1}}\quad (c\text{ 为常数})$$

于是得到满足 $\varphi(1)=0$ 的(4.7)的解答为:
当 n 为奇数时
$$\sigma(\rho)=\sum_{l=0}^{\frac{1}{2}(n-3)}\binom{\frac{1}{2}(n-3)}{l}\frac{(-1)^l}{2l+1}\left[\left(\frac{\rho+\rho^{-1}}{2}\right)^{2l+1}-1\right]; \tag{4.8}$$
$$\sigma(\rho)=\sigma\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

当 n 为偶数时
$$\sigma(\rho)=\sum_{\substack{l=0\\ l\neq\frac{1}{2}(n-2)}}^{n-2}(-1)^l\binom{n-2}{l}\frac{\rho^{2l-n+2}}{2l-n+2}+(-1)^{\frac{1}{2}(n-2)}\binom{n-2}{\frac{1}{2}(n-2)}\log\rho; \tag{4.9}$$
$$\sigma(\rho)=-\sigma\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

显然有
$$\lim_{\rho\to1\pm0}\frac{\sigma(\rho)}{(1-\rho^2)^{n-1}}=\text{常数}.$$

这样, 得到(4.1)有如下一批解答(1 显然是解):
$$1,\ \sigma(\rho),\ \varphi_l^1(\rho)P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv'),\ \varphi_l^2(\rho)P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv'),\quad (l=1,\ 2,\ \cdots).$$

方程(4.1)的形式解答(证明收敛性后是解)为
$$U(\rho,\ u)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}A_l(\rho)\int_{vv'=1}\cdots\int P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')f_l(v)\dot{v}$$
$$+\frac{1}{\omega_{n-1}}\left\{C_0\sigma(\rho)+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}B_l(\rho)\int_{vv'=1}\cdots\int P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')g_l(v)\dot{v}\right\}, \tag{4.10}$$

其中 ω_{n-1} 为 $n-1$ 维单位球面表面积, C_0 为任意常数, f_l、g_l 为任意球面连续函数, 且
$$A_0(\rho)=1.$$

$$A_l(\rho)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(l+n-1)}{\Gamma(n-1)\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)}\varphi_l^1(\rho), & \rho<1\text{ 时;}\\[2ex] \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(l+n-1)}{\Gamma(n-1)\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)}\varphi_l^1(\rho^{-1}), & \rho>1\text{ 时.}\end{cases} \tag{4.11}$$

$$B_l(\rho)=\varphi_l^2(\rho). \tag{4.12}$$

由于方程(4.1)经反演不变, $\varphi_l^1(\rho^{-1})$ 显然适合方程(4.4).

系 当 $n\geqslant 3$ 时容易得到 $A_l(\rho)$、$B_l(\rho)$ 的如下性质

i) $\lim\limits_{\rho\to 1\pm 0} A_l(\rho)=1$, $\lim\limits_{\rho\to 1\pm 0}\dfrac{B_l(\rho)}{(1-\rho^2)^{n-1}}=1$;

ii) 在蜕化面 $(\rho=1)$ 上 $A_l(\rho)$, $B_l(\rho)$ 一阶导数为零.

iii) $A_l(\rho)$, $B_l(\rho)$ 在退化面上二阶连续可微.

§5. 级数的收敛性

由于§4系 i) 容易看出在单位球面上只要假定 $f_l(v)=f(v)$ 为任意球面连续函数, 级数(4.10)显然收敛.

引理1 假设函数 f_l、g_l 满足条件

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l}{\rho_0^l}\left\{\left|\int_{vv'=1}\cdots\int P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')f_l(v)\dot{v}\right|+\left|\int_{vv'=1}\cdots\int P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')g_l(v)\dot{v}\right|\right\}<\infty, \tag{5.1}$$

其中 $0<\rho_0<1$, 则级数(4.10)在球内当 $\rho_0<\rho<1$ 时绝对收敛, 且适合方程(4.1).

证 由于 $\rho<1$,

$$|A_l(\rho)|=\left|\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(l+n-1)}{\Gamma(n-1)\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)}\rho^l F\left(l,\ -\frac{n}{2}+1,\ l+\frac{n}{2},\ \rho^2\right)\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(l+n-1)}{\Gamma(n-1)\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)}\rho^l F\left(l,\ \frac{n}{2}-1,\ l+\frac{n}{2},\ 1\right)\right|\leqslant O\left(\frac{\Gamma(l+n-1)}{\Gamma(l+1)}\right)$$

$$\leqslant O(l^{n-2}).$$

$$|B_l(\rho)|=\left|\rho^{2-l-n}(1-\rho^2)^{n-1}F\left(\frac{n}{2},\ 1-l,\ n,\ 1-\rho^2\right)\right|$$

$$=\left|\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(l+\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma(l+n-1)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\rho^{2-l-n}F\left(2-l-n,\ -\frac{n}{2}+1,\ 2-l-\frac{n}{2},\ \rho^2\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(1-l-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(1-l)}\rho^l F\left(-\frac{n}{2}+1,\ l,\ l+\frac{n}{2},\ \rho^2\right)\right|.$$

因为 n 是固定整数，而 l 可以任意大，所以

$$|B_l(\rho)|\leqslant O\left(\frac{\Gamma\left(l+\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma(l+n-1)}\rho^{-l}F\left(2-l-n,\ \frac{n}{2}-1,\ 2-l-\frac{n}{2},\ 1\right)\right)$$
$$+O\left(\frac{\Gamma\left(1-l-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(1-l)}F\left(\frac{n}{2}-1,\ l,\ l+\frac{n}{2},\ 1\right)\right)\leqslant O\left(\frac{1}{\rho^l l^2}\right).$$

对于 $\rho<1$，当 $l\to\infty$ 时，显然

$$O(l^{n-2})<O\left(\frac{1}{\rho^l l^2}\right).$$

容易得到
$$\left|\frac{d^2A_l}{d\rho^2}\right|\leqslant O(l^n),\quad \left|\frac{d^2B_l}{d\rho^2}\right|\leqslant O\left(\frac{1}{\rho^l}\right).$$

容易知道级数关于 u 的一、二阶偏导数与关于 ρ 的一、二阶偏导数，当 $\rho\to\infty$ 时，对 l 有相同的阶. 把以上估计代入级数(4.10)中，显然级数本身及其一、二阶导数都绝对收敛.

证毕.

用同样的方法，容易得到

引理 2　假设函数 f_l、g_l 满足条件

$$\sum_{l=1}^{\infty}R^l\left\{\left|\int_{vv'=1}\!\!\cdots\!\int P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')\,f_l(v)\dot{v}\right|+\left|\int_{vv'=1}\!\!\cdots\!\int P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')\,g_l(v)\dot{v}\right|\right\}<\infty,\tag{5.2}$$

其中 $1<R<\infty$，则级数(4.10)在球外当 $1<\rho<R$ 时绝对收敛，且适合方程(4.1).

令
$$M=\max\left(R,\ \frac{1}{\rho_0}\right)$$

则得到以下的

定理 3　假设函数 f_l、g_l 满足条件

$$\sum_{l=1}^{\infty}M^l l\left\{\left|\int_{vv'=1}\!\!\cdots\!\int P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')\,f_l(v)\dot{v}\right|+\left|\int_{vv'=1}\!\!\cdots\!\int P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')\,g_l(v)\dot{v}\right|\right\}<\infty,\tag{5.3}$$

则级数(4.10)在包有退化面的区域

$$\mathscr{D}=\left\{x=\rho u\,\middle|\,\frac{1}{M}<\rho<M,\ uu'=1,\ M>1\right\}$$

中是方程(4.1)的解答.

有了级数的收敛性定理就有了解的存在性.

§6. Dirichlet 问 题

$\mathscr{D}$ 是扩充空间中的一个域，$U(\rho,\ u)$ 在 $\mathscr{D}$ 中二阶连续可微.

如果边界 $\partial\mathscr{D}$ 的一部分是蜕化面，对于退化面在边界上的 Dirichlet 问题显然有以下的结果.

定理 4　设 $f(v)$, $g(v)$ 是在 $vv'=1$ 上定义的连续可微函数，并且使得表达式

$$U(\rho,\ u)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}A_l(\rho)\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')f(v)\dot{v}\right\}+\frac{1}{\omega_{n-1}}$$
$$\times\left\{\frac{\int\cdots\int(g-f)\dot{v}}{\sigma(\rho_2)}\sigma(\rho)+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}B_l(\rho)\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')\frac{g-A_l(\rho_2)f}{B_l(\rho_2)}\dot{v}\right\}. \tag{6.1}$$

右端对应级数(4.10)中 f_l, g_l 的函数满足条件(5.3)(可以证明:选择适当的 ρ_2 可使(6.1)中各分母不为零). 则(6.1)式是适合条件

$$\begin{cases}U(1,\ u)=f(u);\\ U(\rho_2,\ u)=g(u),\quad 1<\rho_2<M\end{cases} \tag{6.2}$$

的在域 $\mathscr{D}=\{x=\rho u\,|\,1<\rho<\rho_2,\ uu'=1,\ \rho_2<M\}$

中的(1.6)的唯一解答. 表达式

$$U(\rho,\ u)=\frac{1}{\omega_{n=1}}\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}A_l(\rho)\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')g(v)\dot{v}\right\}$$
$$+\frac{1}{\omega_{n-1}}\left\{\frac{\int\cdots\int(f-g)\dot{v}}{\sigma(\rho_1)}\sigma(\rho)\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}B_l(\rho)\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')\frac{f-A_l(\rho_1)g}{B_l(\rho_1)}\dot{v}\right\} \tag{6.3}$$

是适合条件

$$\begin{cases}U(\rho_1,\ u)=f(u),\quad \frac{1}{M}<\rho_1<1;\\ U(1,\ u)=g(u)\end{cases} \tag{6.4}$$

的在域 $\mathscr{D}=\left\{x=\rho u\,\middle|\,\rho_1<\rho<1,\ uu'=1,\ \rho_1>\frac{1}{M}\right\}$

中的(1.6)的唯一解答.

证 这里所讨论的两个问题都满足定理1条件,容易得到唯一性、存在性是显然的.

证毕.

对于退化面在区域内部的 Dirichlet 问题,有以下结果.

定理5 区域 $\mathscr{D}$ 满足定理1条件

$$\mathscr{D}=\left\{x=\rho u\,\middle|\,\frac{1}{M}<\rho_1<\rho<\rho_2<M,\ uu'=1\right\}. \tag{6.5}$$

函数 $U(\rho,\ u)$ 有如下表达式:

当 $\rho_1<\rho<1$ 时

$$U(\rho,\ u)=\frac{1}{\omega_{n=1}}\left\{\sum_{\tau=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}A_l(\rho)\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')g(v)\dot{v}\right\}$$
$$+\frac{1}{\omega_{n-1}}\left\{\frac{\int\cdots\int(f-g)\dot{v}}{\sigma(\rho_1)}\sigma(\rho)\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}B_l(\rho)\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')\frac{f-A_l(\rho_1)g}{B_l(\rho_1)}\dot{v}\right\}, \tag{6.6}$$

当 $1<\rho<\rho_2$ 时

$$U(\rho,\ u)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}A_l(\rho)\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')\,g(v)\,\dot{v}\right\}$$

$$+\frac{1}{\omega_{n-1}}\left\{\frac{\int\cdots\int(h-g)\,\dot{v}}{\sigma(\rho_2)}\sigma(\rho)\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}B_l(\rho)\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uv')\frac{h-A_l(\rho_2)g}{B_l(\rho_2)}\dot{v}\right\},\tag{6.7}$$

其中 $f(v)$、$g(v)$、$h(v)$ 是在 $vv'=1$ 上定义的二阶连续可微函数，他们使表达式(6.6)和(6.7)右端对应的级数(4.10)中的 f_l、g_l 的函数满足条件(5.3)，则(6.6)和(6.7)式是适合条件

$$\begin{cases}U(\rho_1,\ u)=f(u);\\U(1,\ u)=g(u);\\U(\rho_2,\ u)=h(u)\end{cases}\tag{6.8}$$

的在域 $\mathscr{D}$ 中的(1.6)的唯一解答.

这定理成立是显然的.

§7. 全空间(包括 ∞)的调和函数(续)

定理 6　(全空间调和函数的唯一性)函数 $U(\rho,\ u)$ 在单位球内外调和，在单位球面上连续，对任意 $\rho_1(0<\rho_1<1)$，若有 $U(\rho_1,\ u)=0$ 则 $U(\rho,\ u)\equiv 0$.

证　设单位球面上的球面连续函数

$$U(1,\ v)=f(v)\tag{7.1}$$

对于 $\rho<1$ 则有

$$U(\rho,\ u)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1}\left(\frac{1-\rho^2}{1-2\rho uv'+\rho^2}\right)^{n-1}f(v)\dot{v}.\tag{7.2}$$

再设

$$\begin{aligned}q_l(\rho,\ w)&=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{uu'=1}U(\rho,\ u)\,P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(uw')\,\dot{u}\\&=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1}f(v)\,\dot{v}\,\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{uu'=1}\left(\frac{1-\rho^2}{1-2\rho uv'+\rho^2}\right)^{n-1}P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(wv')u\\&=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1}f(v)\,F_l(\rho,\ v,\ w)\,\dot{v}.\end{aligned}\tag{7.3}$$

显然，函数

$$F_l(\rho,\ v,\ w)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{uu'=1}\left(\frac{1-\rho^2}{1-2\rho uv'+\rho^2}\right)^{n-1}P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(wu')u\tag{7.4}$$

满足方程

$$\partial_w^2F_l(\rho,\ v,\ w)=-l(l+n-2)F_l(\rho,\ v,\ w)\tag{7.5}$$

由方程(1.6)的单位球内 Dirichlet 问题的解的存在唯一性定理知，存在唯一的二阶连续

可微函数 $F_l(\rho, v, w)$，它以 $P_l^{(\frac{n}{2}-1)}(wu')$ 为边界值且在单位球内适合方程 (1.6). 容易验证

$$F_l(\rho, v, w)=\rho^l\tau_l(\rho)\,P_l^{(\frac{n}{2}-1)}(vw'), \tag{7.6}$$

其中
$$\tau_l(\rho)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(l+n-1)}{\Gamma(n-1)\Gamma\left(l+\frac{n}{2}\right)}F\left(l,\ -\frac{n}{2}+1,\ l+\frac{n}{2},\ \rho^2\right).$$

把(7.6)代入(7.3)，得到

$$q_l(\rho, w)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1}\rho^l\tau_l(\rho)\,P_l^{(\frac{n}{2}-1)}(vw')\,f(v)\dot{v}.$$

由定理条件
$$U(\rho_1, u)=0$$
知
$$q_l(\rho_1, w)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{uu'=1}U(\rho_1, u)\,P_l^{(\frac{n}{2}-1)}(wu')\dot{u}=0.$$
即
$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1}\rho_1^l\tau_l(\rho_1)\,P_l^{(\frac{n}{2}-1)}(vw')\,f(v)\dot{v}=0.$$
由超几何函数性质显然有，当 $0<\rho_1<1$ 时
$$\rho_1^l\tau_l(\rho_1)\neq 0.$$
因此，对任意整数 $l\geqslant 0$ 有
$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{(\frac{n}{2}-1)}(vw')\,f(v)\dot{v}=0. \tag{7.7}$$
由于对任意球面连续函数有展开式
$$f(u)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{(\frac{n}{2}-1)}(uv')\,f(v)\dot{v}, \tag{7.8}$$
联合 (7.7)、(7.8) 显然有
$$f(u)=0.$$
函数 $U(\rho, u)$ 在单位球内调和，在单位球面上为零，则必然在球内恒为零. 由定理 1 知它在球外也恒为零.

证毕.

由定理 6 容易推出以下的

系 1 $U(\rho, u)$ 在单位球内调和，若在单位球内存在一封闭曲面上取值为零，则在单位球内恒为零.

以下定理是显然成立的.

定理 7 设函数 $f(v)$ 满足条件与定理 4 相同，则存在全空间(包括∞)适合方程(1.6)的二阶连续可微函数

$$U(\rho, u)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\,\frac{A_l(\rho)}{A_l(\rho_1)}\int\cdots\int_{vv'=1}P_l^{(\frac{n}{2}-1)}(uv')\,f(v)\dot{v},\quad (uu'=1,\ 0<\rho<\infty) \tag{7.9}$$

是适合条件
$$U(\rho, u)\big|_{\rho=\rho_1}=f(u),\quad (0<\rho_1<\infty) \tag{7.10}$$
的唯一解答.

系 2　对于定理 2 和定理 7 中的全空间调和函数 $U(x)$, 有如下的均值公式

$$U(0)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1} f(v)\dot{v};$$

$$\lim_{\rho\to\infty} U(\rho,\ u)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1} f(v)\dot{v}. \tag{7.11}$$

$U(x)$ 在零点和无穷远点有相同的值.

系 3　由公式(7.11)知, 对于单位球 Dirichlet 外问题, 只要求解在无穷远点有界, 而不必如三维 Laplace 方程要求解在无穷远趋于零, 这和二维 Laplace 方程是一致的.

本文是在华罗庚教授的指导下完成的.

参　考　文　献

[1] 华罗庚, 从单位圆谈起, 科学出版社, 1977.
[2] Yudell L. Luke, The special fuction and their approximation, 1969.
[3] 华罗庚, 多复变函数论中典型域的调和分析, 科学出版社, 1958.
[4] 陆启铿, 典型流型和典型域, 1963.
[5] 吴新谋, 数学物理方程, 1959.

A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH A DEGENERATE SURFACE IN EXTENDED SPACE OF *N*-DEMENSION

JI XINHUA
(*Institute of mathematics, Academia Sinica*)
CHERN DEQUAN
(*Institute of applieel mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Professor Loo-keng Hua studied the partial differential equation

$$(1-xx')^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}+2(n-2)(1-xx')\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial U}{\partial x_i}=0 \tag{1}$$

by the method of geometry. He proved that Poisson formula

$$U(x)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int\cdots\int_{vv'=1}\left(\frac{1-xx'}{1-2xv'+xx'}\right)^{n-1} U(v)\dot{v} \tag{2}$$

is the unique solution of Dirichlet problem in the interior of the unit sphere.

In this paper we also study equation (1), the solution of which is called harmonic function, too. Equation (1) is elliptic in the interior and exterior of the unit sphere, but has a degenerate surface $xx'=1$. When we consider Dirichlet problem in a domain whose interior includes a degenerate surface, the maximum modulus principle is not valid.

In this paper, at first we prove the uniqueness theorem, and then give various solutions of the problem, such as:

i) A harmonic function on whole space (including ∞) which satisfies the known condition on the degenerate surface.

ii) A harmonic function on whole space (including ∞) which satisfies the known condition on a concentric sphere with the unit sphere.

iii) A solution of equation (1) of Dirichlet problem in a domain whose interior includes a degenerate surface.

iv) A solution of equation (1) of Dirichlet problem in a domain whose boundary is a degenerate surface.