数 学 年 刊
1 (3, 4) 1980

退化算子具有奇点的一类二阶椭圆型方程的奇摄动

江福汝 高汝熹
(复旦大学)

一、狄立克雷问题

考察二阶椭圆型方程的狄立克雷问题

$$\varepsilon L_2 u_\varepsilon + L_1 u_\varepsilon = f(x) \quad x=(x_1, \cdots, x_m)\in G, (0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0), \tag{1.1}$$

$$u_\varepsilon|_\Gamma = g(x)|_\Gamma, \tag{1.2}$$

其中 L_2 是二阶椭圆型微分算子

$$L_2 \equiv \sum_{i,j=1}^m d_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m d_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + d(x), \tag{1.3}$$

$$\sum_{i,j=1}^m d_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \delta_0 > 0, \quad x\in G, \tag{1.4}$$

L_1 是一阶微分算子

$$L_1 \equiv \sum_{i=1}^m a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + b(x) + c, \tag{1.5}$$

δ_0 和 c 是常数，ε_0 是充分小的常数.

在文献 [1, 2] 中，曾先后研究过上述问题(两个自变量的情形)，但是都假设一阶微分算子在区域 $\overline{G}=G+\Gamma$ 上不存在奇点，即

$$\sum_{i=1}^2 a_i^2(x) > 0, \quad x\in\overline{G}.$$

在 1955 年，С. Л. Каменомстская[3] 考虑一阶微分算子具有奇点的情形，但只在不包含某部分边界的子区域上，导出解的零阶近似. 1972 年，E. M. de Jager[4] 考虑了方程

$$\varepsilon\Delta u_\varepsilon + g(x, y)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} = 0$$

当 $g(x, y)$ 沿曲线 l 为零时的狄立克雷问题，构造出解的零阶一致渐近式. 本文研究一阶微分算子具有奇点的某一类二阶椭圆型方程的狄立克雷问题和第三边值问题，构造出解的一致渐近近似式.

假设

(H_1) G 是 m 维空间凸的开域，Γ 是 G 的边界和 $\Gamma\in C^\infty$.

(H_2) 方程的系数和自由项 $f(x)$ 在 $\overline{G}=G+\Gamma$ 是无限次可微，边值函数 $g(x)$ 在 Γ 上无限次可微.

本文 1979 年 9 月 9 日收到.

(H_3) 在区域 $\overline{G}$ 成立 $c+b(x)<0$.

在假设 (H_1)—(H_3) 下，狄立克雷问题 (1.1)—(1.2) 存在唯一的无限次可微的解 u_ε.

方程(1.1)的退化方程为

$$L_1[u]=f(x) \tag{1.6}$$

它的特征线确定于下面的常微分方程组

$$\frac{dx_1}{dt}=a_1(x),\ \cdots,\ \frac{dx_m}{dt}=a_m(x).$$

以 $n_i(x)$, $(i=1, \cdots, m)$ 表示边界 Γ 的内法线向量的各分量，又假设

(H_4) 在边界 Γ 上成立

$$\sum_{i=1}^{m}a_i(x)n_i(x)>0 \tag{1.7}$$

即退化方程的特征线，随着参数 t 的增大，通过边界 Γ 穿入区域 G.

假设狄立克雷问题(1.1)—(1.2)的解 u_ε 具有下面形式的渐近展开式

$$u_\varepsilon(x)\sim\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m w_m(x) \tag{1.8}$$

将 (1.8) 式代入方程 (1.1)，令等式两端 ε 的各同次幂的系数相等，得到关于 $w_m(x)$, $(m=0, 1, \cdots)$ 的递推方程

$$L_1[w_0]=f(x) \tag{1.9}$$

$$L_1[w_m]=-L_2[w_{m-1}] \tag{1.10}$$

在假设(H_4)下，从文献[5]知，当 $-c$ 充分大时，这些方程分别存在唯一的充分光滑的解 $w_m(m=0, 1, \cdots)$. 显然如此作得的渐近展开式(1.8)在 Γ 上一般不满足边值条件(1.2)，因此在 Γ 的邻域将产生边界层. 下面再构造边界层.

在 Γ 的邻域建立局部坐标系：以 $\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_{m-1})$ 表示边界 Γ 上的点的坐标，过 Γ 上的每一点 P 作内法线，以 η 表示内法线的长度，并取 η 充分小，使各内法线互不相交；对于 Γ 的邻域中的每一点 S，取 S 点沿内法线到 Γ 的距离作为 S 点的 ρ 坐标，取该内法线与 Γ 的交点 P 的坐标作为 S 点的 φ 坐标.

在(ρ, φ)坐标系下，算子 L_ε 具有形式

$$\begin{aligned}L_\varepsilon\equiv\varepsilon\Big[&\bar{d}_{m,m}(\rho, \varphi)\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\sum_{i=1}^{m-1}\bar{d}_{i,m}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\varphi_i}+\sum_{i,j=1}^{m-1}\bar{d}_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}+\bar{d}_m(\rho, \varphi)\frac{\partial}{\partial\rho}\\&+\sum_{i=1}^{m-1}\bar{d}_i(\rho, \varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi_i}+\bar{d}(\rho, \varphi)\Big]+\bar{a}_m(\rho, \varphi)\frac{\partial}{\partial\rho}+\sum_{i=1}^{m-1}\bar{a}_i(\rho,\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\\&+\bar{b}(\rho, \varphi)+c,\end{aligned} \tag{1.11}$$

今后为简单起见，略去系数上的横号，从条件(1.4)和(1.7)知

$$d_{m,m}(\rho, \varphi)>0,\quad a_m(\rho, \varphi)=\sum_{i=1}^{m}a_i(x)n_i(x)>0, \tag{1.12}$$

可以应用 Visik–Lyusternik 方法作得边界层项，当 $\dfrac{Q_m(\rho,\varphi)}{d_{mm}(\rho,\varphi)}$ 对 φ 的一阶和二阶偏导数是 $O(\varepsilon^M)$ 时(M 是正整数) 可以应用文献[6]中两变量展开构造边界层的方法来构造边界层. 在 Γ 的邻域引进两变量 $\tilde{\rho}$ 和 $\bar{\rho}$

$$\tilde{\rho}=\frac{u(\rho, \varphi)}{\varepsilon},\quad \bar{\rho}=\rho$$

其中 $u(\rho, \varphi)$ 是待定函数. 将关于 ρ 的偏导数换成关于 $\tilde{\rho}$ 和 $\bar{\rho}$ 的偏导数

$$\frac{\partial}{\partial\rho}=\varepsilon^{-1}u_\rho(\bar{\rho},\varphi)\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}}+\frac{\partial}{\partial\bar{\rho}},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}=\varepsilon^{-2}u_\rho^2\frac{\partial^2}{\partial\tilde{\rho}^2}+\varepsilon^{-1}\left(2u_\rho\frac{\partial^2}{\partial\tilde{\rho}\partial\bar{\rho}}+u_{\rho\rho}\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\bar{\rho}^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\varphi_i}=\varepsilon^{-1}u_\rho\frac{\partial^2}{\partial\tilde{\rho}\partial\varphi_i}+\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\varphi_i}$$

可将算子 L_ε 分解成(下面为简单起见，仍用 ρ 来表示 $\bar{\rho}$)

$$L_\varepsilon\equiv\varepsilon^{-1}(K_0+\varepsilon K_1+\varepsilon^2K_2) \tag{1.13}$$

其中

$$K_0\equiv d_{m,m}u_\rho^2\frac{\partial^2}{\partial\tilde{\rho}^2}+a_mu_\rho\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}}, \tag{1.14}$$

$$K_1\equiv 2d_{m,m}u_\rho\frac{\partial^2}{\partial\tilde{\rho}\partial\rho}+a_m\frac{\partial}{\partial\rho}+\sum_{i=1}^{m-1}d_{i,m}u_\rho\frac{\partial^2}{\partial\tilde{\rho}\partial\varphi_i}+\sum_{i=1}^{m-1}a_i\frac{\partial}{\partial\varphi_i}$$
$$+d_{m,m}u_{\rho\rho}\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}}+d_mu_\rho\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}}+b+c, \tag{1.15}$$

$$K_2\equiv d_{m,m}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\sum_{i=1}^{m-1}d_{i,m}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\varphi_i}+\sum_{i,j=1}^{m-1}d_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}+d_m\frac{\partial}{\partial\rho}+\sum_{i=1}^{m-1}d_i\frac{\partial}{\partial\varphi_i}+d. \tag{1.16}$$

假设边界层具有下面形式的展开式

$$V(\tilde{\rho},\rho,\varphi;\varepsilon)\sim\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^mv_m(\tilde{\rho},\rho,\varphi) \tag{1.17}$$

在算子 L_ε 的作用下得到

$$L_\varepsilon[V]=\varepsilon^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m(K_0[v_m]+K_1[v_{m-1}]+K_2[v_{m-2}])$$

(将页下标的量取作零)，令 ε 的各次幂的系数为零，得到关于 v_m, $(m=0,1,\cdots)$ 的递推方程

$$K_0v_0\equiv u_\rho\left(d_{m,m}u_\rho\frac{\partial^2v_0}{\partial\tilde{\rho}^2}+a_m\frac{\partial v_0}{\partial\tilde{\rho}}\right)=0 \tag{1.18}$$

$$K_0[v_m]\equiv-(K_1[v_{m-1}]+K_2[v_{m-2}]),\quad(m=1,2,\cdots). \tag{1.19}$$

取 η 充分小，使在 Γ 的 η 邻域成立

$$a_m(\rho,\varphi)=\sum_{i=1}^{m}a_i(x)n_i(x)\geqslant\delta_1>0 \tag{1.20}$$

δ_1 是常数．从(1.17)式看出，若取

$$u(\rho,\varphi)=\int_0^\rho\frac{a_m(t,\varphi)}{d_{m,m}(t,\varphi)}dt$$

由于 $u_\rho=\dfrac{a_m(\rho,\varphi)}{d_{m,m}(\rho,\varphi)}\geqslant\dfrac{\delta_1}{M}$, $M=\sup|d_{m,m}|$，则得到关于 v_0 的微分方程

$$\frac{\partial^2v_0}{\partial\tilde{\rho}^2}+\frac{\partial v_0}{\partial\tilde{\rho}}=0.$$

可以求得它的具有边界层性质的解为

$$v_0=\beta^{(0)}(\rho,\varphi)e^{-\tilde{\rho}}=\beta^{(0)}(\rho,\varphi)\exp(-\varepsilon^{-1}u(\rho,\varphi)) \tag{1.21}$$

其中 $\beta^{(0)}$ 是任意函数，由以后导出的关于 $\beta^{(0)}$ 的一阶方程和边值条件确定．

在递推方程(1.19)中，令 $m=1$，得到关于 v_1 的微分方程

$$K_0[v_1]=-K_1[v_0] \tag{1.22}$$

将(1.21)式代入上式的右端，并令它等于零，得到关于 $\beta^{(0)}$ 的一阶方程

$$B[\beta^{(0)}]\equiv a_m\frac{\partial\beta^{(0)}}{\partial\rho}+\sum_{i=1}^{m-1}(d_{i,m}-a_i)\frac{\partial\beta^{(0)}}{\partial\varphi_i}+(d_{m,m}u_{\rho\rho}+d_mu_\rho-b-c)\beta^{(0)}=0 \tag{1.23}$$

这时方程(1.22)化为齐次方程：$K_0[v_1]=0$，可以求得具有边界层性质的解为

$$v_1=\beta^{(1)}(\rho,\varphi)e^{-\tilde{\rho}}=\beta^{(1)}(\rho,\varphi)\exp(-\varepsilon^{-1}u(\rho,\varphi)) \tag{1.24}$$

其中 $\beta^{(1)}$ 是任意函数，由以后导出的关于 $\beta^{(1)}$ 的一阶方程和边值条件确定.

一般地，经求得 $v_i(i\leqslant k-1)$ 和 v_k

$$v_k=\beta^{(k)}(\rho,\varphi)e^{-\tilde{\rho}} \tag{1.25}$$

后，其中 $\beta^{(k)}$ 是待定函数，再在递推方程(1.19)中令 $m=k+1$ 得到关于 v_{k+1} 的微分方程

$$K_0[v_{k+1}]=-(K_1[v_k]+K_2[v_{k-1}])$$

将 v_{k-1} 和 v_k 代入上式的右端并令它等于零，得到关于 $\beta^{(k)}$ 的一阶非齐次方程

$$B[\beta^{(k)}]=K_2[\beta^{(k-1)}] \tag{1.26}$$

其中 K_2 由(1.16)式定义．因 V 需补足展开式(1.8)满足边值条件(1.2)，所以 $\beta^{(k)}$，$(k=0,1,2,\cdots)$ 应满足定解条件

$$\beta^{(0)}|_{\rho=0}=g(\varphi)-w_0(0,\varphi) \tag{1.27}$$

$$\beta^{(k)}|_{\rho=0}=-w_k(0,\varphi)\quad(k=1,2,\cdots) \tag{1.28}$$

因 $a_m>0$，从(1.23)和(1.27)可以解出 $\beta^{(0)}$，再代入(1.21)式求得 v_0．将 $\beta^{(0)}$ 代入(1.26)式(取 $k=1$)，根据定解条件(1.28)可解出 $\beta^{(1)}$，再代入(1.24)式又求得 v_1．这样继续下去，可以逐步地求得 v_k，$(k=0,1,\cdots)$.

引进无限次可微函数

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant\rho\leqslant\dfrac{1}{3}\rho_0,\\[2mm] 0, & \text{当 } \rho\geqslant\dfrac{2}{3}\rho_0,\\[2mm] 0, & \text{在 } G \text{ 中的其它点.}\end{cases}$$

作函数 $\tilde{v}_m=\psi(x)v_m$，$(m=0,1,\cdots)$ 可以证明下面的和式

$$U_M=\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^mw_m+\sum_{m=0}^{M+1}\varepsilon^m\tilde{v}_m \tag{1.29}$$

是狄立克雷问题(1.1)—(1.2)的 M 阶形式渐近近似式，即成立

$$L_2[U_M]=f(x)+O(\varepsilon^{M+1}),\quad x\in G \tag{1.30}$$

$$U_M|_\Gamma=g(x)|_\Gamma, \tag{1.31}$$

其中 $\tilde{v}_{M+1}=\psi(x)v_{M+1}$，$v_{M+1}$ 是一阶方程(1.26)$(k=M+1)$满足齐次定解条件：$\beta^{(M+1)}|_{\rho=0}=0$ 的解．事实上，当 $0\leqslant\rho\leqslant\dfrac{1}{3}\rho_0$ 时，有

$$L_\varepsilon[U_M]=L_\varepsilon\left[\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^mw_m\right]+L_\varepsilon\left[\sum_{m=0}^{M+1}\varepsilon^mv_m\right]=f(x)+O(\varepsilon^{M+1});$$

当 $\dfrac{1}{3}\rho_0\leqslant\rho\leqslant\dfrac{2}{3}\rho_0$ 时，因 $\tilde{v}_m$，$(m=0,1,\cdots M+1)$ 及其各阶导数是渐近地等于零，所以

$$L_\varepsilon[U_M]=L_\varepsilon\left[\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^mw_m\right]+O(\varepsilon^N)=f(x)+O(\varepsilon^{M+1})$$

N 是任意正整数；当 $\frac{2}{3}\rho_0 \leqslant \rho$ 时或对于 G 中的其它点，因 $\tilde{v}_m=0$，$(m=0, 1, \cdots, M+1)$

所以

$$L_\varepsilon[U_M]=L_\varepsilon\left[\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^m w_m\right]=f(x)+O(\varepsilon^{M+1})$$

(1.30) 式显然成立.

以 Z_M 表示 U_M 与 u_ε 的余项：$Z_M=u_\varepsilon-U_M$，则

$$L_\varepsilon[Z_M]=O(\varepsilon^{M+1}),$$
$$Z_M|_\Gamma=0,$$

根据极值原理知：$Z_M=O(\varepsilon^{M+1})$，得到下面的定理

定理 1　在假设 (H_1)—(H_4) 下，当 $-c$ 充分大时，狄立克雷问题 (1.1)—(1.2) 的解的一致渐近近似式是

$$u_\varepsilon=\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^m w_m+\sum_{m=0}^{M+1}\varepsilon^m\tilde{v}_m+Z_M \tag{1.32}$$

其中 $Z_M=O(\varepsilon^{M+1})$，M 是任意的正整数.

若假设 (H_4) 不成立，而成立下面的条件

$(H_{4'})$ 在边界 Γ 上

$$\sum_{i=1}^{m}a_i(x)n_i(x)<0, \tag{1.33}$$

即退化方程的特征线，随着参数 t 的增大而通过 Γ 穿出区域 G.

这时，从文献[5]知，当 $-c$ 充分大时，退化方程存在着唯一的充分光滑的解 $w_0\in C^N(G)$，在整个边界 Γ 上满足所给边值条件. 因此从递推方程 (1.9)，(1.10) 和边值条件

$$w_0|_\Gamma=g(x)|_\Gamma,\ w_m|_\Gamma=0,\quad (m=1, 2, \cdots, M).$$

可以唯一地确定出 $w_0\in C^N$，$w_1\in C^{N-2}$，$\cdots$，$w_M\in C^{N-2M}$，其中 $M=\left[\frac{N}{2}\right]-2$. 作和式

$$U_M=\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^m w_m,$$

可以证明

$$L_\varepsilon[U_M]=f(x)+O(\varepsilon^{M+1}),\ U_M|_\Gamma=g(x)|_\Gamma$$

根据极值原理知，$Z_M=u_\varepsilon-U_M=O(\varepsilon^{M+1})$，得到下面的定理.

定理 2　在假设 (H_1)—(H_3) 和 $(H_{4'})$ 下，当 $-C$ 充分大时狄立克雷问题 (1.1)—(1.2) 的解的一致渐近近似式是

$$u_\varepsilon=\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^m w_m+Z_M \tag{1.34}$$

其中 $Z_M=O(\varepsilon^{M+1})$ 和 $M=\left[\frac{N}{2}\right]-2$.

例 1　考察狄立克雷问题

$$L_\varepsilon[u^\varepsilon]\equiv\varepsilon\Delta u^\varepsilon-xu_x^\varepsilon-yu_y^\varepsilon-c_0u^\varepsilon=f(x, y),\quad (x, y)\in G, \tag{1.35}$$

$$u^\varepsilon|_\Gamma=\varphi(x, y)|_\Gamma. \tag{1.36}$$

其中 G 是单位圆：$x^2+y^2<1$，Γ 是圆周 $x^2+y^2=1$，假设 $f(x, y)$ 在 $\overline{G}$ 是无限次可微，$\varphi(x, y)$ 在 Γ 上是无限次可微，c_0 是正的常数. 这时狄立克雷问题 (1.35)—(1.36) 对于任意正数 ε 存在唯一的无限次可微的解 u^ε.

引进极坐标: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 将狄立克雷问题(1.34)—(1.35)化为

$$L_\varepsilon[u^\varepsilon]\equiv\varepsilon\left(\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial r^2}+r^{-1}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}+r^{-2}\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial\theta^2}\right)-r\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial r}-c_0u^\varepsilon=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta),\quad(1.37)$$

$$u^\varepsilon|_{r=1}=\varphi(\cos\theta,\ \sin\theta).\quad(1.38)$$

假设狄立克雷问题的解的 M 阶形式渐近近似式是

$$W_M(r,\ \theta,\ \varepsilon)=\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^m w_m(r,\ \theta)\quad(1.39)$$

代入(1.37)式, 令等式两端 ε 的各同次幂的系数相等, 得到关于 $w_m(m=0,\ 1,\ \cdots,\ M)$ 的递推方程

$$r\frac{\partial w_0}{\partial r}+c_0w_0=-f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\quad(1.40)$$

$$r\frac{\partial w_m}{\partial r}+c_0w_m=\frac{\partial^2w_{m-1}}{\partial r^2}+r^{-1}\frac{\partial w_{m-1}}{\partial r}+r^{-2}\frac{\partial^2w_{m-1}}{\partial\theta^2},\ (m=1,\ 2,\ \cdots,\ M).\quad(1.41)$$

从文献[5]知, (1.40)存在唯一的无限次可微的解 w_0

$$w_0=\int_0^1\sigma^{c_0-1}f(\sigma r\cos\theta,\ \sigma r\sin\theta)d\sigma$$

代入(1.41)的右端(取 $m=1$), 可以求得唯一的无限次可微的解 w_1

$$w_1=\int_0^1\sigma^{c_0-1}f_1(\sigma r\cos\theta,\ \sigma r\sin\theta)d\sigma$$

其中 $f_1=\Delta w_0$. 这样继续下去, 可以逐步地求得 $w_2,\ \cdots,\ w_M$. 显然所得的展开式 (1.39) 在边界 Γ 上一般不满足边值条件(1.38), 因此在 Γ 的邻域需补充边界层项.

令 $\rho=1-r$, 狄立克雷问题(1.37)—(1.38)具有形式.

$$L_\varepsilon[u^\varepsilon]\equiv\varepsilon\left[\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial\rho^2}-(1-\rho)^{-1}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\rho}+(1-\rho)^{-2}\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial\theta^2}\right]+(1-\rho)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\rho}-c_0u^\varepsilon$$
$$=f((1-\rho)\cos\theta,\ \sin\theta)\quad(1.42)$$

$$u^\varepsilon|_{\rho=0}=\varphi(\cos\theta,\ \sin\theta)\quad(1.43)$$

与(1.11)式比较, $d_{2,2}=1$, $d_{1,2}=0$, $d_{1,1}=(1-\rho)^{-2}$, $d_1=0$, $d_2=-(1-\rho)^{-1}$, $a_2=(1-\rho)$, $a_1=0$, $b=0$, $c=-c_0$, 因 $u(\rho,\ \theta)=\int_0^\rho\frac{a_2}{d_{22}}dt=\rho\left(1-\frac{\rho}{2}\right)$, 关于 $\beta^{(0)}$ 的一阶方程 (1.23) 具有形式

$$(1-\rho)\frac{\partial\beta^{(0)}}{\partial\rho}+(c_0-2)\beta^{(0)}=0.$$

它的满足边值条件(1.27)的解为

$$\beta^{(0)}=\left(\varphi(\cos\theta,\ \sin\theta)-\int_0^1\sigma^{s-1}f(\sigma\cos\theta,\ \sigma\sin\theta)d\sigma\right)(1-\rho)^{c_0-2}$$

所以边界层项(1.17)式中的 v_0 具有形式:

$$v_0=\left(\varphi(\cos\varphi,\ \sin\varphi)-\int_0^1\sigma^{c_0-1}f(\sigma\cos\theta,\ \sigma\sin\theta)d\sigma\right)(1-\rho)^{c_0-2}\exp\left[-\varepsilon^{-1}\rho\left(1-\frac{\rho}{2}\right)\right]$$

又关于 $\beta^{(1)}$ 的一阶方程(1.26)为 (取 $k=1$)

$$(1-\rho)\frac{\partial\beta^{(1)}}{\partial\rho}+(c_0-2)\beta^{(1)}=\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+(1-\rho)^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-(1-\rho)^{-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\beta^{(0)}$$

可以类似地求出它的满足定解条件(1.28) (取 $k=1$) 的解 $\beta^{(1)}$, 随之求得(1.16)式中的 v_1.

这样继续下去，可以逐步地求得 v_m，$(m=2, \cdots M)$，得到边界层项

$$V_M=\sum_{m=0}^{M-1}\varepsilon^m v_m. \tag{1.44}$$

其中 $v_{M+1}=\beta^{(M+1)}\exp\left[-\varepsilon^{-1}\rho\left(1-\frac{\rho}{2}\right)\right]$，$\beta^{(M+1)}$ 是一阶方程(1.26)(取 $k=M+1$)满足齐次定解条件．$\beta^{(M+1)}|_{\rho=0}=0$ 的解．所以

$$u^\varepsilon=W_M+V_M+Z_M. \tag{1.45}$$

其中 W_M 和 V_M 分别由(1.39)和(1.44)式定义，$Z_M=O(\varepsilon^{M+1})$

例 2　考察狄立克雷问题

$$L_\varepsilon[u^\varepsilon]\equiv\varepsilon\Delta u^\varepsilon+xu_x^\varepsilon+yu_y^\varepsilon-cu^\varepsilon=f(x, y),\quad (x, y)\in G, \tag{1.46}$$

$$u^\varepsilon|_\Gamma=\varphi(x, y)|_\Gamma. \tag{1.47}$$

其中 G 是单位圆：$x^2+y^2<1$，Γ 是圆域 G 的边界，假设 $f(x, y)\in C^\infty(\bar{G})$，$\varphi(x, y)\in C^\infty(\Gamma)$，$c$ 是正的常数．这时狄立克雷问题(1.46)—(1.47)对于任意正数 ε 存在唯一的解 $u^\varepsilon\in{}_1C^\infty(\bar{G})$．

引进极坐标：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，狄立克雷问题化为

$$L_\varepsilon[u^\varepsilon]\equiv\varepsilon\left(\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial r^2}+r^{-1}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial r}+r^{-2}\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial\theta^2}\right)+r\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial r}-cu^\varepsilon=f(r\cos\theta, r\sin\theta) \tag{1.48}$$

$$u^\varepsilon|_{r=1}=\varphi(\cos\theta, \sin\theta) \tag{1.49}$$

假设狄立克雷问题的解的 M 阶渐近近似式是

$$W_M(r, \theta, \varepsilon)=\sum_{n=0}^{M}\varepsilon^m w_m(r, \theta) \tag{1.50}$$

代入(1.48)—(1.49)，令等式两端 ε 的各同次幂的系数相等．得到关于 $w_m(m=0, 1, \cdots, M)$ 的递推方程和边值条件

$$r\frac{\partial w_0}{\partial r}-cw_0=f(r\cos\theta, r\sin\theta),\quad w_0|_{r=1}=\varphi(\cos\theta, \sin\theta), \tag{1.51}$$

$$r\frac{\partial w_m}{\partial r}-cw_m=-\left(\frac{\partial^2w_{m-1}}{\partial r^2}+r^{-1}\frac{\partial^2 w_{m-1}}{\partial r}+r^{-2}\frac{\partial^2w_{m-1}}{\partial\theta^2}\right),\quad w_m|_{r=1}=0,$$
$$(m=1, 2, \cdots, M). \tag{1.52}$$

解柯西问题(1.51)，得到

$$w_0=r^c\varphi(\cos\theta, \sin\theta)+r^c\int_1^r f(t\cos\theta, t\sin\theta)t^{-c-1}dt$$

设 c 值是充分大：$c\geqslant N$，则 $w_0\in C^N$，$\frac{\partial w_0}{\partial r}\in C^{N-1}$，$\frac{\partial w_0}{\partial r^2}\in C^{N-2}$．再从柯西问题(1.52)(取 $m=1$)可以求得 w_1，并且 $w_1\in C^{N-2}$，$\frac{\partial w_1}{\partial r}\in C^{N-3}$，$\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2}\in C^{N-4}$．这样继续下去，可以逐步地求得 $w_i(i=1, 2, \cdots, M)$ 其中 $M=\left[\frac{N}{2}\right]-2$．这时可以求得狄立克雷问题(1.46)—(1.47)的 M 阶渐近近似式

$$u^\varepsilon=\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^m w_m+Z_M$$

其中 $M=\left[\frac{N}{2}\right]-2$，$Z_M=O(\varepsilon^{M+1})$

二、第三边值问题

考察二阶椭圆型方程的第三边值问题

$$L_\varepsilon[u_\varepsilon]\equiv\varepsilon L_2[u_\varepsilon]+L_1[u_\varepsilon]=f(x),\quad x\in G,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0. \tag{2.1}$$

$$l[u_\varepsilon]\equiv\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}+h(x)u_\varepsilon\right)\Big|_\Gamma=g(x)\,|_\Gamma,\quad h(x)\leqslant 0. \tag{2.2}$$

其中 L_2 和 L_1 由(1.3)—(1.5)式给出，n 表示 Γ 的内法线. 在1952年，O. A. Олейник[7] 对于两个自变量的情形，在退化方程不存在奇点的条件下，研究了边值问题的解当 $\varepsilon\to 0$ 时的性质，在不包含某部分边界的子区域上，导出解的零阶近似式，没有给出边界层项. 这里，我们给出构造边界层项的一般方法，并对于某一类二阶椭圆型方程的第三边值问题，导出解的一致渐近近似式.

作假设 (H_1)—(H_3)，又假设 $h(x)$ 在 Γ 上无限次可微，这时边值问题(2.1)—(2.2)对于任意 ε 存在唯一的无限次可微解 u_ε.

先考察成立 (H_4) 的情况. 同狄立克雷问题一样地可以作得边值问题(2.1)—(2.2)在 Γ 邻域的外部区域上的 M 阶渐近近似式

$$W_M(x)=\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^m w_m(x). \tag{2.3}$$

其中 $w_m(x)$，$(m=0,1,\cdots,M)$，由递推方程(1.9)，(1.10)唯一确定. 下面再构造边界层.

在局部坐标系 (ρ,φ) 下，边值条件(2.2)具有形式

$$l[u_\varepsilon]\equiv\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\rho}+hu_\varepsilon\right)\Big|_{\rho=0}=g\,|_{\rho=0}. \tag{2.4}$$

引进两变量
$$\tilde{\rho}=\frac{u(\rho,\varphi)}{\varepsilon},\quad \bar{\rho}=\rho,$$

其中 $u(\rho,\varphi)=\int_0^\rho\frac{a_m(t,\varphi)}{d_{m,m}(t,\varphi)}dt$，将边值条件(2.4)分解成

$$l^*[u_\varepsilon]\equiv\left[\varepsilon^{-1}u_\rho\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\tilde{\rho}}+\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\rho}+hu_\varepsilon\right)\right]\Big|_{\rho=0}=g(\varphi) \tag{2.5}$$

其中 $g(\varphi)=g(0,\varphi)$. 假设边界层项具有下面的渐近近似式:

$$V_M=\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^{m+1}V_m(\tilde{\rho},\rho,\varphi) \tag{2.6}$$

作和式

$$u_M=W_M+V_M=\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^m w_m(x)+\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^{m+1}v_m(\tilde{\rho},\rho,\varphi) \tag{2.7}$$

代入(2.4)式得

$$l[u_M]=l\left[\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^m w_m\right]+l^*\left[\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^{m+1}v_m\right]=g(0,\varphi)$$

令等式两端 ε 的各同次幂的系数相等，得到关于 $v_m(m=0,1,\cdots,M)$ 的边值条件

$$u_\rho\frac{\partial v_0}{\partial\tilde{\rho}}+\frac{\partial w_0}{\partial\rho}+hw_0=g(\varphi), \tag{2.8}$$

$$u_\rho \frac{\partial v_m}{\partial \tilde{\rho}} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + h\right)(v_{m-1} + w_m) = 0, \quad (m=1, 2, \cdots, M). \tag{2.9}$$

(略取边界值的记号)，从(2.8)、(2.9)式可以逐步地得到关于 $\beta^{(0)}$, $\beta^{(m)}$, $(m=1, 2, \cdots, M)$ 的定解条件，再解一阶方程(1.23)或(1.26)的柯西问题，可以求得 $\beta^{(0)}$, $\beta^{(m)}(m=1, 2, \cdots, M)$，随之求得 $v_m = \beta^{(m)} \exp(-\tilde{\rho}) = \beta^{(m)} \exp[-\varepsilon^{-1} u(\rho, \varphi)]$, $(m=0, 1, \cdots, M)$，再代入(2.6)式就求得边界层项 V_M. 作函数 $\tilde{V}_M = \psi(x) V_M$，可以同狄立克雷问题一样地证明和式

$$\tilde{u}_M = W_M + \tilde{V}_M \tag{2.10}$$

是第三边值问题(2.1)—(2.2)的 M 阶形式渐近近似式.

以 Z_M 表示 $\tilde{u}_M$ 与 u_ε 的余项：$Z_M = u_\varepsilon - \tilde{u}_M$，因

$$L_\varepsilon[Z_M] = O(\varepsilon^{M+1}), \quad l[Z_M] = O(\varepsilon^{M+1}).$$

根据文献[8]的定理 4 知 $Z_M = O(\varepsilon^{M+1})$，所以 $\tilde{u}_M$ 是边值问题的解的 M 阶渐近近似式，即

$$u_\varepsilon = W_M + \tilde{V}_M + Z_M \tag{2.11}$$

其中 $Z_M = O(\varepsilon^{M+1})$.

再考察成立条件$(H_{4'})$的情形. 假设边值问题(2.1)—(2.2)的解的 M 阶渐近近似式是

$$W_M = \sum_{m=0}^{M} \varepsilon^m w_m(x) \tag{2.12}$$

将上式代入(2.1)—(2.2)式，令等式两端 ε 的各同次幂的系数相等，得到关于 $w_m(x)$, $(m=0, 1, \cdots, M)$ 的边值问题

$$L_1[w_0] = f(x), \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} + h(x) w_0 |_\Gamma = g(x), \tag{2.13}$$

$$L_1[w_m] = -L_2[w_{m-1}], \quad \frac{\partial w_m}{\partial n} + h(x) w_m |_\Gamma = 0, \quad (m=1, 2, \cdots, M). \tag{2.14}$$

考察边值问题

$$L_1[u] \equiv \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + (b(x) + c) u = F(x), \tag{2.15}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h(x) u\right)\Big|_\Gamma = G(x) |_\Gamma. \tag{2.16}$$

以 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{m-1})$ 表示边界 Γ 上的曲线坐标，以 t 表示方程(2.15)的特征线的弧长，取 t 增加的方向为特征线的正向. 因 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial n} \cos(n, t) + \frac{\partial u}{\partial \varphi_1} \cos(\varphi_1, t) + \cdots + \frac{\partial u}{\partial \varphi_{m-1}} \cos(\varphi_{m-1}, t)$，所以若 u 是边值问题(2.15)—(2.16)在区域 $\bar{G}$ 上的连续可微解，则 u 在 Γ 上的值应满足微分方程

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial \varphi_1} \cos(\varphi_1, t) + \cdots + \frac{\partial u}{\partial \varphi_{m-1}} \cos(\varphi_{m-1}, t) \\ &= \left(h(\varphi) \cos(n, t) - \frac{b(\varphi) + c}{\sqrt{\sum a_i^2}}\right) u + \frac{F(\varphi)}{\sqrt{\sum a_i^2}} - G(\varphi) \cos(n, t) \end{aligned} \tag{2.17}$$

从文献[5, 9]知(在超曲面 Γ 上仍然成立)，当 $-c$ 充分大时，方程(2.17)有唯一的充分光滑的解，以此解作为 u 在 Γ 上的值. 若在 Γ 上，$\cos(\varphi_i, t) \equiv 0$ $(i=1, 2, \cdots, m-1)$(方程

(1.46)的第三边值问题就属于这种情形)，则定义

$$u=\frac{\sqrt{\sum a_i^2}\,G(\varphi)\cos(n,\ t)-F(\varphi)}{\sqrt{\sum a_i^2}\,h(\varphi)\cos(n,\ t)-[b(\varphi)+c]} \tag{2.18}$$

这样，就可从方程(2.15)唯一地确定出u. 因此从方程(2.13)、(2.14)可以唯一地确定w_m, $(m=0,\ 1,\ \cdots,\ M)$和$w_m\in C^{N-2m}$, $M=\left[\frac{N}{2}\right]-2$从而得到第三边值问题(2.1)—(2.2)的解的渐近近似式

$$u_\varepsilon=\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^m w_m+Z_M \tag{2.19}$$

从文献[8]的定理4知$Z_M=O(\varepsilon^{M+1})$，故有下面的定理

定理3 在假设(H_1)—(H_4)下，当$-c$充分大时，第三边值问题(2.1)—(2.2)的解的渐近近似式是

$$u_\varepsilon=W_M+\widetilde{V}_M+Z_M$$

其中W_M由(2.3)式给出，$\widetilde{V}_M=\psi(x)V_M$是边界层项，$V_M$由(2.6)式给出和$Z_M=O(\varepsilon^{M+1})$. 其中$M=\left[\frac{N}{2}\right]-2$.

若代替(H_4)而成立$(H_{4'})$，则解的渐近近似式是

$$u_\varepsilon=W_M+Z_M$$

其中W_M由(2.12)式给出，$Z_M=O(\varepsilon^{M+1})$，不出现边界层项.

注　若边界Γ上有一部分边界Γ_+被特征线穿出，一部分边界Γ_-被特征线穿入，只要退化方程在Γ_+取值的柯西问题存在充分光滑的解，仍可应用上面的方法求出解在Γ_-邻域的边界层项，只是需要除去与特征线相切的那部分边界的邻域.

参 考 文 献

[1] Вишик, М. И. и Люстерник, Л. А., *УМН* **XII**: 5(1957).
[2] Eckhaus, W., and de Jager, E. M., *Arch. Rat. Mech. and An.*, **23**: 1 (1966).
[3] Каменомостская, С. Л., Изв. *АН СССР* **19**: 3 (1955).
[4] de Jager, E. M., "Confernce On the theory of ordinary and Partial Differential Equations", *Lecture Notes in Mathematics*, **280** (1972).
[5] 谷超豪，复旦大学学报，**4** (1978).
[6] 江福汝，复旦大学学报，**2** (1978).
[7] Олейник, О. А., *Матем. сб.*, **31** (73) (1952).
[8] Олейник, О. А., *Матем. сб.*, **30** (72) (1952).
[9] 谷超豪，数学学报，**14**: 4 (1964).

SINGULAR PERTURBATION PROBLEMS FOR A CLASS OF ELLIPTIC EQUATIONS OF SECOND ORDER AS DEGENERATED OPERATOR HAS SINGULAR POINTS

JIANG FURU　　GAO RUXI
(*Fudan University*)

ABSTRACT

In this paper we study the first and the third boundary value problems for the elliptic equation

$$\varepsilon\left(\sum_{i,j=1}^{m} d_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{m} d_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+d(x)u\right)+\sum_{i=1}^{m} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+b(x)+c$$
$$=f(x),\quad x\in G\,(0<\varepsilon\ll 1),$$

as the degenerated operator has singular points, where

$$\sum_{i,j=1}^{m} d_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \delta_0 \sum_{i=1}^{m}\xi_i^2,\quad (\delta_0>0,\ x\in G).$$

The uniformly valid asymptotic solutions of boundary value problems have been obtained under the condition of

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(x)n_i(x)\,|_{\partial G}>0,\quad \text{or}\quad \sum_{i=1}^{m} a_i(x)n_i(x)\,|_{\partial G}<0,$$

where $n=(n_1(x),\ n_2(x),\ \cdots,\ n_m(x))$ is the interior normal to ∂G.