数 学 年 刊
1 (3, 4) 1980

拟 本 原 环 (Ⅱ)

许 永 华
(复旦大学数学研究所)

引 言

我们研究环类的结构通常采用这样的基本想法：首先确定 Jacobson 根，然后作出 Jacobson 半单纯环，最后运用子直和方法把研究对象归结到本原环，而对本原环的研究又可归结到对除环上向量空间的线性变换环的研究. 在这方面如所周知地获得了丰富和重要的结果[2]. 为了进一步对更广泛环类结构的研究，我们自然希望能获得一种根，使它比 Jacobson 根要小，从而使它的半单纯环类比 Jacobson 半单纯环类要广泛，并且又能保持对 Jacobson 半单纯环类所获得的一些重要结果. 我们知道，在扩大半单纯环类的时候往往伴随着研究对象的复杂化. 特别把扩大了的半单纯环类归结到基本研究对象的环类时，这种环类要比本原环类复杂得多. 为了既能保持本原环的经典的重要的结果，又能扩大环类结构的研究，作者在文[1]中选择了拟本原环的概念. 为使拟本原环类成为我们研究基本对象，我们在 §1 中引进了一般 Σ–根的概念，并对一般 Σ–根进行特征性的描述，然后我们取出一种特殊的 Σ 来定义一种特殊的 Σ–根，我们称它为拟 Jacobson 根. 然后我们获得了拟 Jacobson 半单纯概念，再运用子直和方法把拟 Jacobson 半单纯环类归结到我们所要求的基本对象环类——拟本原环类. 正如文[1]中所述，本原环是拟本原环的一种特殊类型. 这样，我们的研究对象具有更广泛的意义. 同时 §1 中还指出，Jacobson 根是一种特殊的 Σ–根. 本文的第二节是继作者文[1]的理论，我们引进了空间化元的概念，并对空间化元所生成的环的结构进行了描述.

一、Σ–根

本文指的环是结合环. 我们称 R 的右理想 $\Im$ 为模右理想，如果有元素 $a\in R$ 使 $\{r+ar\}\subset\Im$, 其中 $r\in R$.

为了避免术语上的混淆，我们把上述的模右理想 $\Im$ 特称为 R 的模右理想.

记 $\Sigma=\{\Im_i\}$ 是一个任意取定的 R 的模右理想集合. 下面根据这样特定的集合 Σ 对 R 引进 Σ–根的概念. 为此我们先引进如下一些定义.

定义 1.1 记 $\Im$ 是 R 的一个右理想. $\Im$ 的一个元素 a 称为 $\Im$–右拟正则元，如果 $\{i+ai\}=\Im$, $i\in\Im$[1]. 称 R 的一个右理想 L 为 $\Im$–正则右理想，如果 L 的每个元素皆是

本文 1979 年 9 月 26 日收到.

1) $\{i+ai\}$ 表示集合 $\{i+ai \mid 所有\ i\in\Im\}$.

$\mathfrak{I}$-右拟正则元.

定义 1.2 设 $\mathfrak{I}$ 及 $\mathfrak{I}'$ 是 R 的两个右理想, $\mathfrak{I}'$ 称为 $\mathfrak{I}$-模右理想, 如果 $\mathfrak{I}'\subset\mathfrak{I}$ 并且存在元素 $a\in\mathfrak{I}$ 使 $\{i+ai\}\subset\mathfrak{I}'$, $i\in\mathfrak{I}$.

性质 1.1 设 R 的右理想 $\mathfrak{I}$ 含有非 $\mathfrak{I}$-右拟正则元, 则 $\mathfrak{I}$ 必有 $\mathfrak{I}$-极大模右理想.

证 记 a 是一个非 $\mathfrak{I}$-右拟正则元, 那末显然有 $\{i+ai\}+|a)=\mathfrak{I}$, $i\in\mathfrak{I}$, 其中 $|a)$ 表示所有含元素 a 的 R 的右理想之交. 那末由 Zorn 引理知, 必存在一个 $\mathfrak{I}$-极大模右理想.

现在我们引进符号 $\hat{\mathfrak{I}}$. 令 $\mathfrak{I}\in\Sigma$. 如果 $\mathfrak{I}$ 是 $\mathfrak{I}$-正则右理想, 那末记 $\hat{\mathfrak{I}}=\mathfrak{I}$; 如果 $\mathfrak{I}$ 不是 $\mathfrak{I}$-正则右理想, 那末令 $\hat{\mathfrak{I}}$ 表示 $\mathfrak{I}$ 的一个 $\mathfrak{I}$-极大模右理想.

记 $\mathfrak{I}\in\Sigma$. 如果 $\mathfrak{I}$ 不是 $\mathfrak{I}$-正则右理想, 则记 $\hat{\Sigma}_{\mathfrak{I}}=\{\hat{\mathfrak{I}}|\hat{\mathfrak{I}}$ 是 $\mathfrak{I}$-极大模右理想$\}$; 如果 $\mathfrak{I}$ 是 $\mathfrak{I}$-正则右理想, 则记 $\hat{\Sigma}_{\mathfrak{I}}=\mathfrak{I}$, 即 $\hat{\Sigma}_{\mathfrak{I}}$ 只含一个元素 $\hat{\mathfrak{I}}=\mathfrak{I}$. 有了 $\hat{\Sigma}_{\mathfrak{I}}$ 的上述定义我们记 $\hat{\Sigma}$ 为

$$\hat{\Sigma}=\{\hat{\mathfrak{I}}\,|\,\hat{\mathfrak{I}}\in\hat{\Sigma}_{\mathfrak{I}},\ \mathfrak{I}\in\Sigma\}\tag{1.1}$$

另方面, 对于一个元素 $\mathfrak{I}\in\Sigma$ 我们记 $\hat{J}_{\mathfrak{I}}=\bigcup L_i$, 其中 L_i 是 $\mathfrak{I}$-正则右理想, $\bigcup$ 表示集合和, 同时我们记

$$\hat{J}=\bigcap_{\mathfrak{I}\in\Sigma}\hat{J}_{\mathfrak{I}}\tag{1.2}$$

最后我们记集合 J_1 为

$$J_1=\{b\,|\,b\in\bigcap_{\mathfrak{I}\in\Sigma}\mathfrak{I}\text{ 且 }b\text{ 满足如下条件}\}\tag{1.3}$$

即如果存在 $\mathfrak{I}$-模右理想 $\mathfrak{I}^{(1)}$ 有关系式 $|b)+\mathfrak{I}^{(1)}=\mathfrak{I}\in\Sigma$, 则必有 $\mathfrak{I}^{(1)}=\mathfrak{I}$.

引理 1.1 上面(1.3)式所定义的 J_1 必是 R 的右理想并且 $J_1=\bigcap_{\hat{\mathfrak{I}}\in\hat{\Sigma}}\hat{\mathfrak{I}}$.

证 若 $a\in\bigcap_{\hat{\mathfrak{I}}\in\hat{\Sigma}}\hat{\mathfrak{I}}$ 且 $a\,\overline{\in}\,J_1$, 那末由 J_1 的定义知必有一个 $\mathfrak{I}$-模右理想 $\mathfrak{I}^{(1)}\neq\mathfrak{I}$ 使得 $|a)+\mathfrak{I}^{(1)}=\mathfrak{I}\in\Sigma$. 于是由 Zorn 引理知, 必有元素 $\hat{\mathfrak{I}}\in\hat{\Sigma}$ 满足 $|a)+\hat{\mathfrak{I}}=\mathfrak{I}$, 但这与 $a\in\bigcap_{\hat{\mathfrak{I}}\in\hat{\Sigma}}\hat{\mathfrak{I}}$ 矛盾. 因此 $\bigcap\hat{\mathfrak{I}}\sqsubseteq J_1$. 反之, 若 $a\in J_1$, $a\,\overline{\in}\bigcap_{\hat{\mathfrak{I}}\in\hat{\Sigma}}\hat{\mathfrak{I}}$, 那末必有 a 不属于某个 $\hat{\mathfrak{I}}\in\hat{\Sigma}$. 因 $a\,\overline{\in}\,\hat{\mathfrak{I}}$, 所以 $\hat{\mathfrak{I}}\neq\mathfrak{I}$. 故有 $|a)+\hat{\mathfrak{I}}=\mathfrak{I}$. 这与 $a\in J_1$ 相矛盾. 因此证得 $J_1\sqsubseteq\bigcap\hat{\mathfrak{I}}$.

引理 1.2 J_1 是 J_1-正则右理想, 并且 $J_1=\hat{J}$.

证 先证 $\hat{J}\sqsubseteq J_1$. 事实上, 若 $a\in\hat{J}$ 且有 $|a)+\mathfrak{I}^{(1)}=\mathfrak{I}\in\Sigma$, 其中 $\mathfrak{I}^{(1)}$ 表示 $\mathfrak{I}$-模右理想, 因此必有元素 $e\in\mathfrak{I}$ 使 $\{i+ei\}\subset\mathfrak{I}^{(1)}$, $i\in\mathfrak{I}$. 于是有 $e=a'+b$, $a'\in|a)$, $b\in\mathfrak{I}^{(1)}$. 因为 $a\in\hat{J}=\bigcap\hat{J}_{\mathfrak{I}}$, 所以对每个 $\hat{J}_{\mathfrak{I}}$ 皆使 $\hat{J}_{\mathfrak{I}}$ 包含 a, 故有 $\mathfrak{I}$-正则右理想 L 包含 a, 这样得出 $|a)$ 也是 $\mathfrak{I}$-正则右理想. 但是 $a'\in|a)$, 因此 $\{i+a'i\}=\mathfrak{I}$, $i\in\mathfrak{I}$. 于是必有元素 $z\in\mathfrak{I}$ 使得 $a'z+z+a'=0$, 于是由 $a'=e-b$ 代入上式得 $e\in\mathfrak{I}^{(1)}=\mathfrak{I}$, $\hat{J}\sqsubseteq J_1$.

现在要证 $J_1\sqsubseteq\hat{J}$. 事实上, 令 $a\in J_1$, $L=\{i+ai\}$, 其中 $i\in\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}\in\Sigma$. 显然 L 是 R 的一个右理想, 且有 $|a)+\{i+ai\}=\mathfrak{I}$. 因此由 $a\in J_1$ 得出 $\{i+ai\}=\mathfrak{I}$, 即 a 是 $\mathfrak{I}$-右拟正则元. 又因 $|a)\subset J_1$, 故同样可证, $|a)$ 的任一元素 a' 均为 $\mathfrak{I}$-右拟正则元. 这就证得 $a\in\hat{J}_{\mathfrak{I}}$ 对任何 $\mathfrak{I}\in\Sigma$. 故得 $a\in\bigcap\hat{J}_{\mathfrak{I}}=\hat{J}$.

定义 1.3 Σ 的一个元素 $\mathfrak{I}$ 称为满足 J_1-左理想化条件, 若 $x\in J_1$, $y\in\mathfrak{I}$, 则对于所有 $r\in R$ 皆有 $rx+ryx\in\mathfrak{I}$. 若 Σ 的每个元素皆满足 J_1-左理想化条件, 则称 Σ 满足 J_1-

左理想化条件.

引理 1.3 若 $\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$满足 J_1-左理想化条件,那末 $J_1=\hat{J}$ 必是 R 的理想.

证 令 $x\in J_1$, $r\in R$, 要证 $rx\in J_1$. 事实上,因为 $x\in J_1=\hat{J}$,所以对每个 $\mathfrak{J}\in\Sigma$ 皆有 $x\in\hat{J}_{\mathfrak{J}}$, 因此必有 $\mathfrak{J}$-正则右理想 L 包含 x, 即是 $xr\in L$. 于是存在元素 $i\in\mathfrak{J}$ 使得 $xr+xri+i=0$, $rx+(-rx-rix)+rx(-rx-rix)=-r(xr+xri+i)x=0$. 由假设知, 对于 $x\in J_1$, $y\in\mathfrak{J}$ 必有 $rx+ryx\in\mathfrak{J}$,其中 r 是 R 的任一元素. 这样,我们有 $-rx\in\{rxs+s\}$, $s\in\mathfrak{J}$. 这就得出$\{rxs+s\}=\mathfrak{J}$, $s\in\mathfrak{J}$, 因此 rx 是 $\mathfrak{J}$-右拟正则元. 现在要证, $|rx)$的任一元素是 $\mathfrak{J}$-右拟正则元. 事实上,若 $a\in|rx)$, 则 $a=rxn+rxs'$, 其中 n 是整数, $s'\in R$. 因为 x 含在 $\mathfrak{J}$-正则右理想 L 中,所以 $xn+xs'\in L$, 那末与上面那样可证 $rxn+rxs'$ 是 $\mathfrak{J}$-右拟正则元,这就证明了$|rx)\subset\hat{J}_{\mathfrak{J}}$, 因此 $rx\in\hat{J}=J_1$.

引理 1.4 设 $\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$是满足 J_1-左理想化条件的集合. 记 $\tilde{J}=\{a|a\in\bigcap_{\mathfrak{J}\in\Sigma}\mathfrak{J}\}$ 且 a 还满足如下条件: 如果存在 $\mathfrak{J}$-模右理想 $\mathfrak{J}^{(1)}$ 使$(a)+\mathfrak{J}^{(1)}=\mathfrak{J}\in\Sigma$, 则必有 $\mathfrak{J}^{(1)}=\mathfrak{J}$, 这里$(a)$表示所有含 a 的 R 的理想之交,那末 $\tilde{J}=J_1=\hat{J}$.

证 先证 $\tilde{J}\subseteq J_1$. 若 $a\subset\tilde{J}$ 且$|a)+\mathfrak{J}^{(1)}=\mathfrak{J}\in\Sigma$, 其中 $\mathfrak{J}^{(1)}$ 仍如前那样表示 $\mathfrak{J}$-模右理想, 那末有$(a)+\mathfrak{J}^{(1)}=\mathfrak{J}$, 由 $a\in\tilde{J}$ 得出 $\mathfrak{J}^{(1)}=\mathfrak{J}$. 因此 $\tilde{J}\subseteq J_1$. 现在来证 $J_1\subseteq\tilde{J}$. 若 $a\in J_1$ 且 $(a)+\mathfrak{J}^{(1)}=\mathfrak{J}\in\Sigma$, 我们要证 $\mathfrak{J}^{(1)}=\mathfrak{J}$. 令 $a'\in(a)$, 我们先证 a' 必是 $\mathfrak{J}$-右拟正则元. 如果 a' 不是 $\mathfrak{J}$-右拟正则元,那末必有$(a')+\{i+a'i\}=\mathfrak{J}$, $i\in\mathfrak{J}$ 且$\{i+a'i\}\neq\mathfrak{J}$. 这与 $a'\in(a)\subset J_1=\hat{J}$ 相矛盾. 因此 a' 必是 $\mathfrak{J}$-右拟正则元. 另方面, 因 $\mathfrak{J}^{(1)}$ 是 $\mathfrak{J}$-模右理想,故必有 $e\in\mathfrak{J}$ 使得$\{i+ei\}\subset\mathfrak{J}^{(1)}$, $i\in\mathfrak{J}$. 于是由$(a)+\mathfrak{J}^{(1)}=\mathfrak{J}$ 得出 $e=a'+b$, $a'\in(a)$, $b\in\mathfrak{J}^{(1)}$. 因 a' 是 $\mathfrak{J}$-右拟正则元, 所以必有元素 $z\in\mathfrak{J}$ 使得 $a'+a'z+z=0$, 由此易知 $e\in\mathfrak{J}^{(1)}$, 因此 $\mathfrak{J}^{(1)}=\mathfrak{J}$. 故 $a\in\tilde{J}$, $J_1\subseteq\tilde{J}$. 证毕.

设 $\mathfrak{J}$ 是 R 的右理想. 记 $\mathfrak{J}:R=\{x\in R|Rx\subset\mathfrak{J}\}$, 那末易知 $\mathfrak{J}:R$ 是 R 的一个理想.

引理 1.5 记 $\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}$, 则 $\hat{\mathfrak{J}}:R$ 是 R 的理想,它在 $\hat{\mathfrak{J}}$ 中是最大的.

证 注意到, $\hat{\mathfrak{J}}$ 也是 R 的模右理想. 事实上, 由 $\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}$ 知, $\hat{\mathfrak{J}}$ 是 $\mathfrak{J}$-模右理想, 其中 $\mathfrak{J}\in\Sigma$. 因此存在元素 $e\in\mathfrak{J}$ 使$\{i+ei\}\subset\hat{\mathfrak{J}}$, $i\in\mathfrak{J}$. 因为 $\mathfrak{J}\in\Sigma$ 是 R 的模右理想, 故必有元素 $E\in R$ 使得$\{r+Er\}\subset\mathfrak{J}$, $r\in R$. 于是由 $r+Er\in\mathfrak{J}$ 得出$\{r+Er+er+eEr\}\subset\hat{\mathfrak{J}}$, $r\in R$, 即$\{r+(E+e+eE)r\}\subset\hat{\mathfrak{J}}$, 因此 $\hat{\mathfrak{J}}$ 必是 R 的模右理想. 现在来证引理的结论. 若 $Rx\subset\hat{\mathfrak{J}}$, 那末由 $x+(E+e+eE)x\in\hat{\mathfrak{J}}$ 得出 $x\in\hat{\mathfrak{J}}$, 因此 $\hat{\mathfrak{J}}:R\subseteq\hat{\mathfrak{J}}$. 另方面,若 I 是 R 的理想且 $I\subset\hat{\mathfrak{J}}$, 于是 $RI\subset\hat{\mathfrak{J}}$, 因此 $I\subseteq\hat{\mathfrak{J}}:R$.

定理 1.1 若 Σ 是满足 J_1-左理想化条件的集合,记 $\mathfrak{P}=\hat{\mathfrak{J}}:R$, $\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}$, 那末

$$J_1=\hat{J}=\sum_{\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}}\hat{\mathfrak{J}}=\bigcap_{\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}}\mathfrak{P}.$$

证 只要证明 $J_1\subseteq\cap\mathfrak{P}$ 就好了. 事实上, 若 $x\in J_1$, $x\bar{\in}\cap\mathfrak{P}$, 那末必有某个 $\mathfrak{P}$ 不含 x. 因此由引理 1.5 知, $(x)+\mathfrak{P}\not\subset\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}$, 其中 $\mathfrak{P}=\hat{\mathfrak{J}}:R$. 但 $x\in J_1=\bigcap_{\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}}\hat{\mathfrak{J}}$, 因此得出 $(x)+\mathfrak{P}\subset\hat{\mathfrak{J}}$ 的矛盾. 故有 $J_1\subseteq\cap\mathfrak{P}$.

定义 1.4 设 $\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$是满足 J_1-左理想化条件的集合. $\hat{\Sigma}=\{\hat{\mathfrak{J}}|\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}_{\mathfrak{J}}, \mathfrak{J}\in\Sigma\}$ 如(1.1)式所述的意义, 那末称 $J_1=\bigcap_{\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}}\hat{\mathfrak{J}}$ 为 R 的 Σ-根. 如果 $J_1=0$, 则称 R 为 Σ-半

单纯环.

定理1.2 设$\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$是满足J_1-左理想化条件的集合，J_1是R的Σ-根. 记$\bar{\Sigma}=\{\bar{\mathfrak{J}}\}$，$\bar{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}/J_1$，$\mathfrak{J}\in\Sigma$；$\bar{\hat{\Sigma}}=\{\bar{\hat{\mathfrak{J}}}\}$，$\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}$，$\bar{\hat{\mathfrak{J}}}=\hat{\mathfrak{J}}/J_1$，那末$\bar{R}=R/J_1$的$\bar{\Sigma}$-根为零.

证 容易知道，$\bar{\Sigma}$中的每个元素是$\bar{R}$的模右理想. $\bar{\hat{\Sigma}}$中的每个元素$\bar{\hat{\mathfrak{J}}}$是$\bar{R}$的右理想且是$\bar{\mathfrak{J}}$-极大模右理想. 如果$\bar{\mathfrak{J}}'$是$\bar{R}$的右理想且是$\bar{\mathfrak{J}}$-极大模右理想，那末$\bar{\mathfrak{J}}'$的原象$\mathfrak{J}'$是R的右理想且是$\mathfrak{J}$-极大模右理想，因此$\mathfrak{J}'\in\hat{\Sigma}$，故$\bar{\mathfrak{J}}'\in\bar{\hat{\Sigma}}$. 记$\bar{J}_1'=\bigcap\limits_{\bar{\hat{\mathfrak{J}}}\in\bar{\hat{\Sigma}}}\bar{\hat{\mathfrak{J}}}$. 因为$\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$满足$J_1$-左理想条件，因此易知$\bar{\Sigma}=\{\bar{\mathfrak{J}}\}$满足定义1.3的$\bar{J}_1'$-左理想化条件. 因此$\bar{R}$有$\bar{\Sigma}$-根$\bar{J}_1'$. 容易知道，$\bar{J}_1'$的原象$J_1'\subseteq\bigcap\limits_{\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}}\hat{\mathfrak{J}}=J_1$，故$\bar{J}_1'=\bar{J}_1=\bar{0}$. 证毕.

从上面所述的结论，我们在研究抽象环R的结构时也可遵循如下路线：先确定一个特定集合$\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$，其中$\mathfrak{J}$是R的模右理想，并且Σ满足定义1.3的J_1-左理想化条件. 从Σ出发我们可确定Σ-根J_1，于是我们可作$\bar{\Sigma}$-半单纯环$\bar{R}=R/J_1$. 下面一步是通过子直和概念来归结基本研究对象的环. 现在先作如下定义：

定义1.5 设$\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$是R中满足J_1-左理想化条件的一个特定集合，其中$\mathfrak{J}$是R的模右理想. 记$\hat{\Sigma}$是Σ中在(1.1)式意义下所诱导出的集合. 如果在$\hat{\Sigma}$中存在一个元素$\hat{\mathfrak{J}}$使得$\hat{\mathfrak{J}}:R=0$，那末称这样的R为基本环.

设R是结合环，$\mathfrak{P}$是R的一个理想，如果R中存在一个满足J_1-左理想化条件的上述意义下的集合$\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$以及$\hat{\Sigma}=\{\hat{\mathfrak{J}}\}$并且使得$\mathfrak{P}=\hat{\mathfrak{J}}:R$，那末称$\mathfrak{P}$为$R$的基本理想.

运用基本理想的概念，我们可把定理1.1的结论叙述为如下形式：

定理1.1′ R的Σ-根必是基本理想之交.

引理1.6 设R是结合环，Σ及$\hat{\Sigma}$是前所述意义且Σ满足J_1-左理想化条件. 记$\mathfrak{P}$是R的理想，$\bar{R}=R/\mathfrak{P}$，$\bar{\Sigma}=\{\bar{\mathfrak{J}}\mid\bar{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}+\mathfrak{P}/\mathfrak{P},\ \mathfrak{J}\in\Sigma\}$，$\bar{\hat{\Sigma}}=\{\bar{\hat{\mathfrak{J}}}\mid\bar{\hat{\mathfrak{J}}}=\hat{\mathfrak{J}}+\mathfrak{P}/\mathfrak{P},\ \hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}\}$，那末$\mathfrak{P}$是$R$的基本理想当且仅当在$\hat{\Sigma}$中存在一个元素$\hat{\mathfrak{J}}$使$\mathfrak{P}\subset\hat{\mathfrak{J}}$并且$\bar{\hat{\mathfrak{J}}}:\bar{R}=\bar{0}$，即$\bar{R}$为基本环.

证 必要性是显然的. 现在来证充分性：若$\bar{\hat{\mathfrak{J}}}\in\bar{\hat{\Sigma}}$，且有$\mathfrak{P}\subset\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}$，$\bar{\hat{\mathfrak{J}}}:\bar{R}=\bar{0}$，那末易知$\hat{\mathfrak{J}}:R=\mathfrak{P}$. 因此$\mathfrak{P}$是$R$的一个基本理想.

现在通过下面的定理1.3就可知道，我们所采取的环结构研究的路线最终可归结到基本环.

定理1.3 任何Σ-半单纯环必与基本环的一个子直和同构.

证 令R是Σ-半单纯环，那末R的Σ-根为0，于是有$\bigcap\mathfrak{P}_i=0$，其中$\mathfrak{P}_i$是R的基本理想. 由引理1.6及熟知的结论知，R与基本环的一个子直和同构.

现在对Σ-根、基本环进行具体化.

设R是结合环. 记集合Σ仅含一个元素，即R. 记$\hat{\Sigma}=\{\hat{\mathfrak{J}}\mid\hat{\mathfrak{J}}$是$R$的极大模右理想$\}$. 于是我们前面所述的$\mathfrak{J}$-模右理想即是$R$的模右理想，$\mathfrak{J}$-右拟正则元即是通常意义下的右拟正则元，$\mathfrak{J}$-正则右理想即是通常意义下的正则右理想等等. 定义1.3所述的J_1-左理想化条件显然自动地满足. 因此我们的Σ-根$J_1=\bigcap\hat{\mathfrak{J}}$即是通常意义下的Jacobson根，定义1.5所述的基本环即是熟知的本原环以及R的基本理想即是本原理想等等. 于是我们可叙述成如下定理：

定理 1.4　设 R 是结合环, Σ 只含一个元素 R 的集合, 那末此时 Σ-根即是通常意义的 Jacobson 根. Σ-半单纯即是 Jacobson 半单纯, 并且定义 1.5 所述的基本环即是通常的本原环.

下面的定理是运用我们上述理论对 Jacobson 根进行刻划.

定理 1.5　设 R 是结合环. 记 J 是 R 的 Jacobson 根. 又记 $\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$ 是 R 的一个特定模右理想集合且其交 $J'=\bigcap\limits_{\mathfrak{J}\in\Sigma}\mathfrak{J}$ 包含在 J 中. 令 $\hat{\Sigma}=\{\hat{\mathfrak{J}}\}$ 如前所述意义, 那末

$$J'=\bigcap_{\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}}\hat{\mathfrak{J}}.$$

证　显然有 $\bigcap\limits_{\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}}\hat{\mathfrak{J}}\subseteq\bigcap\limits_{\mathfrak{J}\in\Sigma}\mathfrak{J}=J'$. 现在来证其逆. 由假设知 $J'\subset J$, 因此 J' 中每个元素 x 皆是右拟正则元, 即 $\{xr+r\}=R$, $r\in R$. 如果有元素 $x\in J'$ 而 $x\overline{\in}\cap\hat{\mathfrak{J}}$, 那末必有元素 $\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}$ 使 $x\overline{\in}\hat{\mathfrak{J}}$ 且 $|x)+\hat{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}\in\Sigma$. 因为 $\hat{\mathfrak{J}}$ 是 $\mathfrak{J}$-模右理想, 因此必有元素 $e\in\mathfrak{J}$ 使 $\{ei+i\}\subset\hat{\mathfrak{J}}$, $i\in\mathfrak{J}$. 这样有 $e=x'+\hat{i}$, 其中 $x'\in|x)$, $\hat{i}\in\hat{\mathfrak{J}}$. 但是 $|x)\subset J'\subset J$, 因此 x' 是右拟正则元, 故有 $\{x'r+r\}=R$, $r\in R$. 于是必有 $\{x'i+i\}=\mathfrak{J}$, $i\in\mathfrak{J}$. 事实上, 对任一 $i\in\mathfrak{J}$ 必有 $i=x'r+r$, 但 $x'\in\mathfrak{J}$, 所以 $x'r\in\mathfrak{J}$, 由是 $r\in\mathfrak{J}$, 故有 $\{x'i+i\}=\mathfrak{J}$, $i\in\mathfrak{J}$. 这样我们有元素 $z\in\mathfrak{J}$ 使得 $x'z+z+x'=0$. 用 $x'=e-\hat{i}$ 代入上式并注意 $ez+z\in\hat{\mathfrak{J}}$, $\hat{i}\in\hat{\mathfrak{J}}$ 就可得出 $e\in\hat{\mathfrak{J}}$, 因此 $\hat{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}$. 这与 $x\overline{\in}\hat{\mathfrak{J}}$ 的假设矛盾, 因此 $J'\subseteq\cap\hat{\mathfrak{J}}$. 这就证明了我们的定理.

现在仍记 $\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$ 如定理 1.5 意义的一个特定模右理想集合且其交含在 Jacobson 根 J 中. 又记 $\hat{\Sigma}=\{\hat{\mathfrak{J}}\}$ 如前面(1.1)式中意义下的集合. 为叙述方便起见, 我们特称 $\hat{\Sigma}$ 为 Σ 的诱导集合. 同样用 $\hat{\Sigma}$ 来代替 Σ, 我们对 $\hat{\Sigma}$ 也可作出其诱导集合 $\hat{\Sigma}^{(1)}=\{\hat{\mathfrak{J}}^{(1)}\}$. 对于 $\hat{\Sigma}^{(1)}$ 又可作出其诱导集合并记以 $\hat{\Sigma}^{(2)}=\{\hat{\mathfrak{J}}^{(2)}\}$, 如此无限地继续下去, 如记 $\hat{\Sigma}=\hat{\Sigma}^{(0)}$, 那末我们给以如下定义:

定义 1.6　我们称上述 $\hat{\Sigma}^{(n)}$ 为 Σ 的第 n 次诱导集合. 并记 $\hat{\Sigma}^{(n)}$ 的元素交为

$$J'^{(n)}=\bigcap_{\hat{\mathfrak{J}}^{(n)}\in\hat{\Sigma}^{(n)}}\hat{\mathfrak{J}}^{(n)}.$$

由是从定理 1.5 可以得出如下推论.

定理 1.6　设 R 是结合环, J 是 R 的 Jacobson 根. 记 $\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$ 是 R 的一个模右理想集合, 其交 $J'=\bigcap\limits_{\mathfrak{J}\in\Sigma}\mathfrak{J}$ 含在 J 中. 记 $\hat{\Sigma}^{(n)}=\{\hat{\mathfrak{J}}^{(n)}\}$ 为 Σ 的第 n 次诱导集合, 其交 $J'^{(n)}=\cap\hat{\mathfrak{J}}^{(n)}$, 那末 $J'^{(n)}=J'$.

特别, $\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$ 取为 R 的极大模右理想集合, $\hat{\Sigma}^{(n)}$ 仍表示 Σ 的第 n 次诱导集合, 那末 $J=J'=J'^{(n)}$. 如果对 $\hat{\Sigma}^{(n)}$ 中元素 $\hat{\mathfrak{J}}^{(n)}$ 令 $\mathfrak{P}^{(n)}=\hat{\mathfrak{J}}^{(n)}:R$, 那末 $J=J'^{(n)}=\cap\mathfrak{P}^{(n)}$.

证　最后的一个论断可从定理 1.1 中得出. 我们的定理可从上面所述结论中推出.

上面已经指出, Jacobson 根是我们意义下的一个特殊的 Σ-根. 现在我们要构作另一个特殊 Σ-根, 它比 Jacobson 根要小, 并且从它出发所获得的基本环即是文[1]中所述的拟本原环.

设 $\mathfrak{M}$ 是右 R-模, $\mathfrak{M}$ 的一个元素 m 称为严格循环元, 若 $m\in mR$. R-模 $\mathfrak{M}$ 称为特殊选取模, 若存在 $\mathfrak{M}$ 的一个子集 M, M 的每个元素皆是严格循环元, 并且有

$0:\mathfrak{M}=\bigcap_{m\in M}0:m$，其中 $0:\mathfrak{M}=\{x\in R\mid \mathfrak{M}x=0\}$，$0:m=\{x\in R\mid mx=0\}$. 如记 $\mathfrak{J}_m=0:m$，那末 $\mathfrak{J}_m$ 显然是 R 的模右理想. 因此对任一特殊选取模 $\mathfrak{M}$，我们有 R 的一个模右理想集合 $\Lambda_M=\{\mathfrak{J}_m\mid \mathfrak{J}_m=0:m,\ m\in M\}$. 现在令 I 是所有特殊选取模 $\mathfrak{M}$ 的集合，并记 $\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$ 其中 $\mathfrak{J}\in\Lambda_M$，$M\subset\mathfrak{M}\in I$，$M$ 是某个特殊选取模 $\mathfrak{M}$ 的上述意义下的一个集合. 显然任何不可约右 R-模必是上述意义下的特殊选取模，而特殊选取模却不一定是不可约 R-模. 现在记 $J'=\bigcap_{\mathfrak{J}\in\Sigma}\mathfrak{J}$，那末 J' 显然包含在 Jacobson 根 J 之中. 于是我们从定理 1.6 立刻得出如下定理:

定理 1.7 记 $I=\{\mathfrak{M}\}$是上述意义下特殊选取模 $\mathfrak{M}$ 的集合，$\Sigma=\{\mathfrak{J}\mid\mathfrak{J}\in\Lambda_M,\ M\subset\mathfrak{M}\in I\}$，$\mathfrak{J}=0:m$ 是 R 的模右理想，$m\in M$. 记 $J'=\bigcap_{\mathfrak{J}\in\Sigma}\mathfrak{J}$，$\hat{\Sigma}=\{\hat{\mathfrak{J}}\}$如前述的意义，那末 J' 必含在 Jacobson 根之中，并且 $J'=\bigcap_{\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}}\hat{\mathfrak{J}}$ 是 Σ-根.

现在我们感兴趣于如下的一种类型的特殊选取模 $\mathfrak{M}$，即令 $\mathfrak{M}$ 是文[1]中所述的 F-空间并且 $\mathfrak{M}$ 还满足如下的稠密条件：对 $\mathfrak{M}$ 的任一基$\{u_i\}$，如有有限多个 u_{i_1}，u_{i_2}，…，u_{i_n} 使 $u_{i_1}r\neq0$，$u_{i_j}r=0$，$j\neq1$，$r\in R$，那末必有元素 $t\in R$ 使得 $u_{i_1}tR=\mathfrak{M}$，$u_{i_j}t=0$，$j\neq1$. 为方便起见，我们称上述特殊选取模 $\mathfrak{M}$ 为特殊选取稠密模. 显然，任何不可约 R-模必是特殊选取稠密模；反之，一般不成立. 完全与前面所述那样，我们记 I 是特殊选取稠密模全体. 对于任一特殊选取稠密模 $\mathfrak{M}$，如文[1]所述，必有唯一确定的自由元集合 S，于是我们把上述的 M 取为 S，这样与前面那样记 $\Lambda_S=\{\mathfrak{J}_m\}$，其中 $\mathfrak{J}_m=0:m$，$m\in S$. 完全与上面那样，我们记 $\Sigma=\{\mathfrak{J}\mid\mathfrak{J}\in\Lambda_S,\ S\subset\mathfrak{M}\in I\}$. 仍记 $\hat{\Sigma}=\{\hat{\mathfrak{J}}\}$如前意义，那末由定理 1.7 知，$J^*=\bigcap_{\mathfrak{J}\in\Sigma}\mathfrak{J}=\bigcap_{\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}}\hat{\mathfrak{J}}$ 必含在 J 中，并且是一个 Σ-根. 为了醒目起见，我们特作如下定义:

定义 1.7 我们称上述 Σ-根 J^* 为 R 的拟 Jacobson 根. 一个环 R 称为拟 Jacobson 半单纯环，若拟 Jacobson 根 $J^*=0$.

定理 1.8 设 R 是拟 Jacobson 半单纯环，那末 R 必与拟本原环的一个子直和同构.

证 令 $\mathfrak{M}$ 是一个特殊选取稠密模. S 是其自由元全体，那末 $\mathfrak{P}=0:\mathfrak{M}=\bigcap_{u\in S}0:u$ 是 R 的理想，因此虽然有 $\mathfrak{P}=\bigcap_{\mathfrak{J}\in\Lambda_S}\mathfrak{J}$. 由是 $\cap\mathfrak{P}=0$，其中 $\mathfrak{P}=0:\mathfrak{M}$. 容易知道，$\mathfrak{M}$ 是 $R/\mathfrak{P}$-模并且是忠实的. 由于 $\mathfrak{M}$ 是特殊选取稠密 R-模，因此 $R/\mathfrak{P}$ 是拟本原环. 证毕.

从理论上讲，对于环 R 的结构研究可从 R 中选取出一个 R 的模右理想集合$\{\mathfrak{J}\}$使其交 $J^*=\cap\mathfrak{J}$ 成为 R 的拟 Jacobson 根，然后作出拟 Jacobson 半单纯环 $\bar{R}=R/J^*$，再由定理 1.8 归结到拟本原环. 但是知道了拟本原环的结构后要知道拟 Jacobson 半单纯环的结构仍是很困难的，更进一步要知道 R 本身的结构则是更困难了. 因此人们往往着重研究 Jacobson 半单纯和更基本的本原环的结构. 但这些不是非常广泛的环类. 我们的拟 Jacobson 半单纯环及拟本原环相应地比前者要广泛但研究起来自然更复杂些，正因为这样，所以我们更需深入地研究它们.

二、空间化元的环

本文继文[1]的理论. 上文所用过的术语及符号如在这节中出现则仍保持其原来的

意义. 仍记 R 是拟本原环, $\mathfrak{M}$ 是严格循环 R-模, 且 $\mathfrak{M}$ 是 F-空间. 又记 S 是 $\mathfrak{M}$ 的自由元全体, Ω 是 $\mathfrak{M}$ 的 F-自同态全体, $R\subset\Omega$. 但对于 Ω 的任一元素 σ, $\mathfrak{M}$ 在 σ 映照下的象 $\mathfrak{M}\sigma$ 一般不再是 $\mathfrak{M}$ 的子空间.

定义 2.1 Ω 的一个元素 σ 称为空间化元, 如果 σ 的 $\mathfrak{M}$ 的象 $\mathfrak{M}\sigma$ 是 $\mathfrak{M}$ 的子空间.

引理 2.1 设 σ 是空间化元. 记 $N(\sigma)=\{x\in\mathfrak{M}\mid x\sigma=0\}$, 那末必存在线性无关元集合 $\{u_i\}_I$ 使得 $\mathfrak{M}=\sum\limits_I\oplus Fu_i\oplus N(\sigma)$ 并且 $N(\sigma)$ 及 $\sum\limits_I\oplus Fu_i\sigma$ 均是 $\mathfrak{M}$ 的子空间.

证　由假设及[1]的引理 3.1 性质 3.1 知, 必存在一个基 $\{u_i\}_\Gamma$ 使得

$$\mathfrak{M}\sigma=\sum_I\oplus Fu_i\sigma \tag{2.1}$$

因此 $\sum\limits_{\Gamma-I}Fu_j\sigma\subset\sum\limits_I\oplus Fu_i\sigma$, 并且对于任何 $j\in\Gamma-I$ 就有 $u_j\sigma-\sum\limits_{i<\infty}f_iu_i\sigma=0$, 因此

$$u_j\in N(\sigma)+\sum_I\oplus Fu_i,\quad \mathfrak{M}=\sum_I\oplus Fu_i+N(\sigma).$$

容易知道, $\sum\limits_I\oplus Fu_i\cap N(\sigma)=0$. 最后要证, $N(\sigma)$ 是 $\mathfrak{M}$ 的子空间. 由[1]知, 我们有 $N(\sigma)=\sum\limits_{I_1}\oplus Fu_j\oplus\mathfrak{M}'$, 其中 $\mathfrak{M}'$ 是纯退化子模. 现在要证 $\mathfrak{M}'=0$. 如果 $\mathfrak{M}'\neq0$, 则集合 $\{u_i\}_I\cup\{u_j\}_{I_1}$ 必可扩展为 $\mathfrak{M}$ 的一个基 $\{u_i\}_I\cup\{u_j\}_{I_1}\cup\{u_\alpha\}_{\Gamma-I-I_1}$. 考察元素 u_α, $\alpha\in\Gamma-I-I_1$, 我们有

$$u_\alpha=\sum_{i\in I}f_iu_i+\sum_{j\in I_1}g_ju_j+m',\quad m'\in\mathfrak{M}' \tag{2.2}$$

显然有 $m'\neq0$. 记 $\{E_i\}_I\cup\{E_j\}_{I_1}\cup\{E_\alpha\}_{\Gamma-I-I_1}$ 是上述的基的正交射影, 那末 $u_\alpha=m'E_\alpha\in S$, 因此 $\mathfrak{M}'\in S$, 这与 $\mathfrak{M}'\cap S=\phi$ 相矛盾. 因此 $\mathfrak{M}'=0$, $N(\sigma)$ 是一个子空间.

性质 2.1 设 σ 是一个空间化元, $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}$ 的一个子空间, 那末象集合 $\mathfrak{M}'\sigma$ 必是 $\mathfrak{M}$ 的一个子空间, 并且 $\mathfrak{M}$ 中存在一个基 $[u_i]_\Gamma$ 使 $\mathfrak{M}'\sigma=\sum\limits_{I_1}\oplus Fu_i\sigma$, $\mathfrak{M}\sigma=\sum\limits_{I_1}\oplus Fu_i\sigma\oplus\sum\limits_{I_2}\oplus Fu_j\sigma$, 其中 $\{u_i\sigma\}_{I_1}\cup\{u_j\sigma\}_{I_2}\subset S$, $I_1\cup I_2\subset\Gamma$.

证　由文[1]的定理 3.2 知, 必存在线性无关元集合 $\{u_i\}_I$ 使得 $\mathfrak{M}'\sigma$ 的主子空间 $V=\sum\limits_{I_1}\oplus Fu_i\sigma$, 于是 $\mathfrak{M}'$ 必有线性无关元集合 $\{u_i\}_{I_1}\cup\{v_j\}_{I_2'}$ 使 $\mathfrak{M}'=\sum\limits_{I_1}\oplus Fu_i\oplus\sum\limits_{I_2'}\oplus Fv_j$, 故有

$$\mathfrak{M}'\sigma=\sum_{I_1}\oplus Fu_i\sigma+\sum_{I_2''}Fv_j\sigma,\quad I_2''\subset I_2' \tag{2.3}$$

其中 $v_j\sigma\overline{\in}S$, $j\in I_2''$. 因为 $\mathfrak{M}\sigma$ 是子空间, 所以从文[1]的性质 3.1 的证明中知道, 在集合 $\Lambda=\{u_i\sigma\mid u_i\in\mathfrak{M},\ u_i\sigma\in S\}$ 中只要任取一个极大线性无关元集合, 如 $\{u_i\sigma\}_{I_1}\cup\{u_j\sigma\}_{I_2}$, 必有

$$\mathfrak{M}\sigma=\sum_{I_1}\oplus Fu_i\sigma\oplus\sum_{I_2}\oplus Fu_j\sigma \tag{2.4}$$

于是由引理 2.1 知, $\mathfrak{M}=\sum\limits_{I_1}\oplus Fu_i\oplus\sum\limits_{I_2}\oplus Fu_j\oplus N(\sigma)$. 由 (2.3), (2.4) 得出 $v_j\sigma=\sum\limits_{i\in I_1}f_iu_i\sigma+\sum\limits_{j\in I_2}g_ju_j\sigma$, 因此 $v_j-\sum\limits_{I_1}f_iu_i-\sum\limits_{I_1}g_ju_j\in N(\sigma)$. 因为 $N(\sigma)$ 是子空间, $N(\sigma)=\sum\limits_{\Gamma-I_1-I_2}Fu_\alpha$, $v_j\in S$, 故 $v_j=\sum\limits_{I_1}f_iu_i+\sum\limits_{I_2}g_ju_j+\sum\limits_{\alpha\in\Gamma-I_1-I_2}h_\alpha u_\alpha$, 其中 f_i, g_j, h_α 在 F 中均有逆元. 由是从 $v_j\sigma=\sum\limits_{I_1}f_iu_i\sigma+\sum\limits_{I_2}g_ju_j\sigma$ 得出 $v_j\sigma\in S$, 这与 (2.3) 的假设 $v_j\sigma\overline{\in}S$ 相矛盾. 这就是说, $\mathfrak{M}'\sigma=\sum\limits_{I_1}\oplus Fu_i\sigma$ 是子空间. 再从 (2.4) 式就得出我们性质 2.1 的全部论断.

引理 2.2 设 σ, τ 是两个空间化元, 则 $\sigma\tau$ 也然.

证　因为 $\mathfrak{M}\sigma$ 是子空间，所以由性质 2.1 知，$\mathfrak{M}\sigma\tau$ 必是子空间.

定义 2.2　记 M 是 Ω 的所有空间化元全体，$\hat{\Omega}$ 是由 M 生成的加法群，由引理 2.2 知，$\hat{\Omega}$ 构成一个环，我们称它为空间化元环.

现在的任务是要研究 $\hat{\Omega}$ 的结构. 令 u 是 S 中一个元素，记 $\hat{\mathfrak{M}}=u\hat{\Omega}$，显然 $\hat{\mathfrak{M}}$ 是严格循环模.

引理 2.3　记 $\hat{S}=\{v\in\hat{\mathfrak{M}}\mid v\hat{\Omega}=\hat{\mathfrak{M}}\}$，那末 $S=\hat{S}$.

证　令 $v\in S$，那末 v 必可扩展成一个基 $v\cup\{v_j\}$ 使 $\mathfrak{M}=Fv\oplus\sum\oplus Fv_j$. 作对应 $\hat{\sigma}$: $v\to u$, $v_j\to 0$，于是 $\mathfrak{M}\hat{\sigma}=Fu$，因此 $\hat{\sigma}\in\hat{\Omega}$. 这样有 $\hat{\mathfrak{M}}=u\hat{\Omega}=v\hat{\sigma}\hat{\Omega}\subseteq v\hat{\Omega}$. 对称地令 $\hat{\mathfrak{M}}'=v\hat{\Omega}$，那末我们同样可以得到 $\hat{\mathfrak{M}}'=v\hat{\Omega}\subseteq u\hat{\Omega}$. 这就证明了 $\hat{\mathfrak{M}}=v\hat{\Omega}=u\hat{\Omega}$，因此 $v\in\hat{S}$，即 $S\subseteq\hat{S}$.

反之，若 $v\in\hat{S}$，则有 $\hat{\mathfrak{M}}=v\hat{\Omega}$. 因此 $u=v\hat{\omega}$, $\hat{\omega}\in\hat{\Omega}$. 故有 $v\Omega\supseteq v\hat{\omega}\Omega=u\Omega=\mathfrak{M}$，因此 $v\in S$，即 $\hat{S}\subseteq S$.

引理 2.4　记 $\hat{F}$ 是 $\hat{\mathfrak{M}}=u\hat{\Omega}$ 的 $\hat{\Omega}$-中心化子，那末 $\hat{\mathfrak{M}}=\sum_{\Gamma}\oplus\hat{F}u_i$，其中 $\{u_i\}_\Gamma$ 是 $\mathfrak{M}$ 的任意一个基.

证　令 $\{E_i\}_\Gamma$ 是基 $\{u_i\}_\Gamma$ 的正交射影. 因此 $\{E_i\}_\Gamma\subset\hat{\Omega}$. 于是易知有 $\hat{F}u_i\cap\sum_{\Gamma-i}\hat{F}u_j=0$. 记 $\hat{\mathfrak{M}}=\sum_{\Gamma}\oplus\hat{F}u_i+\hat{\mathfrak{M}}'$，其中 $\hat{\mathfrak{M}}'$ 是 $\hat{F}$-模. 我们要证 $\hat{\mathfrak{M}}'\subseteq\sum_{\Gamma}\hat{F}u_i$. 事实上，由 $\hat{\mathfrak{M}}\subset\mathfrak{M}$ 得出 $\hat{\mathfrak{M}}'$ 中任一元素 $\hat{m}'=\sum f_iu_i$, $f_i\in F$. 于是 $\hat{m}'E_i=f_iu_i$，因 $u_i\in S=\hat{S}$，所以 $\hat{\mathfrak{M}}=u_i\hat{\Omega}$. 显然 $f_iu_i\hat{\Omega}=f_i\hat{\mathfrak{M}}=\hat{m}'E_i\hat{\Omega}\subseteq\hat{\mathfrak{M}}$，因此有 $f_i\in\hat{F}$. 这就证明了 $\hat{m}'=\hat{m}'(\sum E_i)\subseteq\sum_{\Gamma}\oplus\hat{F}u_i=\hat{\mathfrak{M}}$.

引理 2.5　令 $\{\hat{u}_i\}_{\Gamma'}$ 是 $\hat{\mathfrak{M}}$ 的一个基，则 $\{\hat{u}_i\}_{\Gamma'}$ 必是 $\mathfrak{M}$ 的基.

证　因为 $S=\hat{S}$, $\hat{\Omega}\subset\Omega$，所以 $\{u_i\}_{\Gamma'}$ 必是 $\mathfrak{M}$ 的 F-线性无关元集合. 令 $\{\hat{u}_i\}_{\Gamma'}\cup\{u_\alpha\}_I$ 是 $\mathfrak{M}$ 的一个基，则由引理 2.4 知，它也必是 $\hat{\mathfrak{M}}$ 的一个基，因此 $I=\phi$.

引理 2.6　若 $\hat{f}\in\hat{F}$ 且 $\hat{f}\hat{\mathfrak{M}}=\hat{\mathfrak{M}}$，则 $\hat{f}$ 必在 $\hat{F}$ 中有逆元.

证　令 $\{E_i\}_\Gamma$ 是基 $\{u_i\}_\Gamma$ 的正交射影，于是由 $\hat{f}u_1\hat{\Omega}=u_1\hat{\Omega}$ 得出 $\hat{f}u_1=u_1\hat{\omega}=u_1E_1\hat{\omega}E_1$. 因此有 $u_1E_1\hat{\omega}E_1\hat{\omega}'E_1=E_1$, $\hat{f}u_1E_1\hat{\omega}'E_1=u_1$. 现在要证，$u_1E_1\hat{\omega}'E_1\in S$. 事实上，我们有 $\hat{f}u_1=f_1u_1$, $f_1\in F$. 于是 $f_1u_1\Omega=u_1\Omega$，故 f_1 在 F 中有逆元. 这样从 $f_1u_1E_1\hat{\omega}'E_1\Omega=\mathfrak{M}$ 得出 $u_1E_1\hat{\omega}'E_1\Omega=\mathfrak{M}$，故有 $u_1E_1\hat{\omega}'E_1\in S$. 于是得出 $u_1E_1\hat{\omega}'E_1\hat{\Omega}=\hat{\mathfrak{M}}=u_1\hat{\Omega}$. 因此有 $E_1\hat{\omega}'E_1E_1\hat{\omega}''E_1=E_1$. 容易知道 $E_1\hat{\omega}E_1=E_1\hat{\omega}''E_1$. 因为 $u_1E_1\hat{\omega}'E_1=\hat{g}u_1\in\hat{\mathfrak{M}}$, $\hat{g}\in\hat{F}$，因此 $\hat{f}\hat{g}u_1=u_1$，故 $\hat{f}\hat{g}=1\in\hat{F}$. 反之 $\hat{g}\hat{f}u_1=u_1$，因此 $\hat{g}\hat{f}=1$. 故 $\hat{f}$ 在 $\hat{F}$ 中有逆元.

由上面的一系列引理我们可得如下定理.

定理 2.1　设 $\mathfrak{M}$ 是 F-空间，Ω 是 $\mathfrak{M}$ 的 F-自同态集合. 记 $\hat{\Omega}$ 是 Ω 的空间化元子环，那末 $\hat{\Omega}$ 必是拟本原环，它有 $\hat{F}$-空间 $\hat{\mathfrak{M}}$，而且 $\hat{F}$-线性无关元集合 $\{u_i\}_\Gamma$ 是 $\hat{\mathfrak{M}}$ 的一个 $\hat{F}$-基当且仅当 $\{u_i\}_\Gamma$ 是 $\mathfrak{M}$ 的一个 F-基.

证　上文[1]的定义 1.3 的条件(i)及(iii)可由前面的引理得出. 现在来验证条件(ii). 这是因为，$\mathfrak{M}$ 的自由元全体 S 即是 $\hat{\mathfrak{M}}$ 的自由元全体，并且任一基 $\{u_i\}_\Gamma$ 的正交射影 $\{E_i\}_\Gamma$ 皆属于 $\hat{\Omega}$，因此条件(ii)成立. 故证得 $\hat{\mathfrak{M}}$ 是一个 $\hat{F}$-空间. 另一方面，$\hat{\mathfrak{M}}=u\hat{\Omega}$, $u\in S$ 是严格循环模，由于 Ω 的恒等元包含在 $\hat{\Omega}$ 中，因此 $\hat{\mathfrak{M}}$ 显然是 $\hat{\Omega}$-模且是忠实的. 因此易知 $\hat{\Omega}$ 是拟本原环.

现在叙述几个性质.

性质 2.2　$\hat{F}$ 必与 F 的一个子环同构.

证　令 $\hat{f}\in\hat{F}$ 且有 $u\in S$ 使 $\hat{f}u\neq 0$. 因此有 $\hat{f}u=fu$, $f\in F$. 作对应 φ: $\hat{f}\to\hat{f}\varphi=f$. 由严格循环模 $\mathfrak{M}$ 及 $\hat{\mathfrak{M}}$ 性质立知 φ 是一一映照. 因为

$$(\hat{f}_1+\hat{f}_2)u=\hat{f}_1u+\hat{f}_2u=f_1u+f_2u=(f_1+f_2)u$$

$$\hat{g}\hat{f}u=\hat{g}(fu)=\hat{g}(uE\hat{\omega}E)=(\hat{g}u)E\hat{\omega}E=guE\hat{\omega}E=gfu$$

其中 $\hat{\omega}\in\hat{\Omega}$, 所以 φ 是 $\hat{F}$ 到 F 中的一个环同构.

性质 2.3　$F=\hat{F}$ 当且仅当 $\mathfrak{M}=\hat{\mathfrak{M}}$.

证　必要性是显然的. 现在来证充分性. 若 $\mathfrak{M}=\hat{\mathfrak{M}}$, 则由 $\hat{\Omega}\subseteq\Omega$ 得出 $F\subseteq\hat{F}$. 令 $\hat{f}\in\hat{F}$, 则必有 $u\in S$ 使 $\hat{f}u=fu$, $f\in F$, 因此有 $(\hat{f}-f)u\hat{\Omega}=0$, 故 $\hat{f}=f$, 因此 $\hat{F}\subseteq F$.

性质 2.4　设 σ 是一个空间化元, 那末 $\hat{\mathfrak{M}}\sigma$ 必是 $\hat{\mathfrak{M}}$ 的一个子空间.

证　由引理 2.1 知, 必有一个基 $\{u_i\}_\Gamma$ 使 $\mathfrak{M}=\sum_I\oplus Fu_i\oplus N(\sigma)$ 并且 $\mathfrak{M}\sigma$, $N(\sigma)$ 均是子空间. 记 $N(\sigma)=\sum_{\Gamma-I}\oplus Fw_j$, $w_j\in S$, 那末由引理 2.5 知, $\hat{\mathfrak{M}}=\sum_I\oplus\hat{F}u_i\oplus\sum_{\Gamma-I}\oplus\hat{F}w_j$. 因此 $\hat{\mathfrak{M}}\sigma=\sum_I\oplus\hat{F}u_i\sigma$ 是 $\hat{\mathfrak{M}}$ 的子空间.

参　考　文　献

[1]　许永华,"拟本原环(I)",(未发表).
[2]　N. Jacobson "Structure of rings", *Amer. Math Soci. Colloq. Publ.*, **37** (1956).

QUASI-PRIMITIVE RINGS (II)

Xu Yonghua
(*Fudan University*)

ABSTRACT

Denote R an associative ring, $\mathfrak{J}$ a right modular ideal of R, i. e., there exists an $a\in R$ such that for all $r\in R$, $r+ar\in\mathfrak{J}$.

Let $\Sigma=\{\mathfrak{J}_i\}$ be a given set of modular right ideals of R. Then we introduce the following definitions:

Definition 1. *Let $\mathfrak{J}$ be a modular right ideal of R. An element a of $\mathfrak{J}$ is called an $\mathfrak{J}$-right quasi-regular element, if $\{i+ai\}=\mathfrak{J}$ for all $i\in\mathfrak{J}$. A right ideal L of R is called $\mathfrak{J}$-regular right ideal if every element of L is an $\mathfrak{J}$-right quasiregular element.*

Definition 2. *Let $\mathfrak{J}$ and $\mathfrak{J}'$ be two right ideals of R, $\mathfrak{J}'$ is called $\mathfrak{J}$-modular if $\mathfrak{J}'\subset\mathfrak{J}$ and if there exists an element $a\in\mathfrak{J}$ such that for all $i\in\mathfrak{J}$, $i+ai\in\mathfrak{J}'$.*

Now we introduce the symbol $\hat{\mathfrak{J}}$. Let $\mathfrak{J}\in\Sigma$. Then if $\mathfrak{J}$ is an $\mathfrak{J}$-regular right ideal, we put $\hat{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}$; if $\mathfrak{J}$ is not an $\mathfrak{J}$-regular right ideal, we put $\hat{\mathfrak{J}}$ to be an $\mathfrak{J}$-maximal modular right ideal in $\mathfrak{J}$. Let $\mathfrak{J}\in\Sigma$. Then if $\mathfrak{J}$ is not an $\mathfrak{J}$-regular right ideal, we put $\hat{\Sigma}_{\mathfrak{J}}=\{\hat{\mathfrak{J}}\mid\hat{\mathfrak{J}}$ is $\mathfrak{J}$-maximal modular right ideal$\}$; if $\mathfrak{J}$ is an $\mathfrak{J}$-right regular right ideal, we put $\hat{\Sigma}_{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}$.

Now we put

$$\hat{\Sigma}=\{\hat{\mathfrak{J}}\mid\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}_{\mathfrak{J}},\ \mathfrak{J}\in\Sigma\}\tag{1}$$

and

$$\hat{J}_{\mathfrak{J}}=\bigcup L_i$$

for an element $\mathfrak{J}\in\Sigma$, where L_i are $\mathfrak{J}$-regular right ideals, and $\bigcup$ is set theoretical sum. Furthermore we put

$$\hat{J}=\bigcap_{\mathfrak{J}\in\Sigma}\hat{J}_{\mathfrak{J}}\tag{2}$$

and

$$J_1=\{b\mid b\in\bigcap_{\mathfrak{J}\in\Sigma}\mathfrak{J},\ b\text{ satisfying the following condition}\},\tag{3}$$

i. e., if $|b)+\mathfrak{J}^{(1)}=\mathfrak{J}\in\Sigma$ for an $\mathfrak{J}$-modular right ideal $\mathfrak{J}^{(1)}$, then it must be $\mathfrak{J}^{(1)}=\mathfrak{J}$, where $|b)$ is the intersection of all right ideals including b.

Definition 3. *An element $\mathfrak{J}$ of Σ is called satisfying J_1-left idealizer condition, if $x\in J_1$, $y\in\mathfrak{J}$, then $rx+ryx\in\mathfrak{J}$ for all $r\in R$. The Σ is called satisfying J_1-left idealizer condition (briefly, J_1-l.i.c.) if every element $\mathfrak{J}$ of Σ is satisfying J_1-l.i.c.*

Theorem 1. *Suppose that $\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$ is satisfying J_1-l.i.c. and put $\mathfrak{P}=\hat{\mathfrak{J}}:R=\{x\in R\mid Rx\subset\hat{\mathfrak{J}}\}$, $\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}$, then J_1 is an ideal and $J_1=\hat{J}=\sum_{\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}}\hat{\mathfrak{J}}=\bigcap_{\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}}\mathfrak{P}$.*

Definition 4. *Let $\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$ be satisfying J_1-l.i.c. $\hat{\Sigma}=\{\hat{\mathfrak{J}}\,|\,\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}_{\mathfrak{J}},\ \mathfrak{J}\in\Sigma\}$ as stated in* (1), *then we call ideal $J_1=\bigcup_{\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}}\hat{\mathfrak{J}}$ the Σ-radical of R. If $J_1=0$, then R is called Σ-semisimple ring.*

Theorem 2. *Let $\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$ be satisfying J_1-l.i.c., where J_1 is Σ-radical of R, and $\bar{\Sigma}=\{\bar{\mathfrak{J}}\}$, $\bar{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}/J_1$, $\mathfrak{J}\in\Sigma$, $\bar{\hat{\Sigma}}=\{\bar{\hat{\mathfrak{J}}}\}$, $\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}$, $\bar{\hat{\mathfrak{J}}}=\hat{\mathfrak{J}}/J_1$, then the $\bar{\Sigma}$-radical of $\bar{R}=R/J_1$ is $\bar{0}$.*

Definition 5. *Let $\Sigma=\{\mathfrak{J}\}$ be satisfying J_1-l.i.c. and $\hat{\Sigma}=\{\hat{\mathfrak{J}}\}$, then R is called a basic ring if and only if there exists an element $\hat{\mathfrak{J}}$ of $\hat{\Sigma}$ such that $\hat{\mathfrak{J}}:R=0$. Let $\mathfrak{P}$ be an ideal of R, if $\mathfrak{P}=\hat{\mathfrak{J}}:R$, $\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}$, then $\mathfrak{P}$ is called a basic ideal of R.*

Theorem 3. *The Σ-radical of R is the intersection of all basic ideals of R.*

Theorem 4. *Any Σ-semisimple ring is isomorphic to a subdirect sum of basic rings.*

Theorem 5. *Let R be an associative ring. Suppose that the set Σ includes only one element R, then the Σ-radical of R, the Σ-semisimple and the basic rings become the Jacobson radical, the Jacobson semisimple and the primitive rings respectively.*

Definition 6. *An element $m\in\mathfrak{M}$ is called strictly cyclic if $m\in mR$. $\mathfrak{M}$ is called special if there exists a subset M of $\mathfrak{M}$ such that every element $m\in M$ is strictly cyclic and $0:\mathfrak{M}=\bigcap_{m\in M}0:m$.*

Definition 7. *A module $\mathfrak{M}$ is called a special dense module if and only if* (i) *$\mathfrak{M}$ is special,* (ii) *$\mathfrak{M}$ is a F-space as stated in* [1], (iii) *suppose that $u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_n}$ be arbitrary finite F-independent elements and $u_{i_1}r\neq0$, $u_{i_j}r=0$, $j\neq1$ for an element $r\in R$, then there exists an element $t\in R$ such that $u_{i_1}tR=\mathfrak{M}$, $u_{i_j}t=0$, $j\neq1$.*

Let S be the set of all free elements of $\mathfrak{M}$ as stated in [1]. It is clear that S is a strictly cyclic set and $\mathfrak{M}$ is a special module.

Now put I to be the class of all speciall dense modules with $M=S$. Dencte $\Lambda_S=\{\mathfrak{J}_m\}$ where $\mathfrak{J}_m=0:m$, $m\in S$, and $\Sigma=\{\mathfrak{J}\,|\,\mathfrak{J}\in\Lambda_S,\ s\subset\mathfrak{M}\in I\}$, $\hat{\Sigma}$ as stated before. Then we can show that $J^*=\bigcap_{\mathfrak{J}\in\Sigma}\mathfrak{J}=\bigcap_{\hat{\mathfrak{J}}\in\hat{\Sigma}}\hat{\mathfrak{J}}$ is a Σ-radical and $J^*\subset J$, where J is Jacobson radical.

Definition 8. *The above stated Σ-radical J^* will be called the quasi Jacobson radical. A ring R is called quasi Jacobson semisimple ring if and only if the quasi Jacobson radical $J^*=0$.*

Theorem 6. *Let R be a quasi Jacobson semisimple ring, then R is isomorphic to a subdirect sum of quasi primitive rings.*