数 学 年 刊
1 (3, 4) 1980

调频输入正切锁相环路分析中的定性方法

王 联 王慕秋
(中国科学院数学研究所)

§1. 前 言

凡是由非线性方程描述的振动系统都称为非线性振动. 非线性振动理论, 在电讯工程中内容最丰富, 许多处理的对象, 关系到非线性回路中的振荡, 它们在数学上就表示为非线性常微分方程, 而周期解的稳定性则是其中心问题. 例如在锁相技术中[2], 当我们考虑在环路输入信号中存在有规则的、大的周期干扰时, 在调频输入的正切锁环路中就会出现下列两种环路方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\alpha\frac{d\varphi}{dt}+\gamma\tan\varphi=\beta_1+\beta_2(\cos\Omega_M t-\Omega_M\sin\Omega_M t)\tag{I}$$

$$\alpha>0,\ \gamma>0,\ \beta_1>0,\ \beta_2>0,\ \Omega_M>0$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+(\alpha+\eta\sec^2\varphi)\frac{d\varphi}{dt}+\gamma\tan\varphi=\beta_1+\beta_2(\cos\Omega_M t-\Omega_M\sin\Omega_M t)\tag{II}$$

$$\alpha>0,\ \eta>0,\ \gamma>0,\ \beta_1>0,\ \beta_2>0,\ \Omega_M>0$$

本文的目的, 就是企图通过对方程(I), (II)的定性分析, 来阐明近廿多年来迅速得到发展的李雅普诺夫函数方法和强迫振荡研究之传统的定性方法.

§2. 方程(II)之分析-Ляпунов 函数法

以下的讨论都是针对方程(II)进行的, 至于(I)完全可类似地讨论.

作变换把(II)化成与其等价的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=z\\[2mm]\dfrac{dz}{dt}=-f(\varphi)z-g(\varphi)+e(t)\end{cases}\tag{2.1}$$

其中 $f(\varphi)=\alpha+\eta\sec^2\varphi$, $g(\varphi)=\gamma\tan\varphi-\beta_1$, $e(t)=\beta_2(\cos\Omega_M t-\Omega_M\sin\Omega_M t)$. (2.1)的定义域

$$I(t\geqslant 0)\times H:\ \left\{-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ -\infty<z<+\infty\right\}.$$

至于(2.1)的右端在 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时的处理方法, 请参阅[1]§3的处理.

1979年9月29日收到, 1979年12月29日修改.

为了讨论方便起见，对(2.1)作一次坐标平移，把 φ 轴的原点搬到函数 $g(\varphi)$ 的零点 $\varphi_1=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\beta_1}{\gamma}$ 处. 即令

$$\psi=\varphi-\varphi_1,\quad z=z$$

得

$$\begin{cases}\dfrac{d\psi}{dt}=z\\ \dfrac{dz}{dt}=-f(\psi+\varphi_1)z-g(\psi+\varphi_1)+e(t)\end{cases}\tag{2.2}$$

针对(2.2)我们作

$$v_1(\psi,z,t)=\frac{1}{2}(z+F(\psi)-E(t))^2+G(\psi),\quad v_2(\psi,z)=\frac{1}{2}z^2+G(\psi)$$

其中 (i) $F(\psi)=\int_0^\psi f(\psi+\varphi_1)d\psi=\alpha\psi+\eta(\tan(\psi+\varphi_1)-\tan\varphi_1)$

$$\therefore\ \lim_{\psi\to\frac{\pi}{2}-\varphi_1-0}F(\psi)=+\infty,\quad \lim_{\psi\to-\frac{\pi}{2}-\varphi_1+0}F(\psi)=-\infty,\ \text{且}\ \psi\neq0,\ \psi F(\psi)>0;$$

(ii) $G(\psi)=\int_0^\psi g(\psi+\varphi_1)d\psi=\gamma\left(\log\dfrac{1}{\cos(\psi+\varphi_1)}+\log\cos\varphi_1\right)-\beta_1\psi$

$$\therefore\ \lim_{\psi\to\frac{\pi}{2}-\varphi_1-0}G(\psi)=+\infty,\quad \lim_{\psi\to-\frac{\pi}{2}-\varphi_1+0}G(\psi)=+\infty$$

$$g'(\psi+\varphi_1)\geqslant\gamma>0,\ g(0+\varphi_1)=0.\quad\therefore\ \text{当}\ \psi\neq0,\ \psi g(\psi+\varphi_1)>0$$

注意到(i)知,当 $\psi\neq0$, $F(\psi)g(\psi+\varphi_1)>0$;

(iii) $E(t)=\int_0^t e(t)dt=\dfrac{\beta_2}{\Omega_M}\sin\Omega_M t+\beta_2(\cos\Omega_M t-1)$

$$\therefore\ |E(t)|\leqslant\frac{1}{\Omega_M}\beta_2(1+2\Omega_M),\ |e(t)|\leqslant\beta_2(1+\Omega_M).$$

$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(2.2)}=-(F(\psi)-E(t))g(\psi+\varphi_1),$$

根据上述 $F(\psi)$, $E(t)$, $g(\psi+\varphi_1)$ 的性质知,必存在 ψ_0, 使得当 ψ 满足

$$\psi_0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}-\varphi_1,\quad -\frac{\pi}{2}-\varphi_1\leqslant\psi\leqslant-\psi_0\tag{2.3}$$

时就有

$$g(\psi+\varphi_1)(F(\psi)-E(t))>\frac{e^2(t)}{4f(\psi+\varphi_1)}.\tag{2.4}$$

所以
$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(2.2)}<-\frac{e^2(t)}{4f(\psi+\varphi_1)}.$$

另一方面
$$\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{(2.2)}=z\frac{dz}{dt}+g(\psi+\varphi_1)\frac{d\psi}{dt}=-f(\psi+\varphi_1)\left[z-\frac{e(t)}{2f(\psi+\varphi_1)}\right]^2+\frac{e^2(t)}{4f(\psi+\varphi_1)}\leqslant\frac{e^2(t)}{4f(\psi+\varphi_1)};$$

所以,当 $-\dfrac{\pi}{2}-\varphi_1\leqslant\psi\leqslant-\psi_0$, $\psi_0\leqslant\psi\leqslant\dfrac{\pi}{2}-\varphi_1$ 时就有

$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(2.2)}+\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{(2.2)}<0.$$

注意, ψ_0 值就是由

$$4f(\psi_0+\varphi_1)g(\psi_0+\varphi_1)\left(F(\psi)-\frac{\beta_2(1+2\Omega_M)}{\Omega_M}\right)=\beta_2^2(1+\Omega_M)^2 \tag{2.5}$$

定出. 一旦定出 ψ_0 值后，则在展开之相柱面上的条形域$\{-\psi_0<\psi<\psi_0,\ -\infty<z<+\infty\}$上来讨论. 我们有

$$\begin{aligned}\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(2.2)}+\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{(2.2)}&=-g(\psi+\varphi_1)F(\psi)-f(\psi+\varphi_1)z^2+ze(t)+g(\psi+\varphi_1)E(t)\\&\leqslant-f(\psi+\varphi_1)|z|^2+\beta_2(1+\Omega_M)|z|+g(\psi_0+\varphi_1)\frac{\beta_2(1+2\Omega_M)}{\Omega_M}\\&\leqslant-\left[(\alpha+\eta)z^2-\beta_2(1+\Omega_M)|z|-g(\psi_0+\varphi_1)\frac{\beta_2(1+2\Omega_M)}{\Omega_M}\right]\end{aligned}$$

由 $(\alpha+\eta)|z|^2-\beta_2(1+\Omega_M)|z|-g(\psi_0+\varphi_1)\dfrac{\beta_2(1+2\Omega_M)}{\Omega_M}=0$ 解出

$$z_{1,2}=\frac{\beta_2(1+\Omega_M)\pm\sqrt{\beta_2^2(1+\Omega_M)^2+4(\alpha+\eta)g(\psi_0+\varphi_1)\dfrac{\beta_2(1+2\Omega_M)}{\Omega_M}}}{2(\alpha+\eta)} \tag{2.6}$$

所以，$z_1>0$, $z_2<0$, 当$|z|\geqslant\max(z_1,\ |z_2|)$时就有

$$(\alpha+\eta)z^2-\beta_2(1+\Omega_M)|z|-g(\psi_0+\varphi_1)\frac{\beta_2(1+2\Omega_M)}{\Omega_M}>0$$

当 $-\psi_0<\psi<\psi_0$, $|z|\geqslant\max(z_1,\ |z_2|)$时就有 $\left.\dfrac{dv_1}{dt}\right|_{(2.2)}+\left.\dfrac{dv_2}{dt}\right|_{(2.2)}<0$. 从而我们就在展开的相柱面上定出系统(2.2)之解的最终有界域

$$\Omega:\ \{-\psi_0<\psi<\psi_0,\ |z|\leqslant z_B=z_1\}$$

其中 ψ_0, z_1 分别由下列二式

$$\begin{aligned}&[\alpha+\eta\sec^2(\psi_0+\varphi_1)][\gamma\tan(\psi_0+\varphi_1)-\beta_1]\Big\{\alpha\psi_0+\eta[\tan(\psi_0+\varphi_1)-\tan\varphi_1]\\&\quad-\frac{\beta_2(1+2\Omega_M)}{\Omega_M}\Big\}=\frac{\beta_2^2}{4}(1+\Omega_M)^2\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$z_B=z_1=\frac{\beta_2(1+\Omega_M)+\left[\beta_2^2(1+\Omega_M)^2+4(\alpha+\eta)g(\psi_0+\varphi_1)\dfrac{\beta_2(1+2\Omega_M)}{\Omega_M}\right]^{\frac{1}{2}}}{2(\alpha+\eta)} \tag{2.8}$$

来定. 总结上述的分析，针对(2.2)我们作函数

$$w(\psi,\ z,\ t)=v_1(\psi,\ z,\ t)+v_2(\psi,\ z,\ t)=\frac{1}{2}(z+F(\psi)-E(t))^2+\frac{1}{2}z^2+2G(\psi).$$

显见，此函数在有界域

$$\Omega:\ \{-\psi_0<\psi<\psi_0,\ |z|<z_B\}$$

的补集
$$\Omega^c:\ \left\{-\frac{\pi}{2}-\varphi_1\leqslant\psi\leqslant-\psi_0,\ \psi_0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}-\varphi_1,\ |z|\geqslant z_B\right\}$$

上有
$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{(2.2)}<0,$$

函数 $w(\psi,\ z,\ t)$在 Ω^c 上是正定的且具有无穷大性质，所以系统(2.2)的每一个解不仅仅对所有 $t\geqslant0$ 有定义，且是有界的[3]. 又因 $e\left(t+\dfrac{2\pi}{\Omega_M}\right)=e(t)$所以根据 J. L. Massera 定

理[3]知(2.2)在Ω内至少存在一个周期为$\frac{1}{\Omega_M}2\pi$的周期解. 所以,解的最终有界域就是Ω. 此外,由确定ψ_0之方程(2.7)和z_B的表示式(2.8)立即看出

$$\text{当 } \beta_2\to 0 \text{ 时}, \quad z_B\to 0, \quad \psi_0\to 0.$$

这就说明了系统(2.2)之周期解随着参数β_2的逐渐减小，而以$\beta_2=0$时的正切鉴相特性的锁相环路方程的奇点$(\varphi_1, 0)$为其极限.

§3. 方程(I)的分析——传统的定性方法

为了书写方便起见,我们记

$$f(t)=\beta_1+\beta_2(\cos\Omega_M t-\Omega_M\sin\Omega_M t)$$

作代换,把(I)化成下列和它等价的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=z\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=-\alpha z-\gamma\tan\varphi+f(t)\end{cases}\tag{3.1}$$

而$|f(t)|\leqslant\beta_1+\beta_2(1+\Omega_M)=M_1$. 与研究(3.1)的同时,我们考虑下列两个控制方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=z\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=-\alpha z-\gamma\tan\varphi+M_1\end{cases}\tag{3.2}$$

及

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=z\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=-\alpha z-\gamma\tan\varphi-M_1\end{cases}\tag{3.3}$$

容易看出: 系统(3.2)在上半柱面$\left\{-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant z<+\infty\right\}$上所确定的矢量场与系统(3.3)在下半柱面

$\left\{-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ -\infty<z\leqslant 0\right\}$上所确定的矢量场对对称于原点的点而言，大小相等,方向相反. 这是因为将$(-\varphi, -z)$代入(3.2)后可得(3.3).

我们先证明下列几个引理

引理1　当$z>0$时,系统(3.1)的矢量场总在系统(3.2)之矢量场之下;

当$z<0$时,系统(3.1)的矢量场总在系统(3.3)的矢量场之上.

现在我们就在上半柱面: $\left\{-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant z<+\infty\right\}$上讨论系统(3.2). (至于系统(3.3)在下半柱面的情形,利用以上所述对原点的对称性即可得到).

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=z\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=-\alpha z-\gamma\tan\varphi+M_1\end{cases}\tag{3.2}$$

所以奇点为$\left(\varphi_1=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{M_1}{\gamma},\ 0\right)$. (3.2)在上半柱面所确定的水平等倾线

$$Q(\varphi,\ z)=-\alpha z-\gamma\tan\varphi+M_1=0,$$

把上半柱面分成两个区域

$$\text{I}:\ \frac{d\varphi}{dt}>0,\ \ \frac{dz}{dt}>0;\quad \text{II}:\ \frac{d\varphi}{dt}>0,\ \ \frac{dz}{dt}<0.$$

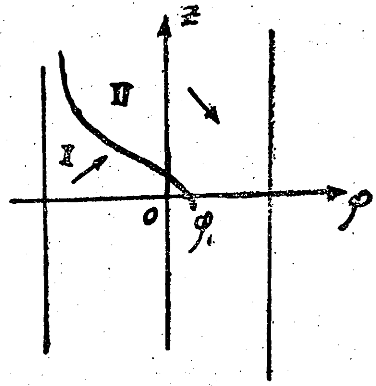

图 1

由[1]知，过$\varphi=\varphi_1=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{M_1}{\gamma}$直线的上半部上任一点之系统(3.2)的相轨线不会与$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$直线相交，而经有限时间到达φ轴，设其交点为$B(\Phi_0,\ 0)$，其中$\varphi_1=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{M_1}{\gamma}<\Phi_0<\dfrac{\pi}{2}$.

令$z_1\geqslant\dfrac{4M_1}{\alpha}$，在上半柱面上通过点$A(\varphi_1,\ z_1)$，作系统(3.2)的积分曲线，此积分曲线与$\varphi$轴交于点$B(\varphi_2,\ 0)$，这里$\varphi_1<\varphi_2<\dfrac{\pi}{2}$；再作通过点$B(\varphi_2,\ 0)$之系统(3.3)的积分曲线，它与直线$\varphi=\varphi_1$交于点$C\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{M_1}{\gamma},\ -z_c\right)$. 我们记以上所作的$\widehat{ABC}$为$\widetilde{C}$，则有下列结论

引理 2　除去点$A\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{M_1}{\gamma},\ z_1\right)$外，弧$\widetilde{C}$上所有点的纵坐标$z$都满足$|z|<z_1$.

证　因为$\widetilde{C}$的第一段弧$\widehat{AB}$是随着t的增长而下降至φ轴，故$|z|<z_1$. 以下分两种情形来讨论：(1) 曲线BC不与曲线$-\alpha z=\gamma\tan\varphi+M_1$相交，

(2) 曲线BC与曲线$-\alpha z=\gamma\tan\varphi+M_1$相交

这里曲线$-\alpha z=\gamma\tan\varphi+M_1$是系统(3.3)在下半柱面的水平等倾线. 对于第一种情况，我们通过点C再作系统(3.3)的积分曲线，它与水平等倾线交于Q点. 设这个交点的坐标为$(\xi,\ \eta)$. 因为$\eta<0$，$\xi>-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{M_1}{\gamma}$，这时情形(1)相当于$\xi\leqslant\varphi_1=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{M_1}{\gamma}$见下面 3. 故$\tan\xi\leqslant\dfrac{M_1}{\gamma}$.

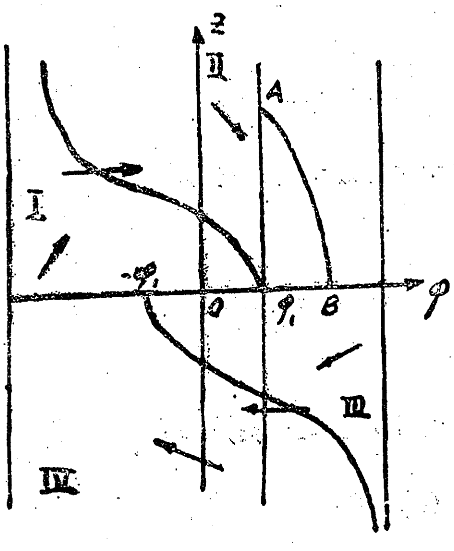

图 2

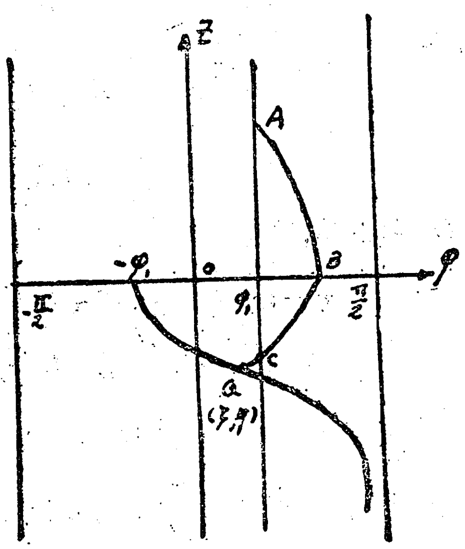

图 3

$$-\alpha\eta=\gamma\tan\xi+M_1$$

所以
$$\eta=-\frac{\gamma}{\alpha}\tan\xi-\frac{M_1}{\alpha}\geqslant-\frac{\gamma}{\alpha}\frac{M_1}{\gamma}-\frac{M_1}{\alpha}=-\frac{2M_1}{\alpha}$$

$$\therefore\quad |\eta|<z_1\quad\therefore\quad z_c<z_1$$

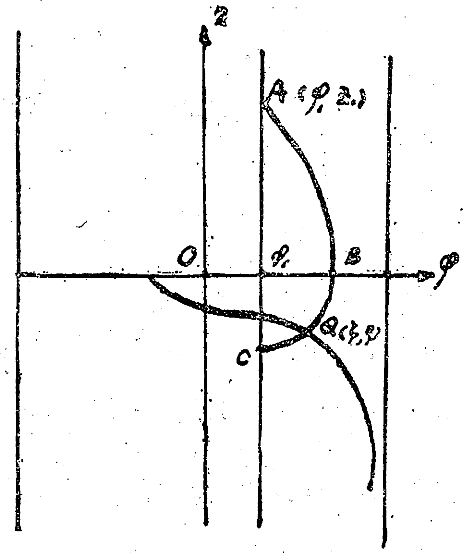

图 4

情形(2)相当于$\xi>\varphi_1=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{M_1}{\gamma}$，即$Q$点在轨线$BC$上(见图4)，这时我们从点$B(\varphi_2,0)$至点$Q(\xi,\eta)$积分系统(3.3)

$$z\frac{dz}{d\varphi}=-\alpha z-\gamma\tan\varphi-M_1$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\eta^2=-\alpha\int_{\varphi_2}^{\xi}z(\varphi)d\varphi-G(\xi)+G(\varphi_2)-M_1\xi+M_1\varphi_2$$

其中
$$G(x)=\gamma\int_0^x\tan u\,du$$

又因$z<0$及$\varphi_2>\xi$，故$-\alpha\int_{\varphi_2}^{\xi}z(\varphi)d\varphi<0$，我们得

$$\frac{1}{2}\eta^2\leqslant-G(\xi)+G(\varphi_2)-M_1(\xi-\varphi_2)\tag{3.4}$$

另一方面从点$A\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{M_1}{\gamma},\ z_1\right)$到点$B(\varphi_2,0)$积分方程组(3.2)

$$z\frac{dz}{d\varphi}=-\alpha z-\gamma\tan\varphi+M_1$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{2}z_1^2=-\alpha\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}z(\varphi)d\varphi-G(\varphi_2)+G(\varphi_1)+(\varphi_2-\varphi_1)M_1$$

上式右端之第一项积分表示曲线AB与φ轴及直线$\varphi=\varphi_1=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{M_1}{\gamma}$所围的面积,故有

$$\frac{1}{2}z_1(\varphi_2-\varphi_1)\leqslant\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}z(\varphi)d\varphi,\quad -\alpha\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}z(\varphi)d\varphi\leqslant-\frac{\alpha}{2}z_1(\varphi_2-\varphi_1)$$

所以

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}z_1^2&=-\alpha\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}z(\varphi)d\varphi-G(\varphi_2)+G(\varphi_1)+(\varphi_2-\varphi_1)M_1\\&\leqslant-\frac{\alpha}{2}z_1(\varphi_2-\varphi_1)-G(\varphi_2)+G(\varphi_1)+(\varphi_2-\varphi_1)M_1\end{aligned}\tag{3.5}$$

由(3.4)+(3.5)得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\eta^2-z_1^2)&\leqslant-\frac{\alpha}{2}z_1(\varphi_2-\varphi_1)+G(\varphi_1)-G(\varphi_2)+(\varphi_2-\varphi_1)M_1\\&\quad+G(\varphi_2)-G(\xi)-M_1(\xi-\varphi_2)\\&=-\frac{\alpha}{2}z_1(\varphi_2-\varphi_1)+G(\varphi_1)-G(\xi)+M_1(\varphi_2-\varphi_1)+M_1(\varphi_2-\xi)\end{aligned}$$

因为，$\xi>\varphi_1=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{M_1}{\gamma}$，故$G(\xi)>G(\varphi_1)$(因$G'(x)>0$)

又
$$\varphi_2-\xi<\varphi_2-\varphi_1,$$

所以 $\frac{1}{2}(\eta^2-z_1^2)<-\frac{\alpha}{2}z_1(\varphi_2-\varphi_1)+2M_1(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\alpha}{2}(\varphi_2-\varphi_1)\left(-z_1+\frac{4M_1}{\alpha}\right)$.

故当 $z_1\geqslant\frac{4M_1}{\alpha}$ 时，有 $\frac{1}{2}(\eta^2-z_1^2)<0$. 即 $|\eta|<z_1$　　　　引理证毕.

对系统(3.1)作李雅普诺夫函数

$$v(\varphi,\ z)=\frac{1}{2}z^2+\gamma\int_0^{\varphi}\tan u\,du=\frac{1}{2}z^2+G(\varphi).$$

显见 $v(\varphi,\ z)$ 是正定函数，且当 $\varphi\to\pm\frac{\pi}{2}$ 时，$v(\varphi,\ z)\to+\infty$. $v(\varphi,\ z)=c$ 为包含原点(0, 0)在内的一族闭曲线. 如果 $c_1<c_2$，则 $v=c_1$ 包含在 $v=c_2$ 之内.

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(3.1)}=z\frac{dz}{d\varphi}+\gamma\tan\varphi\frac{d\varphi}{dt}=z(-\alpha z-\gamma\tan\varphi+f(t))+(\gamma\tan\varphi)z$$
$$=-\alpha z^2+zf(t)\leqslant-\alpha|z|^2+M_1|z|=|z|(-\alpha|z|+M_1)$$

所以当 $|z|>\frac{2M_1}{\alpha}$ 时有 $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(3.1)}<0$. 故有下列引理成立.

引理 3　当 $|z|>\frac{2M_1}{\alpha}$ 时，系统(3.1)的积分曲线由外向内穿过闭曲线 $V(\varphi,\ z)=c$.

为了证明系统(3.1)的周期解之存在性，我们在 φ-z 的相柱面上，作出包含原点在内的闭曲线 Γ，使得系统(3.1)的方向场在 φ-z 相柱面上的投影都是由外向内的穿过 Γ.

具体作法:

通过点 $A\left(\varphi_1,\ \frac{4}{\alpha}M_1\right)$ 作系统(3.2)的积分曲线，它与 φ 轴交于点 $B(\varphi_2,\ 0)$，而由文[1]之分析知

$$\varphi_1=\operatorname{arc\,tg}\frac{M_1}{\gamma}<\varphi_2<\frac{\pi}{2};$$

然后通过点 $B(\varphi_2,\ 0)$ 在下半柱面上作系统(3.3)之积分曲线，它与直线 $\varphi=\varphi_1$ 交于点 $C(\varphi_1,\ -z_0)$，由引理 2 知、

$$z_0<\frac{4M_1}{\alpha}=z_1;$$

通过点 $A\left(\varphi_1,\ \frac{4}{\alpha}M_1\right)$ 作闭曲线

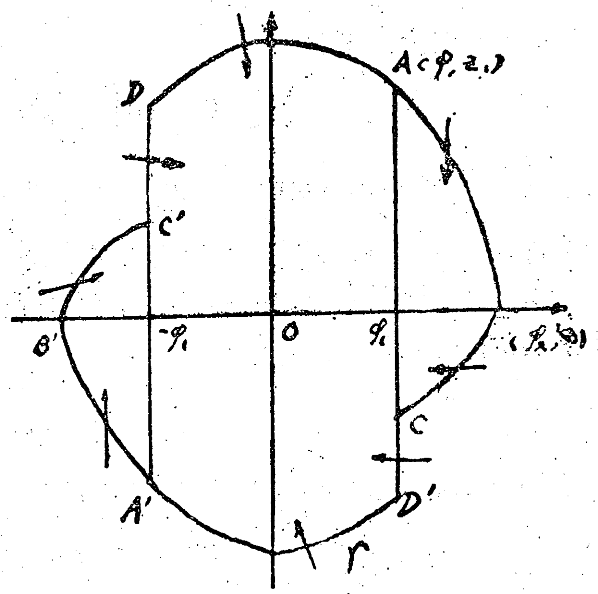

图 5

$$v(\varphi,\ z)=\frac{z^2}{2}+\gamma\int_0^{\varphi}\tan u\,du=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\alpha}M_1\right)^2+\gamma\int_0^{\varphi_1}\tan u\,du=k,$$

此闭曲线一定通过点 $D\left(-\varphi_1,\ \frac{4}{\alpha}M_1\right)$，再利用对原点的对称性，可以作出封闭曲线 Γ: $ABCD'A'B'C'DA$，并且系统(3.1)的矢量场在 φ-z 平面的投影都自外向内的穿过 Γ(见图 5). 这是因为在曲线 AD 上利用引理 3; 在曲线 AB 及曲线 BC 上利用引理 1; 在直线段 DC' 上根据 $\frac{d\varphi}{dt}>0$; 在直线段 CD' 上根据 $\frac{d\varphi}{dt}<0$. 所以这就保证了在闭曲线 Γ 上系统(3.1)的矢量场都自 Γ 外指向 Γ 内. 因此，我们在 Γ 外可类似作一条与 Γ 有同样性

质的、包含 Γ 在内的闭曲线 Γ_1，在这条闭曲线 Γ_1 上系统(3.1)的相轨线都是由外通过 Γ_1 进入 Γ_1 内. 因此在 Γ 外的相柱面上被一族类似于 Γ 与 Γ 具有同样性质的闭曲线所充满. 所以 Γ 曲线所围成的区域就是系统(3.1)的最终有界域. 根据 J. L. Massera 定理[3]，即知系统(3.1)存在一个周期为 $\frac{2\pi}{\Omega_M}$ 的周期解. 从闭曲线 Γ 的作法，即可得知周期解的存在区域为

$$|\varphi|\leqslant\varphi_2=\widetilde{A}\quad |z|\leqslant\left[\left(\frac{4M_1}{\alpha}\right)^2+2\gamma\int_0^{\varphi_1}\tan u\,du\right]^{\frac{1}{2}}=\widetilde{B}\quad \varphi_1=\operatorname{arc\,tg}\frac{M_1}{\gamma}$$

其中

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{M_1}{\gamma}<\varphi_2<\frac{\pi}{2}.$$

现在进一步证明：当 $M_1=0$(不加外界干扰项)时，就有 $\widetilde{A}=\widetilde{B}=0$.

事实上，因 $\widetilde{B}=\left[\left(\frac{4}{\alpha}M_1\right)^2+2\int_0^{\varphi_1}\gamma\tan u\,du\right]^{\frac{1}{2}}$，而当 $M_1=0$ 时，$\varphi_1=0$，故 $\widetilde{B}=0$；为了证明当 $M_1=0$ 时 $\widetilde{A}=0$. 我们从点 $A\left(\varphi_1,\ \frac{4M_1}{\alpha}\right)$ 到点 $B(\varphi_2,\ 0)$ 积分系统(3.2)

$$z\frac{dz}{d\varphi}=-\alpha z-\gamma\tan\varphi+M_1$$

所以

$$-\frac{1}{2}z_1^2=-\alpha\int_0^{\varphi_2}z(\varphi)\,d\varphi+\gamma(\log\cos\varphi_2-\log\cos\varphi_1)+M_1(\varphi_2-\varphi_1)$$

当 $M_1=0$ 时上式变为

$$0=-\alpha\int_0^{\varphi_2}z(\varphi)\,d\varphi+\gamma\log\cos\varphi_2 \tag{3.6}$$

显见 $\int_0^{\varphi_2}z(\varphi)\,d\varphi>0$，$\log\cos\varphi_2<0$，故只有当 $\varphi_2=0$ 时(3.6)式才能成立. 由此推出当 $M_1=0$ 时，$\varphi_2=\widetilde{A}=0$. 这一点与上节§2末所述结论一致.

本文仅就周期解的存在性研究，阐述了这两种定性方法的差异. 至于周期解的唯一性问题，将另文论及.

参 考 文 献

[1] 王联、王慕秋，具有正切鉴相特性的连续二阶锁相环路，应用数学学报，1977年第1期.
[2] 王联、王慕秋，锁相技术中的常微分方程，应用数学与计算数学，1979年第2期.
[3] 王联，高压输电纲任务设计中所出现的二阶非线性常微分方程，数学的实践和认识，1978年第1期.
[4] 王联、王慕秋，柱面上一类带有强迫项的二阶非线性方程的定性研究，数学学报，1980年第5期.
[5] 王慕秋、张锦炎、王联，调频输入正切锁相环路方程及其推广，中国科学，2 (1980).

QUALITATIVE METHOD IN ANALYSIS OF A *P–L–L* WITH TANGENT CHARACTERISTIC AND FREQUENCY MODULATION INPUT

WANG LIAN WANG MUQIU

(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In analysis of *p–L–L* with tangent characteristic and frequency modulation input, we have obtained the following two types of the phase locked loop equation.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\alpha\frac{d\varphi}{dt}+\gamma\tan\varphi=\beta_1+\beta_2(\cos\Omega_M t-\Omega_M\sin\Omega_M t) \tag{I}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+(\alpha+\eta\sec^2\varphi)\frac{d\varphi}{dt}+\gamma\tan\varphi=\beta_1+\beta_2(\cos\Omega_M t-\Omega_M\sin\Omega_M t) \tag{II}$$

$$(\alpha>0,\ \gamma>0,\ \eta>0,\ \beta_1>0,\ \beta_2>0,\ \Omega_M>0).$$

In this paper, our aim is to explain the usual qualitative method and Lyapunov's function method, by which the existence of a periodic solution of (I), (II) is established. In addition, we especially point out: How is to construct the Lyapunov's function for the nonlinear and nonautonomous system? This is a very important problem.