数 学 年 刊
2 (1) 1981

论米林—列别杰夫指数化不等式

胡 克
(江西师范学院)

一、记号与定理的叙述

米林——列别杰夫指数化几个不等式[1,2,3]，自1965年相继建立以后，一直是处理单叶函数系数问题重要工具之一. 它具有一般性，本质上与单叶函数没有牵连，因此，对它进行深入的研究是具有一定意义的. 我们先建立一个定理，米林——列别杰夫之一不等式可以视为此定理的自然结果. 然后再将他们的另一不等式作另一种形式的推广.

设 $\varphi(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k x^k$, $\Phi(x)=e^{\varphi(x)}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}D_k x^k$,

$$\frac{1}{(1-x)^{\lambda}}=\sum_{k=0}^{\infty}d_k(\lambda)x^k,\ |x|<1,$$

$$\Delta_n(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{n}k|A_k|^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

米林——列别杰夫证明

定理A 设 $\lambda>0$ 及

$$Q_n(\lambda)=\frac{1}{d_n(\lambda+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{|D_k|^2}{d_k(\lambda)}\exp\left\{-\frac{\lambda}{d_n(\lambda+1)}\sum_{\nu=1}^{n}d_{n-\nu}(\lambda)\,\Delta_\nu(\lambda)\right\}, \tag{1.1}$$

$$Q_0(\lambda)=1,$$

则 $Q_n(\lambda)$ 为 n 的减少函数.

即
$$Q_n(\lambda)\leqslant Q_{n-1}(\lambda)\leqslant\cdots\leqslant 1. \tag{1.2}$$

等号成立仅限于 $A_k=\frac{\lambda}{k}\eta^k$, $(k=1, 2, \cdots, n)$, $|\eta|=1$.

定理B 若 $p\geqslant 1$, $\lambda>0$ 及

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-1}|A_k|^p<\infty,$$

则
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|D_k|^p}{d_k^{p-1}(\lambda)}\leqslant\exp\left\{\lambda^{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-1}|A_k|^p\right\}. \tag{1.3}$$

我们进一步证明

定理1 设 $p\geqslant 1$, $\lambda>0$ 及

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|D_k|^p x^k}{d_k^{p-1}(\lambda)}\exp\left\{-\lambda^{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-1}|A_k|^p x^k\right\}, \tag{1.4}$$

则 $F(x)$ 为 $x\in[0, 1]$ 的减少函数，即对于区间 $[0, 1]$ 中任意两点 x_1, x_2. 当 $x_1\leqslant x_2$ 时，

本文1979年11月3日收到，1980年2月12日修改.

恒有

$$F(x_2)\leqslant F(x_1)\leqslant F(0)=1. \tag{1.5}$$

定理B显然含在(1.5)中，而且我们下面的证明是简洁的.

定理2 设 $p\geqslant 2$, $\lambda>0$ 记

$$\bar{\Delta}_n(\lambda)=\lambda^{2-p}\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}|A_k|^p-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \tag{1.6}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{Q}_n(\lambda)&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{|D_k|^p}{d_k^{p-2}(\lambda)}\exp\left\{-\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\bar{\Delta}_\nu(\lambda)\right\}\\ \bar{Q}_0(\lambda)&=1,\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

则 $\bar{Q}_n(\lambda)$ 为 n 的减少函数，即

$$\bar{Q}_n(\lambda)\leqslant\bar{Q}_{n-1}(\lambda)\leqslant\cdots\leqslant 1.$$

此定理可视为定理A，当 $\lambda=1$ 时情形的另一种形式推广.

二、定理1的证明

由等式

$$x\Phi'(x)=x\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}\Phi(x)=x\varphi'(x)\Phi(x)$$

或

$$\sum_{k=1}^{\infty}kD_kx^k=\sum_{k=1}^{\infty}kA_kx^k\sum_{k=0}^{\infty}D_kx^k,$$

比较系数，即得

$$nD_n=\sum_{k=1}^{n}kA_kD_{n-k}. \tag{2.1}$$

由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}n|D_n|&\leqslant\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)|A_{n-k+1}|\frac{|D_{k-1}|}{d_{k-1}^{1-\frac{1}{p}}(\lambda)}d_{k-1}^{1-\frac{1}{p}}(\lambda)\\ &\leqslant\left\{\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^p|A_{n-k+1}|^p\frac{|D_{k-1}|^p}{d_{k-1}^{p-1}(\lambda)}\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}d_k(\lambda)\right\}^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

注意

$$\sum_{k=0}^{n-1}d_k(\lambda)=d_{n-1}(\lambda+1)=\frac{n}{\lambda}d_n(\lambda). \tag{2.3}$$

所以(2.2)式即可写为

$$\frac{n|D_n|^p}{d_n^{p-1}(\lambda)}\leqslant\lambda^{1-p}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^p|A_{n-k+1}|^p\frac{|D_{k-1}|^p}{d_{k-1}^{p-1}(\lambda)}. \tag{2.4}$$

(2.4)式两边分别乘以 x^n, $0\leqslant x\leqslant 1$, $n=1, 2, \cdots$ 两边相加得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|D_n|^p}{d_n^{p-1}(\lambda)}x^n&\leqslant\lambda^{1-p}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^p|A_{n-k+1}|^p\frac{|D_{k-1}|^p}{d_{k-1}^{p-1}(\lambda)}x^n\\ &=\lambda^{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}k^p|A_k|^px^k\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|D_k|^p}{d_k^{p-1}(\lambda)}x^k\end{aligned} \tag{2.5}$$

记

$$F_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|D_n|^p}{d_n^{p-1}(\lambda)}x^n,\quad F_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-1}|A_k|^px^k,$$

那么(2.5)式变为

$$xF_1'(x)\leqslant\lambda^{1-p}xF_2'(x)F_1(x),\quad x\in[0, 1]. \tag{2.6}$$

但由 $F(x)=F_1(x)e^{-\lambda^{1-p}}F_2(x)$ 得

$$F'(x)=\{F_1'(x)-\lambda^{1-p}F_2'(x)F_1(x)\}e^{-\lambda^{1-p}}F_2(x). \tag{2.7}$$

所以由(2.6)式，当 $x\in[0, 1]$ 时，$F'(x)\leqslant 0$.　证毕.

三、定理 2 的证明

由(2.1)式应用 Hölder 不等式，得

$$n|D_n|\leqslant\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)|A_{n-k+1}|\frac{|D_{k-1}|}{d_{k-1}^{1-\frac{2}{p}}(\lambda)}d_{k-1}^{1-\frac{2}{p}}(\lambda)$$

$$\leqslant\left\{\sum_{k=1}^{n}|kA_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|D_k|^p}{d_k^{p-2}(\lambda)}\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\sum_{k=0}^{n-1}d_k(\lambda)\right\}^{1-\frac{2}{p}}. \tag{3.1}$$

由(2.3)式得

$$\frac{n^2|D_n|^p}{d_n^{p-2}(\lambda)}\leqslant\lambda^{2-p}\left(\sum_{k=1}^{n}|kA_k|^p\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|D_k|^p}{d_k^{p-2}(\lambda)}\right). \tag{3.2}$$

记

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{|D_k|^p}{d_k^{p-2}(\lambda)},$$

(3.2)式变为

$$S_n\leqslant S_{n-1}+\frac{\lambda^{2-p}}{n^2}S_{n-1}\sum_{k=1}^{n}k^p|A_k|^p. \tag{3.3}$$

又易见

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)k^{p-1}|A_k|^p=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{\nu}k^{p-1}|A_k|^p. \tag{3.4}$$

由等式 $k=n(n-k+1)-(n+1)(n-k)$，导致

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{kk^{p-1}|A_k|^p}{n(n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k+1)k^{p-1}|A_k|^p}{n+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)k^{p-1}|A_k|^p}{n}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{k^{p-1}|A_k|^p}{n+1}-\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{k^{p-1}|A_k|^p}{n}. \tag{3.5}$$

在(3.5)式中，取

$$A_k^p=\frac{\lambda^{p-2}}{k^p}\eta^k\quad(k=1, 2, \cdots, n),\ |\eta|=1,$$

便得到等式

$$\lambda^{2-p}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p|A_k|^p}{n(n+1)}-\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{\Delta}_k(\lambda)}{n+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\bar{\Delta}_k(\lambda)}{n}. \tag{3.6}$$

由(3.3)式，注意到 $x\leqslant e^{x-1}$，得

$$S_n\leqslant\frac{n+1}{n}S_{n-1}\left\{\frac{n}{n+1}+\frac{\lambda^{2-p}}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}|kA_k|^p\right\}$$

$$\leqslant\frac{n+1}{n}S_{n-1}\exp\left\{\frac{\lambda^{2-p}}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}|kA_k|^p-\frac{1}{n+1}\right\}. \tag{3.7}$$

由(3.6)式，得

$$\frac{S_n}{n+1}\leqslant\frac{S_{n-1}}{n}\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{\Delta}_k(\lambda)}{n+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\bar{\Delta}_k(\lambda)}{n}\right\}. \tag{3.8}$$

(3.8)式等价于 $\bar{Q}_n(\lambda)\leqslant\bar{Q}_{n-1}(\lambda)$.　证毕.

参 考 文 献

[1] Лебедев, Н. А., Милин, И. М., *Вестн Ленингр Ун-та*, **19**: 4 (1965), 157—158.
[2] Милин, И. М., *Докл. АН СССР*, **176**: 5 (1967), 1015—1018.
[3] Милин, И. М., Однолистные функции и ортонормальные системы (1971).

ON MILIN-LEBDEV INEQUALITIES

HU KE

(*Jianxi Normal Institute*)

ABSTRACT

Let $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kx^k$, $\Phi(x)=e^{\varphi(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}D_kx^k$,

$$\frac{1}{(1-x)^{\lambda}}=\sum_{k=0}^{\infty}d_k(\lambda)x^k,$$

$$\bar{\Delta}_n(\lambda)=\lambda^{2-p}\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-1}|A_k|^p-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Milin-Lebedev proved that

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|D_k|^p}{d_k^{p-1}(\lambda)}\leqslant\exp\left\{\lambda^{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-1}|A_k|^p\right\},\tag{1}$$

where $p>1$ and $\lambda>0$.

In this paper, we have proved the following theorems:

Theorem 1. Let $p\geqslant1$, $\lambda>0$ and

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|D_k|^p}{d_k^p(\lambda)}x^p\exp\left\{-\lambda^{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-1}|A_k|^px^k\right\},\tag{2}$$

then $F(x)$ is a decreasing function of x on $[0, 1]$.

This theorem is stronger than the result (1).

Theorem 2. Let $p\geqslant2$, $\lambda>0$ and

$$\bar{Q}_n(\lambda)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{|D_k|^p}{d_k^{p-2}(\lambda)}\exp\left\{-\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\bar{\Delta}_\nu(\lambda)\right\},$$

$$\bar{Q}_0(\lambda)=1,$$

then $\bar{Q}_n(\lambda)$ is a decreasing function of n $(n=1, 2, \cdots)$. In the case $p=2$ this is contained in the Milin-Lebedev's result.