数 学 年 刊
2 (1) 1981

二阶泛函常微分方程解的振动性与非振动性

张 炳 根
(山东海洋学院)

对于二阶线性常微分方程

$$y''(t)+P(t)y'(t)+Q(t)y(t)=0 \tag{1}$$

由 Sturm 定理知，方程 (1) 的解或者都是振动、或者都是非振动. 所谓一个解 $y(t)$ 为振动的，是指当 $t\to\infty$ 时，$y(t)$ 具有没有尽头的零点. 于是，非振动解 $y(t)$ 是指存在某一有限时刻 T，当 $t>T$ 后，$y(t)$ 不再有零点.

对于具有时滞变元的二阶线性方程

$$y''(t)+N(t)y(t)+M(t)y(t-\varDelta(t))=0 \tag{2}$$

$A\leqslant t<\infty$, $N(t)$, $M(t)$, $\varDelta(t)\geqslant 0$ 都在 $[A, +\infty)$ 上连续. 初值问题的提法是这样的[1].

$$\begin{aligned} &y(A)=y_A=\varphi(A), \quad y'(A)=y'_A,\\ &y(t-\varDelta(t))\equiv\varphi(t-\varDelta(t)), \quad t-\varDelta(t)<A \end{aligned} \tag{3}$$

$t=A$ 及一切使 $t\geqslant A$ 且 $t-\varDelta(t)<A$ 的 t 值组成初始集 E_A，设在初始集 E_A 上初始函数 $\varphi(t)$ 连续.

在振动性问题上，方程(2)比方程(1)复杂，方程(2)可能同时兼有振动解和非振动解. 例如方程

$$x''(t)+\frac{1}{2}x(t)-\frac{1}{2}x(t-\pi)=0, \quad 0\leqslant t<\infty, \tag{4}$$

既有振动解 $x(t)=\cos t$, $x(t)=\sin t$, 又有非振动解 $x(t)\equiv 1$.

由此可见，二阶泛函微分方程解的振动性一般要比二阶常微分方程相应的问题复杂得多.

本文研究较一般类型的二阶泛函微分方程解的振动性和非振动性，得到若干保证方程的一切解都振动的充分条件，存在有界非振动解的充要条件及其它有关解的渐近性状的结果. 本文得到的结果包括或改进了某些国外已发表的工作. 本文假定讨论的方程解是存在且唯一的.

§1. 解的振动性

考虑二阶非线性泛函微分方程

本文 1979 年 11 月 16 日收到.

$$(r(t)y'(t))'+f(t,\ y(t),\ y(g(t)),\ y'(t),\ y'(h(t)))=0 \tag{5}$$

$t\geqslant A\geqslant 0$, 其中 $r(t)$ 是连续可微的正函数, $g(t)$, $h(t)$ 是连续函数, 且当 $t\to\infty$ 时 $g(t)\to\infty$, $h(t)\to\infty$, 函数 f 关于自己的变元连续.

定理1 对于方程(5)除上述假设外,还满足条件:

I. 当 u, v 同号时, $f(t,\ u,\ v,\ w,\ z)$ 与 u, v 同号;

II. $r(t)$ 是单调不减的正函数,记 $\int_A^t \frac{ds}{r(s)}=R(t)$, 假定有 $\lim\limits_{t\to\infty} R(t)=\infty$;

III. 对每个正的单调不减函数或负的单调不增函数 $y(t)$, 成立

$$\frac{1}{R(t)}\int_T^t\left[\frac{1}{r(\tau)}\int_T^\tau f(s,\ y(s),\ y(g(s)),\ y'(s),\ y'(h(s)))ds\right]d\tau\to\infty\cdot\operatorname{sgn}y,\ \text{当 } t\to\infty \text{时}, \tag{6}$$

则方程(5)之一切解振动.

证 不妨设定理的结论不正确,则存在非振动解 $y(t)$, 假设存在 t_0, 使当 $t\geqslant t_0>0$ 时 $y(t)>0$. 当 $t\to\infty$ 时 $g(t)\to\infty$, 故存在 t_1, 使当 $t\geqslant t_1$ 时 $g(t)\geqslant t_0$, 因此, 当 $t\geqslant t_1$ 时 $y(g(t))>0$. 令 $\max(t_0,\ t_1)=T$, 则当 $t\geqslant T$ 时 $y(t)$, $y(g(t))>0$, 于是由条件 I 得函数 $f>0$, 再由方程(5), 得 $t\geqslant T$ 时 $(r(t)y'(t))'<0$, 即 $r(t)y'(t)$ 单调下降, 对方程(5)从 T 到 t 积分, 得

$$r(t)y'(t)-r(T)y'(T)+\int_T^t f(s,\ y(s),\ y(g(s)),\ y'(s),\ y'(k(s)))ds=0. \tag{7}$$

(i) 如果当 $t\geqslant T$ 时 $r(t)y'(t)\geqslant 0$, 即 $y'(t)\geqslant 0$, 这时, 用 $r(t)$ 除 (7) 式再积分之, 得

$$y(t)-y(T)-r(T)y'(T)\int_T^t\frac{d\tau}{r(\tau)}+\int_T^t\left[\frac{1}{r(\tau)}\int_T^\tau f(s,\ y(s),\ y(g(s)),\ y'(s),\ y'(h(s)))ds\right]d\tau=0. \tag{8}$$

由条件 III, (8) 式中第四项关于第三项是高阶无穷大(当 $t\to\infty$ 时), 故对足够大的 t 值, 由(8)式导致 $y(t)<0$, 与假设 $y(t)>0$ 矛盾.

(ii) 如果当 $t\geqslant T_1\geqslant T$ 时 $r(t)y'(t)<0$, 则有 $r(t)y'(t)<r(T_1)y'(T_1)<0$, 或者 $y'(t)<r(T_1)y'(T_1)/r(t)$, 两边积分, 得

$$y(t)<r(T_1)y'(T_1)\int_{T_1}^t\frac{1}{r(\tau)}d\tau+y(T_1).$$

因而当 $t\to\infty$ 时也导致 $y(t)$ 出现负值, 这与假设 $y(t)>0$ 矛盾.

对于当 $t\geqslant T$ 时 $y(t)<0$, $y(g(t))<0$ 的情况也可类似的证明. 证毕.

今举一个满足定理1条件的二阶泛函常微分方程如下.

考虑方程

$$(ty'(t))'+\frac{1}{t}y(t)\left[1+\left[y'\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2\right]+\frac{1}{\sqrt{t}}y(t-\ln t)\,[1+[y'(t)]^4]=0$$

相应于方程(5), 这里 $r(t)=t$, $g(t)=t-\ln t$, $h(t)=\frac{t}{2}$; $R(t)=\ln\frac{t}{t_0}$, 这方程中的函数 f 满足定理1的条件 I 与 III.

为了说明定理1的意义, 我们作如下注释.

注一　文献[2]中讨论的方程

$$y''(t)+P(t)y(t-\tau)=0, \quad t\geqslant\alpha\geqslant 0,\ \tau\geqslant 0 \tag{9}$$

是方程(5)的特例，根据定理1，方程(9)之一切解振动的充分条件为

$$\frac{1}{t}\int_T^t\left[\int_T^\tau P(s)ds\right]d\tau\to\infty, \quad 当\ t\to\infty 时, \tag{10}$$

条件(10)改进了文献[2]中推论4与推论5给出的条件

$$\lim_{t\to\infty}\int_\alpha^t P(s)ds=\infty \tag{11}$$

和

$$\lim_{t\to\infty}P(t)>0. \tag{12}$$

注二　文献[3]的定理2.2和定理2.8和文献[4]中的定理1是本定理的特例。

注三　如果方程(5)中 $h(t)=g(t)=t$，方程(5)变成二阶非线性常微分方程，这时本定理还包括了文献[5]和[6]中的相应定理。

注四　本定理并不要求 $g(t)\leqslant t$, $h(t)\leqslant t$.

定理2　对于方程(5)，若满足定理1中的条件I和II，此外还满足条件

IV. 对任何 $c\neq 0$，成立

$$\int^\infty(R(\tau)-R(t_0))f(\tau,\ c,\ c,\ 0,\ 0)d\tau=\infty\cdot\operatorname{sgn}c, \tag{13}$$

则方程(5)的一切有界解都振动.

证　设定理的结论不正确，即存在有界非振动解 $y(t)$，不妨设 $y(t)>0$, $y(g(t))>0$，当 $t\geqslant t_1$. 于是 $(r(t)y'(t))'<0$，即 $r(t)y'(t)$ 下降，当 $t\geqslant t_1$ 时.

(i) 若存在 $t_2>t_1$，当 $t\geqslant t_2$ 时 $y'(t)\geqslant 0$，则 $y(t)$ 单调上升趋于有限极限. 从方程(5)得

$$r(t)y'(t)-r(s)y'(s)+\int_s^t f(\tau,\ y(\tau),\ y(g(\tau)),\ y'(\tau),\ y'(h(\tau)))d\tau=0,$$

$s\geqslant t_2$，因而有

$$r(s)y'(s)\geqslant\int_s^t f(\tau,\ y(\tau),\ y(g(\tau)),\ y'(\tau),\ y'(h(\tau)))d\tau;$$

两边除 $r(s)$ 再积分，得

$$y(t)-y(t_2)\geqslant\int_{t_2}^t[R(\tau)-R(t_2)]f(\tau,\ y(\tau),\ y(g(\tau)),\ y'(\tau),\ y'(h(\tau)))d\tau,$$

当 $t\to\infty$ 时，上式右边趋于正无穷与 $y(t)$ 有界的假设矛盾.

(ii) 若存在 t_2，使当 $t\geqslant t_2$ 时 $y'(t)<0$，由

$$y'(t)\leqslant\frac{r(t_2)y'(t_2)}{r(t)}, \quad t\geqslant t_2,$$

导致当 $t\to\infty$ 时，$y(t)\to-\infty$ 与假设矛盾.

对于当 $t\geqslant t_1$ 时 $y(t)<0$, $y(g(t))<0$ 的情况也可类似的分析.　　证毕.

注　定理2包括了文献[3]中的定理2.7.

现在考虑时滞型的二阶泛函微分方程

$$y''(t)+\sum_{i=1}^n P_i(t)F_i(y(t),\ y(g(t)),\ y'(t),\ y'(h(t)))=0, \tag{14}$$

其中 $g(t)$ 和 $h(t)$ 连续，且 $t-M\leqslant g(t)\leqslant t$, $t-M\leqslant h(t)\leqslant t$, M 为某正常数，当 $t\geqslant A\geqslant 0$ 时. 又设 P_i 和 F_i 关于自己的变元连续.

定理3　如果方程(14)除满足上述条件外还满足下列条件:

(i) $P_i(t)\geqslant 0$;

(ii) 当 u, v 同号时 $F_i(u, v, w, z)$ 与 u, v 同号;

(iii) 存在下标 j, 使有

(a) $F_j(\lambda u, \lambda v, \lambda w, \lambda z)=\lambda^{2p+1}F_j(u, v, w, z)$, $\lambda\in R$, $p\geqslant 0$ 某整数, (15)

(b) 存在某正函数 $\varphi(t)$, 使 $t\varphi(t)\to\infty$, 当 $t\to\infty$ 时, 且

$$\int^{\infty}\frac{P_j(t)}{\varphi(t)}dt=+\infty,\quad \int^{\infty}\frac{|\varphi'(t)|}{t\varphi^2(t)}dt<\infty, \tag{16}$$

则方程(14)之一切解振动.

证 设不然, 即存在非振动解 $y(t)$, 不妨设存在 t_1, 当 $t\geqslant t_1$ 时 $y(t)>0$, $y(t-M)>0$, 这时 $y''(t)\leqslant 0$.

(i) 若存在 t_1, 当 $t\geqslant t_1$ 时 $y'(t)>0$, 由文献[2]的引理, 这时

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y(g(t))}{y(t)}=1. \tag{17}$$

再引用文献[4]中所用的引理

$$\frac{y'(t)}{y(t)}\leqslant\frac{L}{t}, \tag{18}$$

其中 L 为某正常数.

现在定义

$$q(t)=\frac{y(t)}{y'(t)}\varphi(t)>0, \tag{19}$$

显然
$$\frac{1}{q(t)}\leqslant\frac{L}{t\varphi(t)}\to 0.$$

现在考虑

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{q(t)}\right)'&=-\frac{q'}{q^2}=\frac{(-\sum P_iF_i)y\varphi-y'^2\varphi-\varphi'yy'}{y^2\varphi^2}<-\frac{P_jF_j}{y\varphi}-\frac{\varphi'y'}{y\varphi^2}\\&=-\frac{P_jy^{2p}}{\varphi}F_j\left(1, \frac{y(g(t))}{y(t)}, \frac{y'(t)}{y(t)}, \frac{y'(h(t))}{y(t)}\right)-\frac{\varphi'y'}{\varphi^2y}.\end{aligned} \tag{20}$$

由 y 和 y' 的单调性, 得

$$0<\frac{y'(h(t))}{y(t)}\leqslant\frac{y'(t-M)}{y(t-M)}\to 0. \tag{21}$$

对(20)式两边积分, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{q(t)}-\frac{1}{q(t_1)}<&-y^{2p}(t_1)\int_{t_1}^{t}\frac{P_j}{\varphi}F_j\left(1, \frac{y(g(\tau))}{y(\tau)}, \frac{y'(\tau)}{y(\tau)}, \frac{y'(h(\tau))}{y(\tau)}\right)d\tau\\&-\int_{t_1}^{t}\frac{\varphi'y'}{y\varphi^2}dt.\end{aligned} \tag{22}$$

由(17), (18)和(21)式, 当 $t\to\infty$ 时, 有

$$F_j\left(1, \frac{y(g(t))}{y(t)}, \frac{y'(t)}{y(t)}, \frac{y'(h(t))}{y(t)}\right)\to F_j(1, 1, 0, 0)>0.$$

于是, 由条件(b), 可知(22)式将导致当 $t\to\infty$ 时 $q(t)<0$, 这与假设 $q(t)>0$ 矛盾.

(ii) 若存在 t_1, 当 $t\geqslant t_1$ 时 $y'(t)\leqslant 0$, $y''(t)\leqslant 0$, 容易证明这时 $y(t)$ 将随 t 的增加而变负, 这与假设 $y(t)>0$ 矛盾. 证毕.

注 本定理包括了文献[4]中的定理1和文献[2]中的推论4以及文献[3]中的推论2.4.

推论　考虑二阶微分差分方程

$$y''(t)+P(t)y(t-\Delta(t))=0, \tag{23}$$

$\Delta(t)\geqslant 0$ 是连续有界函数，若 $P(t)\geqslant 0$，且

$$\int^{\infty} t^{\alpha}P(t)\,dt=\infty, \quad 0\leqslant\alpha<1, \tag{24}$$

则方程(23)的一切解振动．

事实上，在定理 3 中取 $\varphi(t)=t^{-\alpha}$，$0\leqslant\alpha<1$，即得本推论．

条件(24)显然改进了文献[2]中的条件(11)和(12)．

§2．解的非振动性

定理 4　设方程(5)满足定理 1 中的条件 I 和 II，则方程(5)存在非振动的有界解的充分必要条件为

$$\left|\int^{\infty}(R(t)-R(t_0))f(t,\ c,\ c,\ 0,\ 0)\,dt\right|<\infty, \tag{25}$$

其中 $c\neq 0$ 是常数．

证　必要性可从定理 2 得到，因而只要证明条件(25)的充分性．

考虑积分方程

$$y(t)=1-\int_t^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_s^{+\infty}f(\tau,\ y(\tau),\ y(g(\tau)),\ y'(\tau),\ y'(h(\tau)))\,d\tau\,ds, \tag{26}$$

用逐步逼近法证明方程(26)存在有界的非振动解，而方程(26)的解也是方程(5)的解．

设　$$y_0(t)\equiv 1, \quad y_0'(t)\equiv 0,$$

定义递推公式

$$y_n(t)=1-\int_t^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_s^{\infty}f(\tau,\ y_{n-1}(\tau),\ y_{n-1}(g(\tau)),\ y'_{n-1}(\tau),\ y'_{n-1}(h(\tau)))\,dz\,ds, \tag{27}$$

于是　$$y_1(t)=1-\int_t^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_s^{\infty}f(\tau,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)\,d\tau\,ds$$

$$=1-\int_t^{\infty}(R(\tau)-R(t))f(\tau,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)\,d\tau.$$

选择 T 足够大，使当 $t\geqslant T$ 时

$$1/2\leqslant y_1(t)\leqslant 1, \quad 0\leqslant y_1'(t)\leqslant 1/2.$$

由数学归纳法，假设

$$1/2\leqslant y_{n-1}(t)\leqslant 1, \quad 0\leqslant y'_{n-1}(t)\leqslant 1/2,$$

由(27)式，再利用条件(25)，可得

$$1/2\leqslant y_n(t)\leqslant 1, \quad 0\leqslant y'_n(t)\leqslant 1/2,$$

即公式(27)构造的函数序列 $\{y_n(t)\}$ 是均匀有界且等度连续的，于是存在均匀收敛的子序列 $\{y_{n_k}(t)\}$ 收敛到一个有界的正的单调函数 $y(t)$，这个 $y(t)$ 满足积分方程(26)，于是证明了方程(5)在条件(15)下存在有界的非振动解．　　证毕．

注　本定理包括了文献[7]中的有关结果．

现在考虑方程

$$(r(t)y'(t))'+f(t,\ y(t),\ y(t-\varDelta(t)),\ y'(t),\ y'(t-\varDelta_1(t)))=0,\tag{28}$$

$\varDelta(t)\geqslant 0$, $\varDelta_1(t)\geqslant 0$ 是连续函数有公共上界 M, 初始条件为[1]

$$\begin{aligned}&y(A)=\varphi(A),\ \ y'(A)=\psi(A),\\&y(t-\varDelta(t))\equiv\varphi(t-\varDelta(t)),\ \ t-\varDelta(t)<A,\\&y'(t-\varDelta_1(t))\equiv\psi(t-\varDelta_1(t)),\ \ t-\varDelta_1(t)<A.\end{aligned}\tag{29}$$

设 $r(t)$ 为连续可微的单调不减的正函数,且 $\int^{\infty}\frac{d\tau}{r(\tau)}=\infty$.

定理 5 设方程(28)中,当 u, v 同号时 $f(t,\ u,\ v,\ w,\ z)$ 与 u, v 异号,则在初始集 E_A 上 $\varphi(t)\geqslant 0(\varphi(t)\leqslant 0)$, $y'(A)=\psi(A)>0(\psi(A)<0)$, 对应的方程(28)的解具有性质: 当 $t\to\infty$ 时 $y(t)\to+\infty(-\infty)$.

证 设 $\varphi(t)\geqslant 0$, $\psi(A)>0$, 可以证明这时相应的解 $y(t)\geqslant 0$, $A\leqslant t<\infty$.

设不然, 存在 $t^*>A$, 是使 $y(t)<0$ 的 t 的下界, 即 $y(t^*)=0$, 在 $[A,\ t^*]$ 上 $y(t)\geqslant 0$, $y(t-\varDelta(t))\geqslant 0$.

对方程(28)积分两次,得

$$\begin{aligned}&y(t^*)-y(A)-y'(A)r(A)\int_A^{t^*}\frac{d\tau}{r(\tau)}\\&\quad+\int_A^{t^*}\frac{1}{r(\tau)}\int_A^{\tau}f(s,\ y(s),\ y(s-\varDelta(s)),\ y'(s),\ y'(s-\varDelta_1(s)))ds\,d\tau=0,\end{aligned}\tag{30}$$

由(30)式,得 $y(t^*)$ 应大于零,这与 t^* 的定义矛盾. 所以,在 $A\leqslant t<\infty$ 上 $y(t)\geqslant 0$.

在(30)式中用 t 代替 t^*, 并移项得

$$y(t)=y(A)+y'(A)r(A)\int_A^t\frac{d\tau}{r(\tau)}-\int_A^t\frac{1}{r(\tau)}\int_A^{\tau}f\,ds\,d\tau,$$

其中右边第一,三两项是非负的,而第二项当 $t\to\infty$ 时趋于正无穷,即证明了当 $t\to\infty$ 时 $y(t)\to\infty$. 对 $\varphi(t)\leqslant 0$, $\psi(A)<0$ 的情况可以类似的证明.

现在来估计这类无界解的渐近阶.

考虑方程

$$(r(t)y'(t))'=f(t,\ y(t),\ y(t-\varDelta(t))),\tag{31}$$

其中 $r(t)$ 为连续可微的单调不减的正函数,且

$$|f(t,\ y,\ z)|\leqslant g_1(t)|y|^{\alpha}+g_2(t)|z|^{\alpha},\quad 0<\alpha\leqslant 1.\tag{32}$$

令

$$\varphi=\max\{\max_{-M\leqslant\xi\leqslant 0}|\varphi(\xi)|,\ \dot{y}(0)\},\tag{33}$$

$$u(t)=\max\{\max_{0\leqslant\xi\leqslant t}|y(\xi)|,\ \varphi\}.\tag{34}$$

定理 6 对于方程(31),若有条件:

(i) $r(t)>0$ 是连续可微单调不减的函数,记 $R(t)=\int_0^t\frac{d\tau}{r(\tau)}$;

(ii) 函数 f 满足不等式(32);

则对于方程(31)的解有如下估计式

当 $0<\alpha<1$ 时,

$$u(t)\leqslant(1+r(0)R(t))\left[\varphi^{1-\alpha}+\frac{1-\alpha}{r(0)}\int_0^t(g_1(s)+g_2(s))(1+r(0)R(s))^{\alpha}ds\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},\quad(35)$$

当 $\alpha=1$ 时

$$u(t)\leqslant(1+r(0)R(t))\varphi\exp\left\{\frac{1}{r(0)}\int_0^t(g_1(s)+g_2(s))(1+r(0)R(s))ds\right\}.\quad(36)$$

证　对方程(31)积分并除以 $r(t)$，得

$$y'(t)=r(0)y'(0)\frac{1}{r(t)}+\frac{1}{r(t)}\int_0^t f\,d\tau,$$

再积分

$$y(t)=y(0)+r(0)y'(0)\int_0^t\frac{d\tau}{r(\tau)}+\int_0^t\frac{1}{r(\tau)}\int_0^\tau f\,ds\,d\tau$$

两边取绝对值，并注意到(32)式，得

$$|y(t)|\leqslant|y(0)|+r(0)|y'(0)|\int_0^t\frac{d\tau}{r(\tau)}+\int_0^t(R(t)-R(s))g_1(s)|y(s)|^{\alpha}$$
$$+g_2(s)|y(s-\Delta(s))|^{\alpha})ds,$$

利用(33)和(34)式，上式可以写为

$$u(t)\leqslant\varphi(1+r(0)R(t))+\int_0^t(R(t)-R(s))(g_1(s)+g_2(s))u^{\alpha}(s)ds,$$

或

$$\frac{u(t)}{1+r(0)R(t)}\leqslant\varphi+\frac{1}{r(0)}\int_0^t(g_1(s)+g_2(s))(1+r(0)R(s))^{\alpha}\left(\frac{u(s)}{1+r(0)R(s)}\right)^{\alpha}ds,$$

用积分不等式得(35)式，当 $\alpha=1$ 时，直接用 Bellman 不等式即得(36)式.

这个定理给出无界解增长的估计.

参考文献

[1] Норкин, С. Б., Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, «*Наука*», *Москва*, (1965).

[2] George. C. T. Kung., Oscillation and nonoscillation of differential equations with a time lag, *SIAM J. Appl. Math.*, **21**: 2 (1971), 207—213.

[3] Kuo-Liang Chiou, Oscillation and nonoscillation theorems for second order functional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **45**: 2 (1974), 382—403.

[4] Staikas, V. A. and Petsoulas, A. G., Some oscillation criteria for second order nonlinear delay differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **30**: 3 (1970), 695—701.

[5] Р. З. Петропавловская, О колебательности решений дифференциального уравнения $u''=f(u,u',t)$, *ДАН СССР*. т. **108**: 3 (1956), 389—392.

[6] T. Dlotko, *Рж*: *Мат.*, (1963), 5Б 212.

[7] Dahiya, R. S. and Bhagat Singh, On the oscillation of a second-order delay equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **48**: 2 (1974), 610—617.

OSCILLATION AND NONOSCILLATION FOR SECOND-ORDER FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

ZHANG BINGGEN
(*Shandong College of Oceanology*)

ABSTRACT

In this paper, we consider oscillation and nonoscillation of the solution for the more general second-order functional differential equations. Some sufficient conditions which keep all the solutions oscillating have been obtained. They are theorems 1—3.

Here is an example for the equation

$$(r(t)y'(t))'+f(t,\ y(t),\ y(g(t)),\ y'(t),\ y'(h(t)))=0,\quad t\geqslant A\geqslant 0, \tag{5}$$

where $g(t)\to\infty$ and $h(t)\to\infty$ if $t\to\infty$.

Theorem I. Besides the conditions on the continuity and the existence and uniqueness of solution, suppose that the following conditions are also satisfied:

I. $f(t, u, v, w, z)$ has the same sign as u, v, if u, v have the same sign;

II. $r(t)$ is a continuous non-decreasing and positive function, where $t\geqslant A$. Suppose $R(t)=\int_A^t \frac{ds}{r(s)}$ and $\lim\limits_{t\to\infty} R(t)=\infty$;

III. For every positive monotonic non-decreasing function or negative non-increasing function $y(t)$, the following equation

$$\frac{1}{R(t)}\int_T^t\left(\frac{1}{r(\tau)}\int_T^\tau f(s,\ y(s),\ y(g(s)),\ y'(s),\ y'(h(s))ds\right)d\tau\to\infty\cdot\operatorname{sgn} y,\ (t\to\infty) \tag{6}$$

is correct, then all the solutions of equation (5) oscillate.

These theorems contain partial results of the articles [2—6].

The necessary and sufficient condition in which eq. (5) has a non-oscillatory bounded solution is established in this paper. This is theorem 4.

In the present paper, we have proved six theorems which contain some results of foreign articles.