数 学 年 刊
2 (1) 1981

# 具有离散参数齐次随机场的线性预测

徐 业 基
(复旦大学)

设 $\{x(m, n)\}$ 是含有两个取整数值参数 $m$, $n$ 的随机场, 如果它对任意整数 $m'$, $m$, $n'$, $n$ 满足条件

$$Ex(m', n')=0;\quad Ex(m+m', n+n')\overline{x(m, n)}=B(m', n'). \tag{1}$$

则称 $\{x(m, n)\}$ 为齐次场, 其中 $E\{\cdot\}$ 表示随机变量的数学期望. 记 $H_x$ 是齐次场 $\{x(m, n)\}$ 的一切线性组合及均方意义下的极限全体所张成的线性闭空间. 对 $H_x$ 中任意二个元素 $\xi$, $\eta$, 定义内积为 $E\xi\bar{\eta}=(\xi, \eta)$, 并将以概率为 1 相等的随机变量视为同一元素, 则 $H_x$ 是希尔伯脱空间.

对齐次场 $\{x(m, n)\}$ 定义算子 $U$ 及 $V$ 如下

$$Ux(m, n)=x(m+1, n);\quad Vx(m, n)=x(m, n+1). \tag{2}$$

则算子 $U$ 及 $V$ 是 $H_x$ 上的两个可交换的酉算子, 且有谱表示

$$U^mV^n=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m\lambda+n\mu)}dE_x(\lambda, \mu), \tag{3}$$

其中 $E_x(\lambda, \mu)$ 是两元谱系. 由此立即可知 $z(\lambda, \mu)=E_x(\lambda, \mu)x(0, 0)$ 是具有正交增量的随机场, 称为齐次场 $\{x(m, n)\}$ 的随机谱函数. 于是

$$\begin{aligned} x(m, n)=U^mV^nx(0, 0)&=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m\lambda+n\mu)}dE_x(\lambda, \mu)x(0, 0)\\ &=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m\lambda+n\mu)}dz_x(\lambda, \mu). \end{aligned} \tag{4}$$

称此式为齐次场 $\{x(m, n)\}$ 的谱展式. 令 $F(\lambda, \mu)=\|E_x(\lambda, \mu)x(0, 0)\|^2$, 这就是齐次场 $\{x(m, n)\}$ 的谱函数, 即有关系式

$$B(m, n)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m\lambda+n\mu)}dF(\lambda, \mu). \tag{5}$$

具有离散参数齐次场 $\{x(m, n)\}$ 的线性预测问题一般提法是: 设 $T$ 及 $T'$ 是平面上格子点 $(m, n)$ 的二个集合. 当集合 $(m, n)\in T$ 时, $\{x(m, n)\}$ 值已观察到, 而当点 $(m', n')\in T'$ 时, $\{x(m', n')\}$ 值未知. 现在要以已观察到的值的线性组合及其均方意义下的极限去预测未观察到的值 $\{x(m', n'), (m', n')\in T'\}$, 使均方误差最小.

江泽培[1,2]首先研究了: $T'=\{(m', n'), -\infty<m'<\infty, n'\geqslant n_0\}$, $T$ 等于 $T'$ 的余集. 这个线性预测问题在[1,2]中被称为是一种外推问题. 本文中称它为预测问题 **1**. 后来 Пинскер[3], M. C. 以及 Helson, H.; Lowdenslager[4,5], D., 研究了 $T'=\{(m', 0), m'\geqslant 0\}$;

本文 1979 年 11 月 28 日收到.

$T=\{(m, n), -\infty<m<\infty, n<0$; 以及$(m, 0), m<0\}$. 这个线性预测问题在[3, 4, 5]中被称为是另一种外推问题. 本文中称它为预测问题**2**. 王寿仁[6]研究了$T'=\{(0, 0)\}$; $T$等于$T'$的余集. 这个线性预测问题在[6]中被称为是一种内插问题. 本文称它为预测问题**3**.

本文研究了下列三种类型的线性预测问题:

1. $T'=\{(m', n_0), -\infty<m'<\infty\}$; $T$等于$T'$的余集, 这个线性预测问题被称为预测问题**4**.

2. $T'=\{(m', n_0), m'\geqslant 0\}$; $T$等于$T'$的余集. 这个线性预测问题被称为预测问题**5**.

3. $T'=\{(m_0, n_0)\}$; $T=\{(m, n), -\infty<m<\infty, n\leqslant n_0\}-\{(m_0, n_0)\}$. 这个线性预测问题被称为预测问题**6**.

本文最后把齐次场的线性预测理论用到函数论上去, 也相应地得到一些函数论上感兴趣的结果.

以上所得到的结果都要求以谱函数来明显地表示出来, 它们都从不同方面推广了含一个参数情况的线性预测问题[7, 8, 9].

在研究本文的线性预测问题前需再给一些一般定义及记号如下:

设有两个齐次场$\{x(m, n)\}$及$\{y(m, n)\}$. 如果对任意的整数$m, m', n, n'$满足$(x(m+m', n+n'), y(m', n'))=(x(m, n), y(0, 0))$, 则称$\{x(m, n)\}$与$\{y(m, n)\}$是齐次相关的.

设$F(\lambda, \mu)$是齐次场$\{x(m, n)\}$的谱函数, 定义

$$\begin{aligned} L^2_{dF}&=\left\{g(\lambda, \mu): \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(\lambda, \mu)|^2 dF(\lambda, \mu)<\infty\right\}; \\ (g, h)&=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda, \mu)\overline{h(\lambda, \mu)}\,dF(\lambda, \mu). \end{aligned} \tag{6}$$

则$L^2_{dF}$也是希尔伯脱空间. 由于$H_x$中任一元素$y$有表示式$y=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda, \mu)dz(\lambda, \mu)$, 其中$\varphi(\lambda, \mu)$属于$L^2_{dF}$. 所以若把$y$与$\varphi(\lambda, \mu)$作一一对应, 则由谱展式就知$H_x$与$L^2_{dF}$是等距的. 下面以记号$P_H$表示向空间$H$投影的投影算子.

## §1. 齐次场的预测问题 4

对于任一齐次场$\{x(m, n)\}$定义$H_x$的子空间$\hat{H}_x(n)$为由$\{x(m, n'), -\infty<m<\infty, n'\neq n\}$所张成的最小闭线性子空间. 因为$V^k\hat{H}_x(n)=\hat{H}_x(n+k)$, 所以只有两种可能的情形: 或者所有的$\hat{H}_x(n)$与$H_x$相同; 或者所有的$\hat{H}_x(n)$与$H_x$不相同. 若所有的$\hat{H}_x(n)$与$H_x$相同, 则称$\{x(m, n)\}$是奇异**4**.

**引理 1.1** 齐次场$\{x(m, n)\}$的每一个元素$x(m, n)$可唯一地分解为

$$x(m, n)=\nu(m, n)+\delta(m, n), \tag{7}$$

其中$\{\nu(m, n)\}$, $\{\delta(m, n)\}$都是齐次场, 且与$\{x(m, n)\}$是齐次相关的. $\{\nu(m, n)\}$属于$\hat{H}_x(n)$; $\{\delta(m, n)\}$与$\hat{H}_x(n)$正交.

证　只要取

$$\nu(m, n)=P_{\hat{H}_x(n)}x(m, n), \quad \delta(m, n)=x(m, n)-P_{\hat{H}_x(n)}x(m, n). \tag{8}$$

用关系式

$$U\nu(m, n)=P_{U\hat{H}_x(n)}Ux(m, n)=P_{\hat{H}_x(n)}x(m+1, n)=\nu(m+1, n), \tag{9}$$

$$V\nu(m, n)=P_{V\hat{H}_x(n)}Vx(m, n)=P_{\hat{H}_x(n+1)}x(m, n+1)=\nu(m, n+1). \tag{10}$$

以及投影算子的性质即可证明本引理.（参看[7, 9]）.

因此，$d^2=\|\delta(m, n)\|^2$ 与 $m, n$ 无关，且是本文中的预测问题 **4** 的预测误差. 齐次场 $\{x(m, n)\}$ 为奇异 **4** 的充要条件是 $d^2=0$，由算子 $U, V$ 的性质知，我们只要研究特殊的预测问题 **4**，$T'=\{(m', 0), -\infty<m'<\infty\}$；$T$ 等于 $T'$ 的余集. 本节只讨论这个问题.

**引理 1.2**　设 $H_1$ 及 $H_2$ 是两个希尔伯脱空间. $H_1\supset H_2$, $x, y\in H_1$. 若 $x-y$ 正交于 $y$ 及 $H_2$，且 $\|x-y\|=\|x-P_{H_2}x\|$，则 $y=P_{H_2}x$.

证　由引理条件知

$$(x, x)-(y, x)=(x-y, x-y)=(x-P_{H_2}x, x-P_{H_2}x)=(x, x)-(P_{H_2}x, x).$$

由上式得到

$$0=(y-P_{H_2}x, x-y)=(y-P_{H_2}x, x)-(y-P_{H_2}x, y)=-(y-P_{H_2}x, y).$$

所以

$$0=(P_{H_2}x, x-y)=(P_{H_2}x, x)-(P_{H_2}x, y)=(y, x)-(P_{H_2}x, y),$$

$$(y-P_{H_2}x, y-P_{H_2}x)=(y, y)-(P_{H_2}x, y)-(y, P_{H_2}x)+(y, x)=0.$$

证毕.

下面的引理是江泽培[1, 2, 11]的结果.

记预测问题 **1** 的 $k$ 步预测误差为 $\rho_k^2$，即

$$\rho_k^2=\lim_{l\to\infty}\inf_{a_{m,n}^{(l)}} E\left|x(m', k-1)-\sum_{m=-l}^{l}\sum_{n=-l}^{-1}a_{m,n}^{(l)}x(m, n)\right|^2. \tag{11}$$

记 $\rho_\infty^2=\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k^2$. 按[1]中的定义，对 $\rho_\infty^2=E|x(m, n)|^2$, $\rho_\infty^2>0$, $\rho_\infty^2=0$，分别称 $\{x(m, n)\}$ 为正则的；非奇异的和奇异的. 本文分别称它们为正则 **1**；非奇异 **1** 和奇异 **1**.

**引理 1.3**　(1) 齐次场 $\{x(m, n)\}$ 为奇异 **1** 的充要条件是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(\frac{dF(\lambda, \mu)}{dF(\lambda, \pi)d\mu}\right)d\mu=-\infty, \quad \text{a. e. } dF(\lambda, \pi). \tag{12}$$

其中 $\dfrac{dF(\lambda, \mu)}{dF(\lambda, \pi)d\mu}$ 是测度 $dF(\lambda, \mu)$ 对测度 $dF(\lambda, \pi)d\mu$ 的绝对连续部分的广义导数.

(2) 齐次场 $\{x(m, n)\}$ 为正则 **1** 的充要条件是测度 $dF(\lambda, \mu)$ 和测度 $dF(\lambda, \pi)d\mu$ 相互绝对连续，且

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(\frac{dF(\lambda, \mu)}{dF(\lambda, \pi)d\mu}\right)d\mu>-\infty, \quad \text{a. e. } dF(\lambda, \pi). \tag{13}$$

(3) 若齐次场 $\{x(m, n)\}$ 是非奇异 **1**，则 $\{x(m, n)\}$ 的每个元素 $x(m, n)$ 可分解为

$$x(m, n)=x_1(m, n)+x_2(m, n). \tag{14}$$

其中 $\{x_1(m, n)\}$ 是奇异 **1**，$\{x_2(m, n)\}$ 是正则 **1**. 它们的谱函数分别为

$$F_{x_1}(A)=\iint\limits_{A\bar{N}}dF(\lambda, \mu), \quad F_{x_2}(A)=\iint\limits_{AN}dF(\lambda, \mu). \tag{15}$$

其中
$$N=\overline{M}(\eta_\lambda\otimes[-\pi,\ \pi]),$$
$$\eta_\lambda=\left\{\lambda:\int_{-\pi}^{\pi}\left|\log\frac{dF(\lambda,\ \mu)}{dF(\lambda,\ \pi)d\mu}\right|d\mu<+\infty\right\},$$

$M$ 是 $(\lambda,\ \mu)$ 的集合，使 (a) $\iint\limits_M dF(\lambda,\ \pi)d\mu=0$; (b) 对任何 $(\lambda,\ \mu)$ 的可测 $A$ 有 $dH_x(A)=dH_x(AM)$. (测度 $dH_x(\lambda,\ \mu)$ 是测度 $dF(\lambda,\ \mu)$ 对测度 $dF(\lambda,\ \pi)d\mu$ 的奇异部分).

(4) 若齐次场 $\{x(m,\ n)\}$ 是非奇异 **1**，则它的一步预测误差为
$$\rho_1^2=2\pi\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(\frac{dF(\lambda,\ \mu)}{dF(\lambda,\ \pi)d\mu}\right)d\mu\right\}dF(\lambda,\ \pi). \tag{16}$$

为了书写和叙述方便起见．下面约定 $\frac{a}{0}=+\infty,\ (a>0),\ \frac{a}{\infty}=0.$

**定理 1.1**　设齐次场 $\{x(m,\ n)\}$ 的谱函数为 $F(\lambda,\ \mu)$，则

(i) 预测问题 **4** 的预测值为
$$P_{\hat{H}_x(0)}x(m,\ 0)=\nu(m,\ 0)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}C(\lambda,\ \mu)e^{im\lambda}dZ(\lambda,\ \mu), \tag{17}$$
其中 $C(\lambda,\ \mu)$ 称为预测问题 **4** 的谱特征．它为
$$\begin{aligned}C(\lambda,\ \mu)=&I_{\overline{\overline{M}(\delta_\lambda\otimes[-\pi,\pi])}}(\lambda,\ \mu)\\&+I_{\overline{M}(\delta_\lambda\otimes[-\pi,\pi])}(\lambda,\ \mu)\left[1-2\pi\left(\frac{dF(\lambda,\ \mu)}{dF(\lambda,\ \pi)d\mu}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{\dfrac{dF(\lambda,\ \mu)}{dF(\lambda,\ \pi)d\mu}}\right)^{-1}\right],\end{aligned} \tag{18}$$
其中
$$\delta_\lambda=\left\{\lambda:\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{\dfrac{dF(\lambda,\ \mu)}{dF(\lambda,\ \pi)d\mu}}<\infty\right\};\quad I_A(\lambda,\ \mu)=\begin{cases}1, & (\lambda,\ \mu)\in A,\\ 0, & (\lambda,\ \mu)\overline{\in}A.\end{cases} \tag{19}$$

(ii) 预测问题 **4** 的预测误差为
$$\begin{aligned}d^2&=\lim_{l\to\infty}\inf_{b_{m,n}^{(l)}}E\left|x(m,\ 0)-\sum_{m=-l}^{l}\sum_{\substack{n=-l\\n\neq0}}^{l}b_{m,n}^{(l)}x(m,\ n)\right|^2\\&=4\pi^2\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{\dfrac{dF(\lambda,\ \mu)}{dF(\lambda,\ \pi)d\mu}}\right]^{-1}dF(\lambda,\ \pi)\end{aligned} \tag{20}$$

证　先证明(ii)．若齐次场 $\{x(m,\ n)\}$ 是奇异 **1**，则由引理 1.3 知(12)式成立，再由琴生不等式知
$$\begin{aligned}+\infty&=2\pi\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\frac{dF(\lambda,\ \mu)}{dF(\lambda,\ \pi)d\mu}d\mu\right\}\\&\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{\dfrac{dF(\lambda,\ \mu)}{dF(\lambda,\ \pi)d\mu}}.\quad \text{a. e. } dF(\lambda,\ \pi).\end{aligned} \tag{21}$$
这样(20)式右边的积分为零．因为奇异 **1** 必为奇异 **4**．故 $d^2$ 也为零，即定理 1.1(ii) 在齐次场 $\{x(m,\ n)\}$ 是奇异 **1** 时是成立的．

若齐次场 $\{x(m,\ n)\}$ 非奇异 **1**，则由引理 1.3 知它可分解为 $\{x_2(m,\ n)\}$ 及 $\{x_1(m,\ n)\}$ 之和，$\{x_1(m,\ n)\}$ 是奇异 **1**，$\{x_2(m,\ n)\}$ 是正则 **1**．这时，$d^2=E|x_2(m,\ 0)-P_{\hat{H}_{x_2}(0)}\cdot x_2(m,\ 0)|^2$; $dF_{x_2}(\lambda,\ \mu)$ 对 $dF_{x_2}(\lambda,\ \pi)d\mu$ 绝对连续，且几乎处处对测度 $dF_{x_2}(\lambda,\ \pi)d\mu$ 有

$f_2(\lambda,\mu)=\dfrac{dF_{x_2}(\lambda,\mu)}{dF_{x_2}(\lambda,\pi)d\mu}>0$. 故下面只讨论齐次场 $\{x_2(m,n)\}$ 的预测问题 4. 再记

$$\tilde{f}(\lambda,\mu)=\frac{dF(\lambda,\mu)}{dF(\lambda,\pi)d\mu},\quad Q_2=\left\{\lambda:\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f_2(\lambda,\mu)}<+\infty\right\}.$$

由许瓦兹不等式，当 $\lambda\in Q_2$ 时，有

$$\begin{aligned}1&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big\{1-\sum_{m=-l}^{l}\sum_{\substack{n=-l\\ n\neq 0}}^{l}b_{m,n}^{(l)}e^{i(m\lambda+n\mu)}\Big\}d\mu\\ &\leqslant\frac{1}{2\pi}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\Big|1-\sum_{m=-l}^{l}\sum_{\substack{n=-l\\ n\neq 0}}^{l}b_{m,n}^{(l)}e^{i(m\lambda+n\mu)}\Big|^2 f_2(\lambda,\mu)d\mu}\cdot\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f_2(\lambda,\mu)}}.\end{aligned}\tag{22}$$

将上式两边平方再对 $\lambda$ 在 $Q_2$ 上对测度 $dF_{x_2}(\lambda,\pi)$ 积分得到

$$\begin{aligned}&4\pi^2\int_{Q_2}\Big[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f_2(\lambda,\mu)}\Big]^{-1}dF_{x_2}(\lambda,\pi)\\ &\quad\leqslant\int_{Q_2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|1-\sum_{m=-l}^{l}\sum_{\substack{n=-l\\ n\neq 0}}^{l}b_{m,n}^{(l)}e^{i(m\lambda+n\mu)}\Big|^2 f_2(\lambda,\mu)dF_{x_2}(\lambda,\pi)\\ &\quad\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|1-\sum_{m=-l}^{l}\sum_{\substack{n=-l\\ n\neq 0}}^{l}b_{m,n}^{(l)}e^{i(m\lambda+n\mu)}\Big|^2 f_2(\lambda,\mu)dF_{x_2}(\lambda,\pi)d\mu.\end{aligned}\tag{23}$$

将上式右边对 $b_{m,n}^{(l)}$ 取下确界，再令 $l\to\infty$ 即得

$$4\pi^2\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f_2(\lambda,\mu)}\Big]^{-1}dF_{x_2}(\lambda,\pi)=4\pi^2\int_{Q_2}\Big[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f_2(\lambda,\mu)}\Big]^{-1}dF_{x_2}(\lambda,\pi)\leqslant d^2.\tag{24}$$

另一方面，由于 $P_{\hat{H}_{x_2}(0)}x_2(0,0)\in H_{x_2}$，所以必存在 $C_2(\lambda,\mu)\in L_{dF}^2$，使

$$x_2(0,0)-P_{\hat{H}_{x_2}(0)}x_2(0,0)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1-C_2(\lambda,\mu)]I_N(\lambda,\mu)\,dZ(\lambda,\mu).\tag{25}$$

正交于 $x_2(m,n)$，$n\neq 0$. 所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(m\lambda+n\mu)}[1-C_2(\lambda,\mu)]f_2(\lambda,\mu)\,dF_{x_2}(\lambda,\pi)d\mu=0,\quad(n\neq 0).\tag{26}$$

记

$$g(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1-C_2(\lambda,\mu)]f_2(\lambda,\mu)d\mu,\tag{27}$$

则有

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m\lambda+n\mu)}[(1-C_2(\lambda,\mu))f_2(\lambda,\mu)-g(\lambda)]dF_{x_2}(\lambda,\pi)d\mu\\ &\quad=0,\quad(-\infty<m,\ n<\infty).\end{aligned}\tag{28}$$

再由 $f_2(\lambda,\mu)>0$, a. e. $dF_{x_2}(\lambda,\pi)d\mu$, 就得到

$$1-C_2(\lambda,\mu)=\frac{g(\lambda)}{f_2(\lambda,\mu)},\quad \text{a. e. } dF_{x_2}(\lambda,\pi).\tag{29}$$

又由于 $x_2(0,0)-P_{\hat{H}_{x_2}(0)}x_2(0,0)$ 正交于 $P_{\hat{H}_{x_2}(0)}x_2(m,0)$，故对一切 $m$ 有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-im\lambda}[1-C_2(\lambda,\mu)]f_2(\lambda,\mu)\overline{C_2(\lambda,\mu)}d\mu dF_{x_2}(\lambda,\pi)=0.\tag{30}$$

故有

$$\int_{-\pi}^{\pi}[1-C_2(\lambda,\mu)]f_2(\lambda,\mu)\overline{C_2(\lambda,\mu)}d\mu=0,\quad \text{a. e. } dF_{x_2}(\lambda,\pi).\tag{31}$$

即

$$g(\lambda)\int_{-\pi}^{\pi}\Big[1-\frac{g(\lambda)}{f_2(\lambda,\mu)}\Big]d\mu=0.\quad \text{a. e. } dF_{x_2}(\lambda,\pi).\tag{32}$$

所以 $g(\lambda)$ 只可能取零或 $2\pi\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f_2(\lambda,\mu)}\right]^{-1}$. 由(32)式知道当 $\lambda\in Q_2$ 时, $g(\lambda)=0$. 由于当 $\lambda\in Q_2$ 时有

$$|1-C_2(\lambda,\mu)|=\frac{|g(\lambda)|}{f_2(\lambda,\mu)}\leqslant 2\pi\left[f_2(\lambda,\mu)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f_2(\lambda,\mu)}\right]^{-1}. \tag{33}$$

故有

$$\begin{aligned}
d^2&=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-C_2(\lambda,\mu)|^2dF_{x_2}(\lambda,\mu)\\
&=\int_{Q_2}\int_{-\pi}^{\pi}|1-C_2(\lambda,\mu)|^2f_2(\lambda,\mu)dF_{x_2}(\lambda,\pi)d\mu\\
&\leqslant 4\pi^2\int_{Q_2}f_2(\lambda,\mu)\left[f_2(\lambda,\mu)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f_2(\lambda,\mu)}\right]^{-2}dF_{x_2}(\lambda,\pi)d\mu\\
&=4\pi^2\int_{Q_2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f_2(\lambda,\mu)}\right]^{-1}dF_{x_2}(\lambda,\pi)\\
&=4\pi^2\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f_2(\lambda,\mu)}\right]^{-1}dF_{x_2}(\lambda,\pi).
\end{aligned}\tag{34}$$

结合(24)式与(34)式就得到

$$d^2=4\pi^2\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f_2(\lambda,\mu)}\right]^{-1}dF_{x_2}(\lambda,\pi). \tag{35}$$

再由引理 1.3 知

$$\begin{aligned}
\iint_{A_1}dF_{x_2}(\lambda,\mu)&=\iint_{A_1}I_N(\lambda,\mu)dF(\lambda,\mu)=\iint_{A_1}I_{\eta_\lambda\otimes[-\pi,\pi]\overline{M}}(\lambda,\mu)\cdot\tilde{f}(\lambda,\mu)dF(\lambda,\pi)d\mu\\
&=\iint_{A_1}I_{\eta_\lambda\otimes[-\pi,\pi]}(\lambda,\mu)\cdot\tilde{f}(\lambda,\mu)dF(\lambda,\pi)d\mu;
\end{aligned}\tag{36}$$

$$\begin{aligned}
\int_{A_2}dF_{x_2}(\lambda,\pi)&=\int_{A_2}\int_{-\pi}^{\pi}dF_{x_2}(\lambda,\mu)=\int_{A_2}\int_{-\pi}^{\pi}I_{\eta_\lambda\otimes[-\pi,\pi]}(\lambda,\mu)\cdot\tilde{f}(\lambda,\mu)dF(\lambda,\pi)d\mu\\
&=\int_{A_2}I_{\eta_\lambda}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(\lambda,\mu)d\mu\right)dF(\lambda,\pi).
\end{aligned}\tag{37}$$

由于在 $\eta_\lambda\otimes[-\pi,\pi]$ 上 $\tilde{f}(\lambda,\mu)>0$, a. e. $dF(\lambda,\pi)d\mu$, 故由(36), (37)式知

$$I_{\eta_\lambda}\cdot f_2(\lambda,\mu)=I_{\eta_\lambda}\frac{\tilde{f}(\lambda,\mu)}{\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(\lambda,\mu)d\mu}. \tag{38}$$

于是由(35), (37)式, (38)和(21)式知

$$\begin{aligned}
d^2&=4\pi^2\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f_2(\lambda,\mu)}\right]^{-1}dF_{x_2}(\lambda,\pi)\\
&=4\pi^2\int_{-\pi}^{\pi}I_{\eta_\lambda}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f_2(\lambda,\mu)}\right]^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(\lambda,\mu)dF(\lambda,\pi)\\
&=4\pi^2\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{\tilde{f}(\lambda,\mu)}\right]^{-1}dF(\lambda,\pi).
\end{aligned}\tag{39}$$

即证明了定理 1.1 的 (ii).

证明(i) 设 $C(\lambda,\mu)$ 由(18)式定义. 若齐次场 $\{x(m,n)\}$ 是奇异 **4**, 则 $P_{\hat{H}_x(0)}x(m,0)=x(m,0)$. 但由(20)式知(18)式化为 $C(\lambda,\mu)=1$. 这就说明定理 1.1 的 (i) 在齐次场 $\{x(m,n)\}$ 是奇异 **4** 的情况下是成立的.

若齐次场 $\{x(m, n)\}$ 非奇异 **4**, 则一定是非奇异 **1**. 故可以把齐次场 $\{x(m, n)\}$ 分解为 $\{x_1(m, n)\}$ 及 $\{x_2(m, n)\}$ 之和. 由琴生不等式知 $\delta_\lambda\subset\eta_\lambda$. 再由(38)式知

$$C(\lambda, \mu)=\begin{cases}1-2\pi\left[f_2(\lambda, \mu)\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{d\mu}{f_2(\lambda, \mu)}\right]^{-1}, & \text{当 }(\lambda, \mu)\in\overline{M}(\eta_\lambda\otimes[-\pi, \pi]),\\ 1, & \text{其它}.\end{cases}\tag{40}$$

$$=\begin{cases}1-2\pi\left[\tilde{f}(\lambda, \mu)\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{d\mu}{\tilde{f}(\lambda, \mu)}\right]^{-1}, & \text{当 }(\lambda, \mu)\in\overline{M}(\eta_\lambda\otimes[-\pi, \pi]);\\ 1, & \text{其它}.\end{cases}\tag{41}$$

$$=\begin{cases}1-2\pi\left[\tilde{f}(\lambda, \mu)\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{d\mu}{\tilde{f}(\lambda, \mu)}\right]^{-1}, & \text{当 }(\lambda, \mu)\in\overline{M}(\delta_\lambda\otimes[-\pi, \pi]);\\ 1, & \text{其它}.\end{cases}\tag{42}$$

再经过计算得

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|C(\lambda, \mu)|^2dF(\lambda, \mu)\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dF_{x_1}(\lambda, \mu)-4\pi^2\int_{\eta_\lambda}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f_2(\lambda, \mu)}\right]^{-1}dF_{x_2}(\lambda, \pi)<+\infty.\end{aligned}\tag{43}$$

故 $\nu(m, 0)$ 及 $x(m, 0)$ 都属于 $H_x$. 此外, (25), (26), (28), (30) 式一样可知 $x(m, 0)-\nu(m, 0)$ 正交于 $\hat{H}(0)$ 及 $\nu(m, 0)$. 再由本定理的 (ii) 知

$$\|x(m, 0)-\nu(m, 0)\|^2=\|x(m, 0)-P_{\hat{H}_x(0)}x(m, 0)\|^2=d^2.$$

所以用引理 1.2 即得 $\nu(m, 0)=P_{\hat{H}_x(0)}x(m, 0)$, 即 $C(\lambda, \mu)$ 为预测问题 **4** 的谱特征.

证毕.

由定理 1.1 容易得到下面的定理 1.2, 定理 1.3 及定理 1.4.

**定理 1.2** 齐次场 $\{x(m, n)\}$ 为奇异 **4** 的充要条件是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{dF(\lambda, \mu)}{dF(\lambda, \pi)d\mu}\right]^{-1}d\mu=+\infty,\quad \text{a. e. } dF(\lambda, \pi).\tag{44}$$

**定理 1.3** 设齐次场 $\{x(m, n)\}$ 的谱函数 $F(\lambda, \mu)$ 绝对连续, $f(\lambda, \mu)=\dfrac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}$ 记为谱密度, 则 (1) 预测问题 **4** 的预测谱特征为

$$C(\lambda, \mu)=\begin{cases}1-2\pi\left[f(\lambda, \mu)\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{d\mu}{f(\lambda, \mu)}\right]^{-1}, & \text{当 }(\lambda, \mu)\in Q\otimes[-\pi, \pi];\\ 1, & \text{其它}.\end{cases}\tag{45}$$

其中 $Q=\left\{\lambda:\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{d\mu}{f(\lambda, \mu)}<\infty\right\}$.

(2) 预测问题 **4** 的预测误差为

$$d^2=4\pi^2\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f(\lambda, \mu)}\right]^{-1}d\lambda.\tag{46}$$

**定理 1.4** 设齐次场 $\{x(m, n)\}$ 的谱函数 $F(\lambda, \mu)$ 绝对连续, 则齐次场 $\{x(m, n)\}$ 为奇异 **4** 的充要条件是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f(\lambda, \mu)}=+\infty,\quad \text{a. e. } d\lambda.\tag{47}$$

## §2. 齐次场的预测问题5

对于任一齐次场 $\{x(m, n)\}$ 定义 $H_x$ 的子空间 $H_x(m, n)$ 为由: $\{x(m', n'), -\infty<m'<\infty, n'\neq n$; 以及 $x(m', n), m'\leqslant m\}$ 所张成的最小闭线性子空间. 因为 $U^kV^lH_x(m, n)=H_x(m+k, n+l)$. 所以只有两种可能的情况: 或者所有的 $H_x(m, n)$ 与 $H_x$ 相同; 或者所有的 $H_x(m, n)$ 与 $H_x$ 不相同. 若所有的 $H_x(m, n)$ 与 $H_x$ 相同, 则称齐次场 $\{x(m, n)\}$ 为奇异 **5**.

**引理2.1** 齐次场 $\{x(m, n)\}$ 的每一个元素 $x(m, n)$ 可唯一地分解为

$$x(m, n)=R_h(m, n)+\varDelta_h(m, n), \quad (h\text{ 是正整数}). \tag{48}$$

其中 $\{R_h(m, n)\}$ 及 $\{\varDelta_h(m, n)\}$ 都是齐次场, 而且都与 $\{x(m, n)\}$ 齐次相关, $\{R_h(m, n)\}$ 属于 $H_x(m-h, n)$; $\{\varDelta_h(m, n)\}$ 与 $H_x(m-h, n)$ 正交.

证 只要取

$$R_h(m, n)=P_{H_x(m-h, n)}x(m, n); \quad \varDelta_h(m, n)=x(m, n)-P_{H_x(m-h, n)}x(m, n). \tag{49}$$

用关系式

$$\left.\begin{aligned} UR_h(m, n)&=P_{H_x(m+1-h, n)}x(m+1, n)=R_h(m+1, n),\\ VR_h(m, n)&=P_{H_x(m-h, n+1)}x(m, n+1)=R_h(m, n+1),\end{aligned}\right. \tag{50}$$

以及投影算子的性质即可证明.

因此, $B^2(h)=\|\varDelta_h(m, n)\|^2$ 只与 $h$ 有关而与 $m, n$ 无关. 它是预测问题5的预测 $h$ 步的预测误差. 易知齐次场 $\{x(m, n)\}$ 为奇异 **5** 的充要条件是 $B^2(1)=0$. 由算子 $U, V$ 的性质, 我们只要研究特殊的预测问题 **5** $T'=\{(m', 0), m'\geqslant 0\}$; $T$ 等于 $T'$ 的余集.

下面的引理是, Пинскер[3] M. C. 的结果.

记预测问题 **2** 的 $k$ 步预测误差为 $L_k^2$, 即

$$L_k^2=\lim_{l\to\infty}\inf_{a_{m,n}^{(l)}} E\left|x(k-1, 0)-\sum_{m=-l}^{l}\sum_{n=-l}^{-1}a_{m,n}^{(l)}x(m, n)-\sum_{m=-l}^{-1}a_{m,0}x(m, 0)\right|^2, \tag{51}$$

记 $L_\infty^2=\lim\limits_{k\to\infty}L_k^2$. 按照 [3] 中的定义: 对 $L_\infty^2=\|x(m, n)\|^2$; $L_\infty^2>0$, 和 $L_\infty^2=0$, 分别称 $\{x(m, n)\}$ 为正则的; 非奇异的和奇异的. 本文分别称它们为正则 **2**; 非奇异 **2** 和奇异 **2**.

**引理2.2** (1) 齐次场 $\{x(m, n)\}$ 为奇异 **2** 的充要条件是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\log\frac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda\, d\mu}\right]d\lambda\, d\mu=-\infty, \tag{52}$$

其中 $\dfrac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda\, d\mu}$ 指 $F(\lambda, \mu)$ 的绝对连续部分对 $d\lambda\, d\mu$ 的导数.

(2) 若齐次场 $\{x(m, n)\}$ 是非奇异 **2**, 则预测问题 **2** 的1步预测误差为

$$L_1^2=4\pi^2\exp\left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\log\frac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda\, d\mu}\right]d\lambda\, d\mu\right\}. \tag{53}$$

容易证明下面的引理

**引理2.3** (齐次场的勒贝格——克拉美分解式). 齐次场 $\{x(m, n)\}$ 的每一个元素 $x(m, n)$ 可分解为

$$x(m, n)=\rho(m, u)+s(m, n), \tag{54}$$

其中 $\{\rho(m, n)\}$ 与 $\{s(m, n)\}$ 是相互正交的齐次场，记 $\{\rho(m, n)\}$ 的谱函数为 $F_\rho(\lambda, \mu)$；$\{s(m, n)\}$ 的谱函数为 $F_s(\lambda, \mu)$. 则有

$$\begin{aligned}F_\rho(\lambda, \mu)&=\int_{-\pi}^{\lambda}\int_{-\pi}^{\mu}\frac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}d\lambda d\mu;\\ F_s(\lambda, \mu)&=F(\lambda, \mu)-\int_{-\pi}^{\lambda}\int_{-\pi}^{\mu}\frac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}d\lambda d\mu.\end{aligned}\tag{55}$$

其中 $\frac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}$ 指 $F(\lambda, \mu)$ 的绝对连续部分对 $d\lambda d\mu$ 的导数.

**定理 2.1** 齐次场 $\{x(m, n)\}$ 的预测问题 **5** 的 $h$ 步预测误差为

$$\begin{aligned}\sigma^2(h)&=\lim_{l\to\infty}\inf_{a_{m,n}^{(l)}}E\left|x(h-1, 0)-\sum_{m=-l}^{l}\sum_{\substack{n=-l\\ n\neq 0}}^{l}a_{m,n}^{(l)}x(m, n)-\sum_{m=-l}^{-1}a_{m,0}^{(e)}x(m, 0)\right|^2\\ &=\begin{cases}0, & \text{若}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}\right)^{-1}d\mu\right]d\lambda=+\infty;\\ 2\pi\sum\limits_{k=0}^{h-1}|\varphi_k|^2, & \text{若}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}\right)^{-1}d\mu\right]d\lambda<+\infty,\end{cases}\end{aligned}\tag{56}$$

其中 $\varphi_k$ 由下关系式决定

$$\exp\left[\frac{1}{2}A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\zeta^k\right]=\varphi_0+\varphi_1\zeta+\varphi_2\zeta^2+\cdots\tag{57}$$

而

$$A_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\mu}\log\left(\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{\frac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}}\right]^{-1}\cdot 4\pi^2\right)d\lambda.\tag{58}$$

特别对一步预测误差 $\sigma^2(1)$，有

$$\sigma^2(1)=\begin{cases}0, & \text{若}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}\right)^{-1}d\mu\right]d\lambda=+\infty;\\ 2\pi\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{\frac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}}\right]^{-1}\cdot 4\pi^2\right)d\lambda\right\}, & \\ & \text{若}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}\right)^{-1}d\mu\right]d\lambda<+\infty.\end{cases}\tag{59}$$

证 按引理 2.3 把齐次场 $\{x(m, n)\}$ 分解为 $\{\rho(m, n)\}$ 及 $\{s(m, n)\}$ 之和. 由引理 2.2 知 $\{s(m, n)\}$ 是奇异 **2**. 因为奇异 **2** 必是奇异 **5**, 所以要得到 $\sigma^2(h)$ 只要考虑 $\{\rho(m, n)\}$. 若 $\{\rho(m, n)\}$ 是奇异 **4**, 则必是奇异 **5**, 且

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}\right]^{-1}d\mu=+\infty,\quad \text{a. e. } d\lambda.$$

这时就属于 (56) 式第一种情况. 故本定理成立. 若 $\{\rho(m, n)\}$ 非奇异 **4**, 则把空间 $H_\rho(-1, 0)$ 作正交分解

$$H_\rho(-1, 0)=(H_\rho(-1, 0)\ominus\hat{H}_\rho(0))\oplus\hat{H}_\rho(0).\tag{60}$$

作

$$\delta_\rho(m, 0)=\rho(m, 0)-P_{\hat{H}_\rho(0)}\rho(m, 0).\tag{61}$$

由引理 1.1 知它是含一个参数 $m$ 的平稳序列, 且由 $\{\delta_\rho(m, 0), m\leqslant -1\}$ 所张成的最小

闭线性子空间即是 $H_\rho(-1,0)\ominus\hat{H}_\rho(0)$. 于是

$$\begin{aligned}&\|\delta_\rho(h-1,0)-P_{H_\rho(-1,0)\ominus\hat{H}_\rho(0)}\delta_\rho(h-1,0)\|^2\\&=\|\rho(h-1,0)-P_{\hat{H}_\rho(0)}\rho(h-1,0)-P_{H_\rho(-1,0)\ominus\hat{H}_\rho(0)}\rho(h-1,0)\\&\quad+P_{H_\rho(-1,0)\ominus\hat{H}_\rho(0)}P_{\hat{H}_\rho(0)}\rho(h-1,0)\|^2\\&=\|\rho(h-1,0)-P_{H_\rho(-1,0)}\rho(h-1,0)\|^2=\sigma^2(h).\end{aligned}\tag{62}$$

由定理 1.3 知

$$\begin{aligned}E\delta_\rho(h,0)\overline{\delta_\rho(0,0)}&=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-C(\lambda,\mu)|^2\frac{dF(\lambda,\mu)}{d\lambda d\mu}e^{ih\lambda}d\lambda d\mu\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{\frac{dF(\lambda,\mu)}{d\lambda d\mu}}\right]^{-1}4\pi^2e^{ih\lambda}d\lambda.\end{aligned}\tag{63}$$

因此平稳序列 $\delta_\rho(m,0)$ 的谱密度 $f_\rho(\lambda)$ 为

$$f_\rho(\lambda)=4\pi^2\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{\frac{dF(\lambda,\mu)}{d\lambda d\mu}}\right]^{-1}.\tag{64}$$

利用含一个参数的平稳序列的外推结果[8,9] 即可得到本定理的证明.

由定理 2.1 立即推得下面的定理

**定理 2.2** 齐次场 $\{x(m,n)\}$ 为奇异 **5** 的充要条件是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\log\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{dF(\lambda,\mu)}{d\lambda d\mu}\right]^{-1}d\mu\right)d\lambda=+\infty.\tag{65}$$

## §3. 齐次场的预测问题 6

对于任一齐次场 $\{x(m,n)\}$ 定义 $H_x$ 的子空间 $\widetilde{H}_x(m,n)$ 为由 $\{x(m',n'),\ -\infty<m'<\infty,\ n'\leqslant n-1;$ 以及 $x(m',n),\ m'\neq m\}$ 所张成的最小闭线性子空间. 因为

$$U^kV^l\widetilde{H}_x(m,n)=\widetilde{H}_x(m+k,n+l),$$

所以只有两种可能的情况: 或者所有的 $\widetilde{H}_x(m,n)$ 与 $H_x$ 相同; 或者所有的 $\widetilde{H}_x(m,n)$ 与 $H_x$ 不相同. 若所有的 $\widetilde{H}_x(m,n)$ 与 $H_x$ 相同, 则称 $\{x(m,n)\}$ 为奇异 **6**.

按照前面的方法容易证明下面的引理

**引理 3.1** 齐次场 $\{x(m,n)\}$ 的每一个元素 $x(m,n)$ 可唯一地分解为

$$x(m,n)=\widetilde{R}(m,n)+\widetilde{\Delta}(m,n),\tag{66}$$

其中 $\{\widetilde{R}(m,n)\}$ 及 $\{\widetilde{\Delta}(m,n)\}$ 都是齐次场, 且与 $\{x(m,n)\}$ 齐次相关, 而 $\{\widetilde{R}(m,n)\}$ 属于 $\widetilde{H}_x(m,n)$; $\{\widetilde{\Delta}(m,n)\}$ 与 $\widetilde{H}_x(m,n)$ 正交.

因此, $\tilde{\sigma}^2=\|\widetilde{\Delta}(m,n)\|^2$ 与 $m$, $n$ 无关, 它是预测问题 **6** 的预测误差. 易知齐次场 $\{x(m,n)\}$ 为奇异 **6** 的充要条件是 $\tilde{\sigma}^2=0$. 由算子 $U$, $V$ 的性质, 我们只要研究特殊的预测问题 **6** $T'=\{(0,0)\}$, $T=\{(m,n);\ -\infty<m<\infty,\ n\leqslant0\}-\{(0,0)\}$.

**定理 3.1** 设齐次场 $\{x(m,n)\}$ 的预测问题 **6** 的预测误差为 $\tilde{\sigma}^2$, 则有

$$\tilde{\sigma}^2 = \lim_{l\to\infty} \inf_{a_{m,n}^{(l)}} E\left| x(0,\ 0) - \sum_{m=-l}^{l} \sum_{n=-l}^{-1} a_{m,n}^{(l)} x(m,\ n) - \sum_{\substack{m=-l\\ m\neq 0}}^{l} a_{m,0}^{(e)} x(m,\ 0) \right|^2$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{若} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\frac{dF(\lambda,\ \mu)}{d\lambda d\mu} d\mu\right\} d\lambda = +\infty; \\ 4\pi^2\left[\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\frac{dF(\lambda,\ \mu)}{d\lambda d\mu} d\mu\right\} d\lambda\right]^{-1}, & \\ & \text{若} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\frac{dF(\lambda,\ \mu)}{d\lambda d\mu} d\mu\right\} d\lambda < +\infty, \end{cases} \tag{67}$$

其中 $\dfrac{dF(\lambda,\ \mu)}{d\lambda d\mu}$ 是 $F(\lambda,\ \mu)$ 的绝对连续部分对 $d\lambda d\mu$ 的导数.

证　按引理 2.3 把齐次场 $\{x(m, n)\}$ 分解为 $\{\rho(m, n)\}$ 与 $\{s(m, n)\}$ 之和. $\{s(m, n)\}$ 是奇异 **2**, 因此必是奇异 **6**. 所以要得出 $\tilde{\sigma}^2$, 只要考虑 $\{\rho(m,\ n)\}$. 若 $\{\rho(m,\ n)\}$ 是奇异 **1**, 则必是奇异 **6**, 且由奇异 **1** 得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log\frac{dF(\lambda,\ \mu)}{d\lambda d\mu} d\mu = -\infty, \quad \text{a. e. } d\lambda \tag{68}$$

这时就属于 (67) 式的第一种情况. 因此当 $\{\rho(m,\ n)\}$ 是奇异 **1** 时本定理成立. 若 $\{\rho(m,\ n)\}$ 非奇异 **1**, 则把空间 $\tilde{H}_\rho(0,\ 0)$ 作正交分解

$$\tilde{H}_\rho(0,\ 0) = (\tilde{H}_\rho(0,\ 0) \ominus H_\rho(-1)) \oplus H_\rho(-1), \tag{69}$$

其中 $H_\rho(-1)$ 是由 $\{\rho(m,\ n);\ -\infty<m<\infty,\ n\leqslant -1\}$ 所张成的最小闭线性子空间. 作

$$\delta_\rho(m) = \rho(m,\ 0) - P_{H_\rho(-1)}\rho(m,\ 0). \tag{70}$$

容易证明 $\delta_\rho(m)$ 是含一个参数的平稳序列, 且它的谱密度 $\tilde{f}(\lambda)$ 为(参看 [3])

$$\tilde{f}(\lambda) = 2\pi \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\frac{dF(\lambda,\ \mu)}{d\lambda d\mu} d\mu\right\}. \tag{71}$$

于是用定理 2.1 的证明方法及含有一个参数的平稳序列的内插公式[8, 9] 即可证明本定理。

**定理 3.2**　齐次场 $\{x(m,\ n)\}$ 是奇异 **6** 的充要条件是

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\frac{dF(\lambda,\ \mu)}{d\lambda d\mu} d\mu\right\} d\lambda = +\infty. \tag{72}$$

## §4. 齐次场的线性预测问题在函数论上的应用

因为齐次随机场的线性预测问题实质上是在函数空间 $L^2_{dF}$ 上讨论的, 所以容易得到下列相应的定理:

**定理 4.1**　系列 $\{e^{i(m\lambda+n\mu)},\ -\infty<m<\infty,\ n\leqslant n_0\}$ 在空间 $L^2_{dF}$ 中处处稠密的充要条件是(12)式.

这定理是 [1, 2] 的直接推论.

**定理 4.2**　系列 $\{e^{i(m\lambda+n\mu)},\ -\infty<m<\infty,\ n\neq n_0\}$ 在空间 $L^2_{dF}$ 中处处稠密的充要条件是(44)式.

这定理是定理 1.2 的直接推论.

**定理 4.3**　系列 $\{e^{i(m\lambda+n\mu)},\ -\infty<m<\infty,\ n\neq n_0;$ 以及 $e^{i(m\lambda+n_0\mu)},\ m\leqslant m_0\}$ 在空间 $L^2_{dF}$ 中处处稠密的充要条件是(65)式.

这定理是定理 2.2 的直接推论.

**定理 4.4** 系列 $\{e^{i[m\lambda+n\mu]}, (m, n)\neq(m_0, n_0)\}$ 在空间 $L^2_{dF}$ 中处处稠密的充要条件是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda d\mu}{\dfrac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}}=+\infty. \tag{73}$$

这定理是[6, 10]的直接推论. 因为在[6, 10]已求得预测问题 **3** 的预测误差 $\hat{\sigma}^2$ 为

$$\hat{\sigma}^2=\begin{cases}0, & \text{若}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda d\mu}{\dfrac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}}=+\infty;\\ 16\pi^4\left[\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda d\mu}{\dfrac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}}\right]^{-1}, & \text{若}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda d\mu}{\dfrac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}}<+\infty.\end{cases} \tag{74}$$

但这个结论也可以用本文定理 1.2 的结果及证明定理 2.1 及定理 3.1 的方法来直接导出.

**定理 4.5** 设 $f(\lambda, \mu)$ 在 $[-\pi, \pi; -\pi, \pi]$ 上非负且可积, 则有下列不等式

$$2\pi\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda, \mu)d\mu\right\}d\lambda$$

$$\geqslant\left\{\begin{array}{l}4\pi^2\exp\left\{\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda, \mu)d\lambda d\mu\right\}\\ \qquad\geqslant\left\{\begin{array}{l}4\pi^2\left[\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\dfrac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda, \mu)d\mu\right\}d\lambda\right]^{-1}\\ 2\pi\exp\left\{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\log 4\pi^2\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f(\lambda, \mu)}\right]^{-1}d\lambda\right\}\end{array}\right.\\ 4\pi^2\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f(\lambda, \mu)}\right]^{-1}d\lambda\geqslant 2\pi\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log 4\pi^2\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{f(\lambda, \mu)}\right]^{-1}d\lambda\right\}\end{array}\right\}$$

$$\geqslant\frac{16\pi^4}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda d\mu}{f(\lambda, \mu)}}.$$

只要综合前面的结果就不难证明这定理. 这些不等式是琴生不等式在二维情况下的各种推广.

汪嘉冈对本文提出了意见, 使本文的结果得到了改进, 在此特地表示感谢.

## 参 考 文 献


[1] Цзян Цзэ-Пей, О линейной экстраполировании дискретного однородного случайного поля, *ДАН СССР*, **112**: 2 (1957), 207—210.

[2] 江泽培，关于随机场的滤波，1978 年全国概率论会议报告.

[3] Пинскер, М. С., экстраполирование однородных случайных полей и количество информации О Гауссовском случайном поле, содержащейся в другом Гауссовском случайном поле, *ДАН СССР.*, **112**: 5(1957), 815—818.

[4] Helson, H. and Lowdenslager, D., Prediction theory and Fourier series in several variables, *Acta Mathematica*, **99** (1958), 165—202.

[5] Helson, H. and Lowdenslager, D., Prediction theory and Fourier series in several variables. II, *Acta Mathematica*, **106** (1961), 175—213.

[6] 王寿仁，关于整数格上齐次随机场的内插，数学进展，(1957), 257—262.

[7] Колмогоров А. Н., Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюллетень *МГУ* **6** (1941).

[8] Колмогоров, А. Н., Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей., *Изв. Акад. Наук СССР., сер Мет.* **5** (1941), 3—14.

[9] 郑绍濂编校，希尔伯脱空间的平稳序列，上海科学技术出版社，1963 年.

[10] 陶宗英，具有离散参数的齐次随机场的内插，复旦学报，**1** (1960), 58—70.

[11] Цзян-Цзэ-Пей, О ленейной экстраполяции непрерывного однородного случайного поля, *Теория Вер. и ее Примен.*, **2** (1957), 60—91.

# LINEAR PREDICTION THEORY OF A HOMOGENEOUS RANDOM FIELD WITH DISCRETE PARAMETERS

XU YEJI
(*Fudan University*)

## ABSTRACT

A homogeneous random field with discrete parameters is defined to be a family of random variables $\{x(m, n)\}$, $m, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, such that $Ex(m, n)=0$, and that $B(m, n)=E[x(m+m', n+n')x(m', n')]$ exists and is independent of $m'$ and $n'$. At this time, we have

$$B(m, n)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m\lambda+n\mu)}dF(\lambda, \mu).$$

Generally, linear prediction problems of a homogeneous random field with discrete parameters are as follows:

Let $T$ and $T'$ are two sets of $(m, n)$, $\{x(m, n)\}$ have been observed if $(m, n)\in T$. But $\{x(m', n')\}$ are unknown quantities if $(m', n')\in T'$. We want to predict $x(m', n')$, $(m', n')\in T'$, by the linear combination of the $\{x(m, n), (m, n)\in T\}$ and its limit in terms of square mean, such that its error of square mean is minimum.

In the present paper, linear predictions of three types have been discussed:

1° $T'=\{(m', 0), -\infty<m'<\infty\}$; $T=\{(m, n), -\infty<m<\infty, n\neq 0\}$.

2° $T'=\{(m', 0), m'\geqslant 0\}$; $T=\{(m, n), -\infty<m<\infty, n\neq 0, (m, 0), m<0\}$.

3° $T'=\{(0, 0)\}$; $T=\{(m, n), -\infty<m<\infty, n\leqslant 0\}-\{(0, 0)\}$.

The errors of linear prediction have been obtained respectively as follows:

1° $$d^2=\lim_{l\to\infty}\inf_{a_{m,n}^{(l)}} E\left|x(m, 0)-\sum_{m=-l}^{l}\sum_{\substack{n=-l\\ n\neq 0}}^{l} a_{m,n}^{(l)}x(m, n)\right|^2 =4\pi^2\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu}{\dfrac{dF(\lambda, \mu)}{dF(\lambda,\pi)d\mu}}\right]^{-1}dF(\lambda, \pi).$$

2° $$\sigma^2(1)=\lim_{l\to\infty}\inf_{b_{m,n}^{(l)}} E\left|x(0, 0)-\sum_{m=-l}^{l}\sum_{\substack{n=-l\\ n\neq 0}}^{l} b_{m,n}^{(l)}x(m, n)-\sum_{m=-l}^{-1} b_{m,0}^{(l)}x(m, 0)\right|^2 =2\pi\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log 4\pi^2\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}\right]^{-1}d\mu\right)^{-1}d\lambda\right\}.$$

3° $$\tilde{\sigma}^2=\lim_{l\to\infty}\inf_{c_{m,n}^{(l)}} E\left|x(0, 0)-\sum_{m=-l}^{l}\sum_{n=-l}^{-1} c_{m,n}^{(l)}x(m, n)-\sum_{m=-l}^{l} c_{m,0}^{(l)}x(m, 0)\right|^2 =4\pi^2\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\frac{dF(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu}d\mu\right\}d\lambda\right]^{-1}.$$