数 学 年 刊
2 (1) 1981

紧邻速度函数的拟可逆测度

丁 万 鼎　　陈 木 法
（安徽师范大学）　（北京师范大学）

设 S 是一可数的位置集，S 的每个位置上有一个实体(如一个粒子)，它有正的或负的自旋，分别记为 1 和 0. $X=\{0, 1\}^S$ 表示系统的自旋的一切组态. 以 X 为相空间的 Markov 过程描述自旋组态的演化，在 [1] 中讨论了一类这样的过程——自旋变相过程——的存在及唯一性和可逆测度等问题. 本文中，我们引进速度函数的拟可逆测度概念，用 [3] 中的场论思想讨论紧邻速度函数的拟可逆测度. 在 §2 中，我们证明紧邻速度函数的拟可逆测度是 Markov 随机场，并给出拟可逆测度存在的充分必要条件；§3 中给出拟可逆测度的唯一性定理，讨论了由速度函数来确定拟可逆测度问题；在 §4 中，我们证明如果速度函数一致有界，而且 S 的每一点有一致有界的边界，则速度函数的拟可逆测度是以其为速度函数的自旋变相过程的可逆测度，从而紧邻速度函数的拟可逆测度与自旋变相过程的可逆测度概念等价. 于是我们得到有紧邻速度函数的自旋变相过程的可逆测度存在的充分必要条件和唯一的充分必要条件. 特别地，如果速度函数是由一个紧邻势给出的，则拟可逆测度存在，从而我们的结果可以应用于解决紧邻势的 Gibbs 态的唯一性问题.

§1. 定义及引理

先引进下列记号：$A\subset S$, $X(A)\triangleq\{0, 1\}^A$，在 $X(A)$ 上赋乘积拓扑，$\mathscr{B}^0(A)$ 表 $X(A)$ 上的 Borel-σ 域，$\mathscr{B}(A)=\mathscr{B}^0(A)\times X(S-A)$，特别地，$\mathscr{B}\triangleq\mathscr{B}(S)$，而见 $\mathscr{B}(A)$ 是 $\mathscr{B}$ 的子 σ-域. $\mathbf{P}(X)$ 表 $(X, \mathscr{B})$ 上概率测度全体，$\mathfrak{P}_f(S)$ 表 S 的一切有限子集之集. $\forall x\in X$，x 在 $X(A)$ 上的投影记为 x_A; $\forall x\in X$, $u\in S$, 定义 ${}_ux\in X$: ${}_ux(v)=\begin{cases}x(v), & v\neq u,\\ 1-x(u), & v=u,\end{cases}$ $\mathscr{C}(X)$ 表 X 上的连续函数全体，范数 $\|f\|=\sup\limits_{x\in X}|f(x)|$.

给定一列非负函数 $c(u, \cdot)\in\mathscr{C}(X)$, $u\in S$, 定义算子 Ω: $\mathscr{D}(\Omega)\subset\mathscr{C}(X)\to\mathscr{C}(X)$

$$\Omega f(x)=\sum_{u\in S}c(u, x)\Delta_u f(x), \quad \forall f\in\mathscr{D}(\Omega). \tag{1.1}$$

其中 $\Delta_u f(x)=f({}_ux)-f(x)$. 如果 Ω 生成唯一的 Markov 半群 $S(t)$, $t\geqslant0$, 它唯一地决定强 Markov 过程 $(\eta_t, t\geqslant0)$，称 $(\eta_t, t\geqslant0)$ 为以 $c(u, \cdot)$, $u\in S$ 为速度函数的自旋变相过程. 这里我们约定，具有同一 Markov 半群的 Markov 过程不加区别. 为叙述方便，以 $c(u, \cdot)$, $u\in S$ 为速度函数的自旋变相过程称为 $c(u, \cdot)$, $u\in S$ 相应的过程. [1] 给出自

本文 1979 年 12 月 10 日收到.

旋变相过程的可逆测度定义如下：$\mu\in\mathbf{P}(X)$ 称为自旋变相过程 $(\eta_t,\ t\geqslant 0)$ 的可逆测度，如果 $\forall f,\ g\in\mathscr{D}(\Omega)$，

$$\int f\Omega g\,d\mu=\int g\Omega f\,d\mu, \tag{1.2}$$

可逆测度的全体记为 $\mathscr{R}$. $\mu\in\mathbf{P}(X)$ 称为过程 $(\eta_t,\ t\geqslant 0)$ 的不变测度，如果 $\forall f\in\mathscr{D}(\Omega)$，

$$\int\Omega f\,d\mu=0. \tag{1.3}$$

定义 1.1 设 $c(u,\ \cdot)\in\mathscr{C}(X)$，$c(u,\ \cdot)\geqslant 0$，$u\in S$ 是给定的速度函数. $\mu\in\mathbf{P}(X)$ 称为速度函数 $c(u,\ \cdot)$，$u\in S$ 的拟可逆测度（简称拟可逆测度），如果

$$\forall f\in\mathscr{C}(X),\quad u\in S,\ \int c(u,\ x)\Delta_u f(x)\,d\mu(x)=0. \tag{1.4}$$

可以证明[1]，当过程存在时，如果 μ 是可逆测度，则 μ 是拟可逆测度；而拟可逆测度是不变测度.

引理 1.1 设 $T_n\in\mathfrak{P}_f(S)$，$n\geqslant 1$，$T_n\uparrow S$，令 $\mathfrak{U}^0=\{F=\{y\}\times X(S-T_n),\ \forall y\in X(T_n),\ n\geqslant 1\}$. 设 $L\{I_F\colon F\in\mathfrak{U}^0\}$ 表 $\{I_F\colon F\in\mathfrak{U}^0\}$ 生成的线性流形，$\mathscr{F}$ 表 $\mathscr{C}(X)$ 中只与自变量的有限个坐标有关的函数（称为柱函数）全体，则 $\mathscr{F}=L\{I_F\colon F\in\mathfrak{U}^0\}$.

证 $\mathscr{F}_{T_n}=L\{I_F\colon F=\{y\}\times X(S-T_n),\ y\in X(T_n)\}$，这里 $\mathscr{F}_{T_n}$ 是只与 $u\in T_n$ 坐标有关的柱函数全体. 而 $\mathscr{F}=\bigcup\limits_{n\geqslant 1}\mathscr{F}_{T_n}$. 由此可得结论.

引理 1.2 设 $\mathfrak{U}=\{F=\{y\}\times X(S-T),\ \forall y\in X(T),\ T\in\mathfrak{P}_f(S)\}$，$\mathfrak{U}^0$ 同引理 1.1 所设. 如果 $\mu\in\mathbf{P}(X)$ 是拟可逆测度，则 $\forall F\in\mathfrak{U}$，

$$\int c(u,\ x)I_F(x)\,d\mu(x)=\int c(u,\ x)I_F({}_ux)\,d\mu(x),\quad u\in S. \tag{1.5}$$

反之，如果 $\mu\in\mathbf{P}(X)$，对任意 $F\in\mathfrak{U}^0$，(1.5) 成立，则 μ 是拟可逆测度.

证 前一结论显然. 反之，如果 (1.5) 对 $F\in\mathfrak{U}^0$ 成立，由引理 1.1 知，(1.4) 对一切 $f\in\mathscr{F}$ 成立. 再注意到 $\mathscr{F}$ 在 $\mathscr{C}(X)$ 中稠可知 (1.4) 对一切 $f\in\mathscr{C}(X)$ 成立.

现在进一步假定 S 上有一个图结构，$\forall A\subset S$，∂A 表示 A 的边界，特别地，$\partial u\triangleq\partial\{u\}$. 并假定对 $\forall u\in S$，∂u 是有限集；且存在 $T_n\in\mathfrak{P}_f(S)$，$T_n\uparrow S$，$T_n\supset T_{n-1}\cup\partial T_{n-1}$，$n\geqslant 1$.

在 [2] 中引进 Markov 随机场的概念：$\mu\in\mathbf{P}(X)$ 称为 Markov 随机场，如果

$$\forall F\in\mathfrak{U},\quad \mu(F)>0, \tag{1.6}$$

且对任给的 $a\in X$ 及 $\forall T,\ \hat{T}\in\mathfrak{P}_f(S)$，$\hat{T}\supset T\cup\partial T$，有

$$\begin{aligned}&\mu([x\colon x(u)=a(u),\ u\in T]\mid[x\colon x(v)=a(v),\ v\in\hat{T}-T])\\&\quad=\mu([x\colon x(u)=a(u),\ u\in T]\mid[x\colon x(v)=a(v),\ v\in\partial T]).\end{aligned} \tag{1.7}$$

本文的基本假设是：

$$\text{（紧邻性）}\ \forall u\in S,\ c(u,\ \cdot)>0\ \text{且}\ c(u,\ \cdot)\ \text{关于}\ \mathscr{B}(u\cup\partial u)\ \text{可测}. \tag{1.8}$$

由 (1.8) 知 $c(u,\cdot)\in\mathscr{F}\subset\mathscr{C}(X)$. 今后为记号简单起见，当 $T\supset u\cup\partial u$ 时，因为 $\forall y\in X(T)$，$z\in X(S-T)$，$c(u,\ y\times z)$ 与 z 无关，故简记 $c(u,\ y\times z)=c(u,\ y)$.

引理 1.3 设速度函数 $c(u,\ \cdot)$，$u\in S$ 满足 (1.8)，$T_n\in\mathfrak{P}_f(S)$，$n\geqslant 0$，$T_n\uparrow S$，且 $T_n\supset T_{n-1}\cup\partial T_{n-1}$，则 $\mu\in\mathbf{P}(X)$ 是 $c(u,\ \cdot)$，$u\in S$ 的拟可逆测度的充分必要条件是 $\forall n\geqslant 1$，

$$\forall y \in X(T_n),\ \forall u \in T_{n-1},\ c(u,\ y)\mu_n(y) = c(u,\ {}_uy)\mu_n({}_uy). \tag{1.9}$$

其中 μ_n 是 μ 在 $X(T_n)$ 上的投影，即 $\mu_n(y) = \mu(\{y\} \times X(S-T_n))$.

证　必要性．在(1.5)中取 $F = \{y\} \times X(S-T_n)$, $u \in T_{n-1}$, 由 $c(u,\ \cdot)$ 的紧邻性即得(1.9).

充分性．设(1.9)成立，证(1.5)对 $F \in \mathfrak{U}^0$ 成立．设 $F = \{y\} \times X(S-T_n)$, $y \in X(T_n)$. 当 $u \bar{\in} T_n$ 时(1.5)自然成立；当 $u \in T_{n-1}$ 时，(1.5) 即 (1.9)．最后当 $u \in T_n - T_{n-1}$ 时，由(1.9), $\forall z \in X(T_{n+1} - T_n)$, $c(u,\ y \times z)\mu_{n+1}(y \times z) = c(u,\ {}_uy \times z)\mu_{n+1}({}_uy \times z)$, 即

$$\int_{\{y \times z\} \times X(S-T_{n+1})} c(u,\ x)\, d\mu(x) = \int_{\{{}_uy \times z\} \times X(S-T_{n+1})} c(u,\ x)\, d\mu(x).$$

对 $z \in X(T_{n+1} - T_n)$ 求和，可得(1.5)．由引理 1.2 知 μ 是拟可逆测度.

§2. 紧邻速度函数的拟可逆测度的性质及存在定理

定理 2.1　如果速度函数 $c(u,\ \cdot)$, $u \in \mathring{S}$ 满足 (1.8), 则拟可逆测度 μ 是 Markov 随机场.

证　首先由 (1.5) 及 $c(u,\ \cdot)$ 的紧邻性不难验证 $\forall T,\ \hat{T} \in \mathfrak{P}_f(S)$, $\hat{T} \supset T \cup \partial T$, $\forall y \in X(T)$, $z \in X(\hat{T} - T)$ 及 $u \in T$,

$$c(u,\ y \times z)\mu_{\hat{T}}(y \times z) = c(u,\ {}_uy \times z)\mu_{\hat{T}}({}_uy \times z), \tag{2.1}$$

其中 $\mu_{\hat{T}}$ 表 μ 在 $X(\hat{T})$ 上的投影.

现在来验证 (1.6), (1.7). 由 (2.1), 用反证法可得 (1.6). 再证 (1.7), 设 T, $\tilde{T} \in \mathfrak{P}_f(S)$, $\tilde{T} \supset T \cup \partial T$, $\forall y \in X(T)$, $z \in X(\partial T)$, $w \in X(\tilde{T} - (T \cup \partial T))$ 及 $u \in T$, 由(2.1)可得,

$$\frac{\mu_{\tilde{T}}(y \times z \times w)}{\mu_{\tilde{T}}({}_uy \times z \times w)} = \frac{c(u,\ {}_uy \times z)}{c(u,\ y \times z)}. \tag{2.2}$$

记 $\theta_T \in X(T)$, $\theta_T(u) = 0$, $\forall u \in T$. 对于任意 $y \in X(T)$, $y \neq \theta_T$, 则存在 $u_1, u_2, \cdots, u_n \in T$, $u_i \neq u_j$, $i \neq j$, 使得

$$y^{(0)} = \theta_T,\ y^{(1)} = {}_{u_1}y^{(0)},\ y^{(2)} = {}_{u_2}y^{(1)},\ \cdots,\ y = y^{(n)} = {}_{u_n}y^{(n-1)}. \tag{2.3}$$

令
$$\hat{c}(\theta_T \times z,\ y \times z) = c(u_1,\ \theta_T \times z)c(u_2,\ y^{(1)} \times z)\cdots c(u_n,\ y^{(n-1)} \times z),$$
$$\hat{c}(y \times z,\ \theta_T \times z) = c(u_n,\ y \times z)c(u_{n-1},\ y^{(n-1)} \times z)\cdots c(u_1,\ y^{(1)} \times z). \tag{2.4}$$

由(2.2)可得，
$$\frac{\mu_{\tilde{T}}(y \times z \times w)}{\mu_{\tilde{T}}(\theta_T \times z \times w)} = \frac{\hat{c}(\theta_T \times z,\ y \times z)}{\hat{c}(y \times z,\ \theta_T \times z)},$$

即有

$$\mu_{\tilde{T}}(y \times z \times w) = \frac{\hat{c}(\theta_T \times z,\ y \times z)}{\hat{c}(y \times z,\ \theta_T \times z)}\mu_{\tilde{T}}(\theta_T \times z \times w). \tag{2.5}$$

从而
$$\mu_{\tilde{T}}(X(T) \times \{z \times w\}) = \Big(\sum_{y \in X(T)} \frac{\hat{c}(\theta_T \times z,\ y \times z)}{\hat{c}(y \times z,\ \theta_T \times z)}\Big)\mu_{\tilde{T}}(\theta_T \times z \times w),$$

这里及以下均约定，$\hat{c}(\theta_T \times z,\ \theta_T \times z) = 1$. 于是

$$\begin{aligned}&\mu([x:\ x(u) = y(u),\ u \in T] \mid [x:\ x(v) = z(v),\ v \in \partial T,\ x(v) = w(v),\ v \in \tilde{T} - (T \cup \partial T)])\\ &= \frac{\mu_{\tilde{T}}(y \times z \times w)}{\mu_{\tilde{T}}(X(T) \times \{z \times w\})} = \frac{\hat{c}(\theta_T \times z,\ y \times z)/\hat{c}(y \times z,\ \theta_T \times z)}{\sum\limits_{y' \in X(T)} \hat{c}(\theta_T \times z,\ y' \times z)/\hat{c}(y' \times z,\ \theta_T \times z)}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

注意到(2.6)的右方与 w 无关，故同上方法可得(记 $\hat{T}=T\cup\partial T$)

$$\mu([x\colon x(u)=y(u),\ u\in T]\,|\,[x\colon x(v)=z(v),\ v\in\partial T])$$
$$=\frac{\mu_{\hat{T}}(y\times z)}{\mu_{\hat{T}}(X(T)\times\{z\})}=\frac{\hat{c}(\theta_T\times z,\ y\times z)/\hat{c}(y\times z,\ \theta_T\times z)}{\sum\limits_{y'\in X(T)}\hat{c}(\theta_T\times z,\ y'\times z)/\hat{c}(y'\times z,\ \theta_T\times z)}.$$

由此及(2.6)可知(1.7)成立.

定理 2.2　设速度函数 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 满足(1.8)，则其拟可逆测度存在的充分必要条件是

$$\forall u,\ v\in S\ \text{及}\ \forall x\in X,$$
$$c(u,\ x)\,c(v,\ {}_ux)\,c(u,\ {}_{vu}x)\,c(v,\ {}_vx)=c(v,\ x)\,c(u,\ {}_vx)\,c(v,\ {}_{uv}x)\,c(u,\ {}_ux).\tag{2.7}$$

其中 ${}_{vu}x={}_v({}_ux)$ (以下同).

证　必要性：设 μ 为一拟可逆测度，对任意固定的 $u,\ v\in S$ 及 $x\in X$，若 $u=v$，(2.7)自然成立. 若 $u\neq v$，任取 $T\in\mathfrak{P}_f(S)$ 使 $T\supset\{u,\ v\}$，令 $\hat{T}=T\cup\partial T$，由(2.1)可得

$$\frac{\mu_{\hat{T}}(x_{\hat{T}})}{\mu_{\hat{T}}({}_{vu}x_{\hat{T}})}=\frac{\mu_{\hat{T}}(x_{\hat{T}})}{\mu_{\hat{T}}({}_ux_{\hat{T}})}\cdot\frac{\mu_{\hat{T}}({}_ux_{\hat{T}})}{\mu_{\hat{T}}({}_{vu}x_{\hat{T}})}=\frac{c(u,\ {}_ux)}{c(u,\ x)}\cdot\frac{c(v,\ {}_{vu}x)}{c(v,\ {}_ux)}.$$

同样地，(注意到，$u\neq v$，有 ${}_{vu}x={}_{uv}x$)

$$\frac{\mu_{\hat{T}}(x_{\hat{T}})}{\mu_{\hat{T}}({}_{vu}x_{\hat{T}})}=\frac{\mu_{\hat{T}}(x_{\hat{T}})}{\mu_{\hat{T}}({}_vx_{\hat{T}})}\cdot\frac{\mu_{\hat{T}}({}_vx_{\hat{T}})}{\mu_{\hat{T}}({}_{vu}x_{\hat{T}})}=\frac{c(v,\ {}_vx)}{c(v,\ x)}\cdot\frac{c(u,\ {}_{uv}x)}{c(u,\ {}_vx)},$$

于是有

$$\frac{c(u,\ {}_ux)\,c(v,\ {}_{vu}x)}{c(u,\ x)\,c(v,\ {}_ux)}=\frac{c(v,\ {}_vx)\,c(u,\ {}_{uv}x)}{c(v,\ x)\,c(u,\ {}_vx)},\tag{2.8}$$

由此可得(2.7).

充分性：

i) 如果 $T,\ \tilde{T}\in\mathfrak{P}_f(S)$, $\tilde{T}\supset T\cup\partial T$. $\hat{c}(\theta_T\times z,\ y\times z)$, $\hat{c}(y\times z,\ \theta_T\times z)$ 由(2.3)和(2.4)定义，则 $L\triangleq\hat{c}(\theta_T\times z,\ y\times z)/\hat{c}(y\times z,\ \theta_T\times z)$ 与(2.3)中 $u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n$ 的次序无关. 即对 $u_1,\ \cdots,\ u_n$ 的任一排列 $v_1,\ \cdots,\ v_n$. (记 $\theta_T\times z=x^{(0)}$)，令

$$L'=\frac{c(v_1,\ x^{(0)})\,c(v_2,\ {}_{v_1}x^{(0)})\cdots c(v_n,\ {}_{v_{n-1}\cdots v_1}x^{(0)})}{c(v_1,\ {}_{v_1}x^{(0)})\,c(v_2,\ {}_{v_1v_2}x^{(0)})\cdots c(v_n,\ {}_{v_n\cdots v_1}x^{(0)})},$$

则 $L=L'$. 既然 $u_1,\ \cdots,\ u_n$ 的一个排列可由若干次对换生成，故只需对 $u_1,\ \cdots,\ u_n$ 的一个对换证明. 为叙述方便起见，不妨设 L' 是由 $u_n,\ u_2,\ \cdots,\ u_{n-1},\ u_1$ 定义的，即

$$L'=\frac{c(u_n,\ x^{(0)})\,c(u_2,\ {}_{u_n}x^{(0)})\cdots c(u_{n-1},\ {}_{u_{n-2}\cdots u_2u_n}x^{(0)})\,c(u_1,\ {}_{u_{n-1}\cdots u_2u_n}x^{(0)})}{c(u_n,\ {}_{u_n}x^{(0)})\,c(u_2,\ {}_{u_2u_n}x^{(0)})\cdots c(u_{n-1},\ {}_{u_{n-1}\cdots u_2u_n}x^{(0)})\,c(u_1,\ {}_{u_1u_{n-1}\cdots u_2u_n}x^{(0)})}.\tag{2.9}$$

由(2.7)可知，$\forall u,\ v\in T$, $u\neq v$，有

$$\forall x\in X,\quad\frac{c(u,\ x)\,c(v,\ {}_ux)}{c(u,\ {}_ux)\,c(v,\ {}_{vu}x)}=\frac{c(v,\ x)\,c(u,\ {}_vx)}{c(v,\ {}_vx)\,c(u,\ {}_{uv}x)}.\tag{2.10}$$

对(2.9)的分子分母前二项应用(2.10)，即把 u_n 与 u_2 交换次序，然后，逐次自左向右进行同样的步骤，可得

$$L'=\frac{c(u_2,\ x^{(0)})\,c(u_3,\ {}_{u_2}x^{(0)})\cdots c(u_1,\ {}_{u_{n-1}\cdots u_2}x^{(0)})\,c(u_n,\ {}_{u_1u_{n-1}\cdots u_2}x^{(0)})}{c(u_2,\ {}_{u_2}x^{(0)})\,c(u_3,\ {}_{u_3u_2}x^{(0)})\cdots c(u_1,\ {}_{u_1u_{n-1}\cdots u_2}x^{(0)})\,c(u_n,\ {}_{u_nu_1\cdots u_2}x^{(0)})}.\tag{2.11}$$

但 ${}_{u_1u_{n-1}\cdots u_2}x^{(0)}={}_{u_{n-1}\cdots u_1}x^{(0)}$, ${}_{u_nu_1u_{n-1}\cdots u_2}x^{(0)}={}_{u_n\cdots u_1}x^{(0)}$，故有

$$L'=\frac{c(u_2,\ x^{(0)})\,c(u_3,\ {}_{u_2}x^{(0)})\cdots c(u_1,\ {}_{u_{n-1}\cdots u_2}x^{(0)})\,c(u_n,\ {}_{u_{n-1}\cdots u_1}x^{(0)})}{c(u_2,\ {}_{u_2}x^{(0)})\,c(u_3,\ {}_{u_3u_2}x^{(0)})\cdots c(u_1,\ {}_{u_1u_{n-1}\cdots u_2}x^{(0)})\,c(u_n,\ {}_{u_n\cdots u_1}x^{(0)})}. \tag{2.12}$$

对(2.11)的分子分母的前 $n-1$ 项，即由序列 $u_2,\ \cdots,\ u_{n-1},\ u_1$ 定义的比式，实施自右向左的上述步骤，可得 $L'=L$.

ii) $\forall T\in\mathfrak{P}_f(S),\ y\in X(T),\ z\in X(S-T)$，令

$$f^T(y,\ z)=\frac{\hat{c}(\theta_T\times z_{\partial T},\ y\times z_{\partial T})}{\hat{c}(y\times z_{\partial T},\ \theta_T\times z_{\partial T})}\Big/K(T,z), \tag{2.13}$$

其中 $K(T,\ z)=\sum_{y'\in X(T)}\hat{c}(\theta_T\times z_{\partial T},\ y'\times z_{\partial T})/\hat{c}(y'\times z_{\partial T},\ \theta_T\times z_{\partial T})$. 则 $\{f^T\}_{T\in\mathfrak{P}_f(S)}$ 具有下列性质：

$$f^T(y,\ z)>0\ \text{是}\ y\times z\ \text{的连续函数}. \tag{2.14}$$

$$\text{任意固定}\ z\in X(S-T),\ f^T(\cdot,\ z)\ \text{是}\ X(T)\ \text{上的概率测度}. \tag{2.15}$$

$\forall T'\subset T\in\mathfrak{P}_f(S),\ y\in X(T),\ z\in X(S-T)$，有

$$f^T(y,\ z)=f^{T'}(y_{T'},\ y_{T-T'}\times z)\sum_{y'\in X(T')}f^T(y'\times y_{T-T'},\ z). \tag{2.16}$$

事实上，由 $c(u,\ \cdot),\ u\in S$ 的连续性及 f^T 的定义立知(2.14)，(2.15)成立；再证(2.16)，只需注意，根据 i)，(2.13)右方分式中出现的比都与(2.3)中 $u_1,\ \cdots,\ u_n$ 的次序无关. 简单计算可得(2.16).

iii) 根据[2]第五章命题5.2，存在 $\mu\in\mathbf{P}(X)$，使得

$$\forall T\in\mathfrak{P}_f(S),\ y\in X(T),\ \mu^y_{S-T}=f^T(y,\ \cdot)\mu_{S-T}, \tag{2.17}$$

其中 μ^y_{S-T} 是 $\mathscr{B}^0(S-T)$ 上的测度：$\forall F\in\mathscr{B}^0(S-T),\ \mu^y_{S-T}(F)=\mu(\{y\}\times F)$；$f^T(y,\ \cdot)\mu_{S-T}$ 也是定义在 $\mathscr{B}^0(S-T)$ 上的测度：

$$\forall F\in\mathscr{B}^0(S-T),\ f^T(y,\ \cdot)\mu_{S-T}(F)=\int_F f^T(y,\ z)d\mu_{S-T}(z). \tag{2.18}$$

根据(2.13)，当 $z,\ z'\in X(S-T),\ z_{\partial T}=z'_{\partial T}$ 时，$f^T(y,\ z)=f^T(y,\ z')$. 由(2.17)，对 $\tilde{T}\in\mathfrak{P}_f(S),\ \tilde{T}\supset T\cup\partial T,\ w\in X(\tilde{T}-T)$
有

$$\mu(\{y\times w\}\times X(S-\tilde{T}))=f^T(y,\ w\times z_{S-\tilde{T}})\mu(\{w\}\times X(S-(\tilde{T}-T))), \tag{2.19}$$

其中 $z_{S-\tilde{T}}\in X(S-\tilde{T})$ 可以任意选取. 由此，用[2]中命题4.1的证明方法可证，$\forall F\in\mathfrak{U}$，$\mu(F)>0$.

iv) 再证满足(2.17)的概率测度是拟可逆测度. 根据引理1.3，只需对任意取定的序列 $T_n,n\geqslant 0(T_n\in\mathfrak{P}_f(S),T_n\uparrow S,\ T_n\supset T_{n-1}\cup\partial T_{n-1},\ n\geqslant 2)$. 证明(1.9)成立. 事实上，$\forall y\in X(T_n),\ u\in T_{n-1}$，由(2.19)，有

$$\begin{aligned}\frac{\mu_n(y)}{\mu_n({}_uy)}&=\frac{f^{T_{n-1}}(y_{T_{n-1}},\ y_{T_n-T_{n-1}}\times z_{S-T_n})}{f^{T_{n-1}}({}_uy_{T_{n-1}},\ y_{T_n-T_{n-1}}\times z_{S-T_n})}\\&=\frac{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times y_{T_n-T_{n-1}},\ y_{T_n})}{\hat{c}(y_{T_n},\ \theta_{T_{n-1}}\times y_{T_n-T_{n-1}})}\Big/\frac{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times y_{T_n-T_{n-1}},\ {}_uy_{T_n})}{\hat{c}({}_uy_{T_n},\ \theta_{T_{n-1}}\times y_{T_n-T_{n-1}})}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

若 $y(u)=0$，则定义(2.20)右方分子比的序列 $u_1,\ \cdots,\ u_m$ 不包含 u，根据 i)，定义(2.20)右方分母的序列可选为 $u_1,\ \cdots u_m,\ u$，于是

$$\frac{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times y_{T_n-T_{n-1}},\ y_{T_n})}{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times y_{T_n-T_{n-1}},\ {}_uy_{T_n})}=\frac{1}{c(u,\ y)},\quad \frac{\hat{c}(y_{T_n},\ \theta_{T_{n-1}}\times y_{T_n-T_{n-1}})}{\hat{c}({}_uy_{T_n},\ \theta_{T_{n-1}}\times y_{T_n-T_{n-1}})}=\frac{1}{c(u,\ {}_uy)},$$

故 $\dfrac{\mu_n(y)}{\mu_n({}_uy)}=\dfrac{c(u,\ {}_uy)}{c(u,\ y)}$, 即(1.9)成立. 类似地可证当 $y(u)=1$ 时, (1.9)成立.

§3. 唯一性及拟可逆测度的确定

本节中, 我们假定存在 $T_n\in\mathfrak{P}_f(S)$, $n\geqslant 0$, $T_n\uparrow S$, 且 $T_n=T_{n-1}\cup\partial T_{n-1}$, $n\geqslant 1$.

我们考虑无穷方程组

$$x_{n,z}=\sum_{w\in X(\partial T_n)} a_w^{(n,z)}x_{n+1,w},\quad z\in X(\partial T_{n-1}),\ n\geqslant 1, \tag{3.1}$$

其中系数 $a_w^{(n,z)}>0$. 显然 $x_{n,z}\equiv 0$, $n\geqslant 1$, $z\in X(\partial T_{n-1})$ 是 (3.1) 的解, 称为平凡解. 我们感兴趣的是 (3.1) 的正解, 即 $x_{n,z}>0$, $n\geqslant 1$, $z\in X(\partial T_{n-1})$. 易见如果 $x_{n,z}^0$ 是 (3.1) 的正解, 则 $\forall\alpha>0$, $\{\alpha x_{n,z}^0\}$ 也是(3.1)的正解. 设 $\{x_{n,z}^{(1)}\}$, $\{x_{n,z}^{(2)}\}$, $\cdots$, $\{x_{n,z}^{(k)}\}$ 是(3.1)的 k 个正解, 称它们是线性独立的, 如果其中的任一个不能用其余的解线性表示. 称(3.1)的正解是唯一的. 如果它只有一个独立的正解.

引理3.1 设 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 满足 (1.8), (2.7), 则

$$x_{n,z}=\sum_{w\in X(\partial T_n)}\frac{\hat{c}(\theta_{T_n}\times w,\theta_{T_{n-1}}\times z\times w)}{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z\times w,\ \theta_{T_n}\times w)}x_{n+1,w},\quad z\in X(\partial T_{n-1}),\ n\geqslant 1 \tag{3.2}$$

有正解.

证 根据定理2.2, 存在 $\mu\in\mathbf{P}(X)$ 为 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 的拟可逆测度, 容易验证 $x_{n,z}\triangleq\mu_n(\theta_{T_{n-1}}\times z)$, $n\geqslant 1$, $z\in X(\partial T_{n-1})$ 是 (3.2) 的一个正解.

引理3.2 设 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 满足条件(1.8), (2.7), 如果方程组(3.2)有正解 $\{x_{n,z}^0\}$, 令

$$\mu_n(y\times z)=Z_n^{-1}\frac{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z,\ y\times z)}{\hat{c}(y\times z,\ \theta_{T_{n-1}}\times z)}x_{n,z}^0,\quad\forall y\in X(T_{n-1}),\ z\in X(\partial T_{n-1}), \tag{3.3}$$

其中 $Z_n=\sum\limits_{y'\times z'\in X(T_n)}\dfrac{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z',\ y'\times z')}{\hat{c}(y'\times z',\ \theta_{T_{n-1}}\times z')}x_{n,z'}^0$, 则 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 1}$ 是相容的, 它唯一地决定 $(X,\ \mathscr{B})$ 上的概率测度 μ, 并且 μ 是拟可逆测度.

证 i) 相容性. 根据定理 2.2 的证明中 i) 的结果, 可得

$$\frac{\hat{c}(\theta_{T_n}\times w,\ y\times z\times w)}{\hat{c}(y\times z\times w,\ \theta_{T_n}\times w)}=\frac{\hat{c}(\theta_{T_n}\times w,\ \theta_{T_{n-1}}\times z\times w)}{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z\times w,\ \theta_{T_n}\times w)}\cdot\frac{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z,\ y\times z)}{\hat{c}(y\times z,\ \theta_{T_{n-1}}\times z)}, \tag{3.4}$$

再由 Z_n 的定义及 (3.4), (3.2) 可得

$$Z_{n+1}=Z_n,\quad n\geqslant 1. \tag{3.5}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{w\in X(\partial T_n)}\mu_{n+1}(y\times z\times w)&=Z_{n+1}^{-1}\sum_{w\in X(\partial T_n)}\frac{\hat{c}(\theta_{T_n}\times w,\ y\times z\times w)}{\hat{c}(y\times z\times w,\ \theta_{T_n}\times w)}x_{n+1,w}^0\\&=Z_{n+1}^{-1}\left(\sum_{w\in X(\partial T_n)}\frac{\hat{c}(\theta_{T_n}\times w,\ \theta_{T_{n-1}}\times z\times w)}{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z\times w,\ \theta_{T_n}\times w)}x_{n+1,w}^0\right)\frac{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z,\ y\times z)}{\hat{c}(y\times z,\ \theta_{T_{n-1}}\times z)}\\&=Z_n^{-1}\frac{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z,\ y\times z)}{\hat{c}(y\times z,\ \theta_{T_{n-1}}\times z)}x_{n,z}^0=\mu_n(y\times z).\end{aligned}$$

根据测度的扩张定理知, 存在 X 上的唯一概率测度, 它在 $X(T_n)$ 上的投影是 μ_n.

ii) 证 μ 是拟可逆的．由(3.3)，$\forall y\in X(T_{n-1})$，$z\in X(\partial T_{n-1})$ 及 $u\in T_{n-1}$ 有

$$\frac{\mu_n(y\times z)}{\mu_n({}_uy\times z)}=\frac{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z,\ y\times z)}{\hat{c}(y\times z,\ \theta_{T_{n-1}}\times z)}\Big/\frac{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z,\ {}_uy\times z)}{\hat{c}({}_uy\times z,\ \theta_{T_{n-1}}\times z)}.$$

用定理 2.2 的证明中所使用的方法可得

$$\frac{\mu_n(y\times z)}{\mu_n({}_uy\times z)}=\frac{c(u,\ {}_uy\times z)}{c(u,\ y\times z)},$$

于是由引理 1.3 知，μ 是拟可逆测度．

定理 3.1 设 $c(u,\ \cdot)$ 满足条件(1.8)和(2.7)，则拟可逆测度唯一的充分必要条件是方程组(3.2)有唯一正解．

证　必要性．如果(3.2)有两个正解 $x_{n,z}^{(i)}(i=1,\ 2)$，$z\in X(\partial T_{n-1})$，$n\geqslant1$．由拟可逆测度的唯一性及引理 3.2 必有

$$A_1^{-1}x_{n,z}^{(1)}=A_2^{-1}x_{n,z}^{(2)},\quad z\in X(\partial T_{n-1}),\quad n\geqslant1,$$

其中 $A_i=Z_n^{(i)}>0$((由 3.5)知它与 n 无关)故有

$$x_{n,z}^{(1)}=\frac{A_1}{A_2}x_{n,z}^{(2)},\quad z\in X(\partial T_{n-1}),\ n\geqslant1,$$

即方程组(3.2)的正解是唯一的．

充分性．如果 μ 是 $c(u,\cdot)$，$u\in S$ 的拟可逆测度，由引理 3.1 的证明知，$x_{n,z}\triangleq u_n(\theta_{T_{n-1}}\times z)$，$z\in X(\partial T_{n-1})$，$n\geqslant1$ 是(3.2)的一个正解．若 $\mu^{(1)}$，$\mu^{(2)}$ 都是 $c(u,\ \cdot)$，$u\in S$ 的拟可逆测度，由(3.2)的正解是唯一的，知存在 $\alpha>0$ 使得 $\mu_n^{(1)}(\theta_{T_{n-1}}\times z)=\alpha\mu_n^{(2)}(\theta_{T_{n-1}}\times z)$．用论证(2.5)的方法可证．$\mu_n^{(1)}(y\times z)=\alpha\mu_n^{(2)}(y\times z)$，对一切 $y\in X(T_{n-1})$ 成立．由此及 $\mu^{(i)}\in\mathbf{P}(X)$，立知 $\alpha=1$，从而 $\mu^{(1)}=\mu^{(2)}$，即拟可逆测度是唯一的．

我们指出，由引 3.2 理和定理 3.1 知，如果速度函数 $c(u,\cdot)$，$u\in S$ 满足(1.8)及(2.7)，则其拟可逆测度与方程组(3.2)的独立正解是一一对应的，进而可由解方程组(3.2)，由(3.3)来确定拟可逆测度．如果能求得(3.2)的全部独立正解，则拟可逆测度也就能全部计算出来了．下面我们讨论一些特殊情形，拟可逆测度的确定．

例 1　设 $c(u,\ x)=c(u)>0$，显然 $c(u,\ \cdot)$ 满足条件(1.8)，(2.7)，且 $\forall T_n$，$\forall z\in X(\partial T_{n-1})$，$w\in X(\partial T_n)$ 有

$$\frac{\hat{c}(\theta_{T_n}\times w,\ \theta_{T_{n-1}}\times z\times w)}{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z\times w,\ \theta_{T_n}\times w)}\equiv1,$$

于是，(3.2)变为

$$x_{n,z}=\sum_{w\in X(\partial T_n)}x_{n+1,w},\quad z\in X(\partial T_{n-1}),\ n\geqslant1,\tag{3.6}$$

任取 $x_{1,z_1}=\alpha>0$，$z_1\in X(\partial T_0)$，由(3.6)解得

$$x_{n,z}=\frac{1}{2^{|T_n-T|}}\alpha,\quad n\geqslant1,\ z\in X(\partial T_{n-1}).$$

它是方程的唯一正解．容易验证

$$\mu_n(y\times z)=Z_n^{-1}\frac{1}{2^{|T_n-T_1|}}\alpha=\frac{1}{2^{|T_n|}},\quad\forall y\times z\in X(T_n),\ n\geqslant1,$$

由此可见，μ 是乘积测度；$\mu(\{x;\ x(u)=1\})=\frac{1}{2}$，$u\in S$．

例 2　设 $c(u,\ x)$ 只与 $x(u)$ 有关，不妨记 $c(u,\ x)$ 为 $c(u,\ x(u))$，容易验证 $c(u,\ \cdot)$ 满

足(1.8)和(2.7)且

$$\frac{\hat{c}(\theta_{T_n}\times w,\ \theta_{T_{n-1}}\times z\times w)}{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z\times w,\ \theta_{T_n}\times w)}=\frac{\hat{c}(\theta_{T_n},\ \theta_{T_{n-1}}\times z)}{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z,\ \theta_{T_n})},\quad \forall z\in X(\partial T_{n-1}),\ w\in X(\partial T_n).$$

于是方程组(3.2)化为

$$x_{n,z}=\frac{\hat{c}(\theta_{T_n},\ \theta_{T_{n-1}}\times z)}{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z,\ \theta_{T_n})}\sum_{w\in X(\partial T_n)}x_{n+1,w},\quad z\in X(\partial T_{n-1}),\ n\geqslant 1,\tag{3.7}$$

任取 $x_{1,\theta_{\partial T_0}}=\alpha>0$, 可得(3.7)的解为

$$x_{1,z_1}=\frac{\hat{c}(\theta_{T_1},\ \theta_{T_0}\times z_1)}{\hat{c}(\theta_{T_0}\times z_1,\ \theta_{T_1})}\alpha,\quad z_1\in X(\partial T_0),$$

$$x_{n,z_n}=\frac{\hat{c}(\theta_{T_n},\ \theta_{T_{n-1}}\times z_n)}{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z_n,\ \theta_{T_n})}\alpha\Big/\Sigma_2\cdots\Sigma_n,\quad z_n\in X(\partial T_{n-1}),$$

其中
$$\Sigma_i=\sum_{z_i\in X(\partial T_{i-1})}\frac{\hat{c}(\theta_{T_i},\ \theta_{T_{i-1}}\times z_i)}{\hat{c}(\theta_{T_{i-1}}\times z_n,\ \theta_{T_i})},\quad i=2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ n\geqslant 2.$$

显然这是方程(3.7)的唯一解. 由(3.3)简单计算可知,

$$\forall y\in X(T_n),\quad \mu_n(y)=\prod_{u\in T_n}\frac{{}_uy(u)\,c(u,\ 1)+y(u)\,c(u,\ 0)}{c(u,\ 1)+c(u,\ 0)},\tag{3.8}$$

此表明 μ 也是乘积测度.

§4. 自旋变相过程的可逆测度

在本节中我们进一步假定

$$\|c(u,\ \cdot)\|\leqslant M,\ \forall u\in S,\quad 其中\ M\ 为一常数.\tag{4.1}$$

$$\forall u\in S,\ |u\cup\partial u|\leqslant N,\quad 其中\ N\ 为一常数.\tag{4.2}$$

在(1.8), 及(4.1), (4.2)条件下, $\forall u\in S$ 有

$$\|c(u,\ \cdot)\|\triangleq\sum_{v\in S}\|\Delta_v c(u,\ \cdot)\|=\sum_{v\in u\cup\partial u}\|\Delta_v c(u,\ \cdot)\|\leqslant 2MN<\infty,$$

可见 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 满足[1]中定理1.2.5的存在及唯一条件, 故以 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 为速度函数的自旋变相过程存在且唯一.

引理4.1 设 $T_n\in\mathfrak{P}_f(S)$, $n\geqslant 0$, $T_n\uparrow S$, $T_n\supset T_{n-1}\cup\partial T_{n-1}$, $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 满足(1.8), (2.7), (4.1), S 上的图结构满足(4.2). $\mathfrak{U}^0$ 同引理1.1所设. 如果 $\mu\in\mathbf{P}(X)$ 是拟可逆测度, 则 $\forall A,\ B\in\mathfrak{U}^0$, 有

$$\int I_A\Omega I_B d\mu=\int I_B\Omega I_A d\mu.\tag{4.3}$$

其中 Ω 由(1.1)定义.

证 设 $A=\{y\}\times X(S-T_n)$, $B=\{z\}\times X(S-T_m)$. $y\in X(T_n)$, $z\in X(T_m)$ 为确定起见不妨设 $n\geqslant m$. 由(1.1)可得

$$\Omega I_A(x)=\begin{cases}-\sum\limits_{u\in T_n}c(u,\ x), & x\in\{y\}\times X(S-T_n),\\ c(v,\ x), & 存在\ v\in T_n,\ x\in\{{}_vy\}\times X(S-T_n),\\ 0, & 其它情形.\end{cases}\tag{4.4}$$

$$\Omega I_B(x)=\begin{cases}-\sum\limits_{u\in T_m}c(u,\ x), & x\in\{z\}\times X(S-T_m),\\ c(v,\ x), & \text{存在 } v\in T_m,\ x\in\{_vz\}\times X(S-T_m),\\ 0, & \text{其他情形}.\end{cases}\tag{4.5}$$

由(4.4), (4.5)可得

$$\int I_B\Omega I_A d\mu=\begin{cases}\sum\limits_{w\in X(T_{n+1}-T_n)}\left(-\sum\limits_{u\in T_n}c(u,\ y\times w)\right)\mu(\{y\times w\}\times X(S-T_{n+1}))\\ \quad+\sum\limits_{w\in X(T_{n+1}-T_n)}\sum\limits_{v\in T_n-T_m}c(v,\ _vy\times w)\mu(\{_vy\times w\}\\ \quad\times X(S-T_{n+1})), & \text{当 } y_{T_m}=z \text{ 时},\\ c(v,\ _vy)\mu(\{_vy\}\times X(S-T_n)), & \text{存在 } v\in T_m,\ _vy_{T_m}=z,\\ 0, & \text{其他情形}.\end{cases}\tag{4.6}$$

$$\int I_A(x)\,\Omega I_B(x)\,d\mu(x)=\begin{cases}\left(-\sum\limits_{u\in T_m}c(u,\ y)\right)\mu(\{y\}\times X(S-T_n)), & y_{T_m}=z,\\ c(v,\ y)\mu(\{y\}\times X(S-T_n)), & \text{存在 } v\in T_m,\ y_{T_m}={_vz},\\ 0, & \text{其他情形}.\end{cases}\tag{4.7}$$

由引理1.3, (1.9)成立. 比较(4.6)和(4.7)可知, 当 $y_{T_m}={_vz}$, (或 $_vy_{T_m}=z$,) $v\in T_m$ 时, (4.3)显然成立; 当 $y_{T_m}=z$ 时, 由(4.6)

$$\begin{aligned}&\int I_B(x)\,\Omega I_A(x)\,d\mu(x)\\ &=\sum_{w\in X(T_{n+1}-T_n)}\left(-\sum_{u\in T_n}c(u,\ y\times w)\right)\mu_{n+1}(y\times w)\\ &\quad+\sum_{w\in X(T_{n+1}-T_n)}\sum_{v\in T_n-T_m}c(v,\ _vy\times w)\,\mu_{n+1}(_vy\times w)\\ &=\sum_{w\in X(T_{n+1}-T_n)}\left(-\sum_{u\in T_m}c(u,\ y)\right)\mu_{n+1}(y\times w)\\ &\quad+\sum_{w\in X(T_{n+1}-T_n)}\left(-\sum_{v\in T_n-T_m}c(v,\ y\times w)\right)\mu_{n+1}(y\times w)\\ &\quad+\sum_{w\in X(T_{n+1}-T_n)}\left(\sum_{v\in T_n-T_m}c(v,\ _vy\times w)\right)\mu_{n+1}(_vy\times w)\\ &=\left(-\sum_{u\in T_m}c(u,\ y)\,\mu_n(y)\right.\\ &\quad+\sum_{w\in X(T_{n+1}-T_n)}\sum_{v\in T_n-T_m}\left[-c(v,\ y\times w)\,\mu_{n+1}(y\times w)+c(v,\ _vy\times w)\,\mu_{n+1}(_vy\times w)\right]\\ &=\left(-\sum_{u\in T_m}c(u,\ y)\right)\mu_n(y).\end{aligned}$$

故当 $y_{T_m}=z$ 时, (4.3)也成立. 其他情形 $\int I_A\Omega I_B d\mu=0=\int I_B\Omega I_A d\mu$.

定理4.1 如果速度函数 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 满足(1.8), (2.7), (4.1), S 上的图结构满足(4.2), 则 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 的拟可逆测度是相应过程的可逆测度.

证　根据在[1]式中的I第四章及 $\mathscr{F}$ 是(1.1)定义的 Ω 的核, 为了证 μ 满足(1.2), 只需证

$$\forall f,\ g\in\mathscr{F},\quad \int f\Omega g\,d\mu=\int g\Omega f\,d\mu.\tag{4.8}$$

此由引理1.1及引理4.1立明.

由定理4.1和定理2.2, 定理3.1可得

定理 4.2 (可逆测度的存在定理)设 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 满足(1.8), (4.1), S 上的图结构满足(4.2), 则以 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 为速度函数的自旋变相过程的可逆测度存在的充分必要条件是(2.7)成立.

定理 4.3 (可逆测度的唯一性定理)设 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 满足(1.8), (4.1)和(2.7), S 上的图结构满足(4.2)及§3的条件, 则以 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 为速度函数的自旋变相过程的可逆测度唯一的充分必要条件是方程组(3.2)有唯一的独立正解.

根据定理4.3, 在例1中, 如果 $c(u)\leqslant M$, $\forall u\in S$ 成立(M 为常数), 则 μ 是以 $c(u)$, $u\in S$ 为速度函数的自旋变相过程的唯一的可逆测度; 在例2中, 如果

$$\sup_u \max\{c(u,\ 0),\ c(u,\ 1)\}\leqslant M<\infty.$$

则 μ 也是自旋变相过程的唯一的可逆测度. 值得注意的是这个结论的逆也成立. 即有

系 4.1 如果 μ 是 $X=\{0,\ 1\}^S$ 上的正乘积概率测度, 则存在自旋变相过程 η_t, $t\geqslant 0$ 以 μ 为唯一的可逆测度

证 设 $\mu=\prod_{u\in S}\mu_u$, 其中 $\mu_u(0)=a_u>0$, $\mu_u(1)=b_u>0$, $a_u+b_u=1$, 令 $c(u,\ x)=\begin{cases}a_u & x(u)=1\\ b_u & x(u)=0\end{cases}$, 显然 $\sup_n \max\{a_u,\ b_u\}\leqslant 1$, 由例2及定理4.3可知, 以 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 为速度函数的自旋变相过程以 μ 为唯一的可逆测度.

给出紧邻速度函数的一个重要方式是由一个紧邻势定义的速度函数. 设 $\{\Phi_A\}_{A\in\mathfrak{P}_f(S)}$ 是一个紧邻的相互作用势, 即 $\{\Phi_A\}_{A\in\mathfrak{P}_f(S)}$ 满足:

$$\Phi_A:\ X\to\mathbf{R}\ \text{是}\ \mathscr{B}(A)\text{-可测的,} \tag{4.10}$$

$$\forall A\in\mathfrak{P}_f(S),\ \forall x\in X,\ \text{如果存在}\ u\in A,\ x(u)=0, \tag{4.11}$$

则 $\Phi_A(x)=0$.

$$\text{如果}\ A\ \text{不是单形, 则}\ \Phi_A=0. \tag{4.12}$$

令

$$c(u,\ x)\triangleq\exp[-\sum_{A\ni u}\Phi_A(x)]=\exp[-\sum_{u\in A\subset u\cup\partial u}\Phi_A(x)], \tag{4.13}$$

容易验证: $c(u,\ x)$, $u\in S$, $x\in X$ 满足(1.8), (2.7). 从而 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 的拟可逆测度存在, 如果进而还有

$$\sup_u \sum_{u\in A\subset u\cup\partial u}\|\Phi_A\|<\infty, \tag{4.14}$$

则以 $c(u,\ \cdot)$, $u\in S$ 为速度函数的自旋变相过程存在且唯一, 它的可逆测度存在. 利用[1]中I第四章的方法可证自旋变相过程的可逆测度全体 $\mathscr{R}$ 与[2]中第五章定义的Gibbs态集 $\mathscr{G}_V$ 一致. 从而我们的结果可应用于讨论Gibbs态的唯一性问题.

例3 [5] 设 $S=Z$. 相互作用势 $\{\Phi_A\}_{A\in\mathfrak{P}_f(S)}$ 除满足(4.10)—(4.12)外, 还有平移不变性:

$$\forall A\in\mathfrak{P}_f(S),\ x\in X,\ u\in S, \tag{4.15}$$

$$\Phi_{A+u}(x+u)=\Phi_A(x).$$

其中 $A+u=\{v+u;\ v\in A\}$, $(x+u)(v)=x(v-u)$, $v\in S$. 以及

$$\Phi_{\{0\}}(x)=\begin{cases}-1, & x(0)=1,\\ 0, & x(0)=0.\end{cases}$$
$$\Phi_{\{-1,0\}}(x)=\begin{cases}1, & x(-1)=x(0)=1,\\ 0, & x(-1)=0 \text{ 或 } x(0)=0.\end{cases}\tag{4.16}$$
$$\Phi_{\{0,1\}}(x)=\begin{cases}1, & x(0)=x(1)=1,\\ 0, & x(0)=0 \text{ 或 } x(1)=0.\end{cases}$$

我们讨论以 $\{\lambda\Phi_A\}_{A\in\mathfrak{P}_f(S)}$, $\lambda>0$ 为相互作用势的势 V_λ 的 Gibbs 态的唯一性问题，由上述它等价于讨论速度函数 $c(u,\cdot)$, $u\in S$ 由 (4.13) 定义的自旋变相过程的可逆测度集 $\mathscr{R}_\lambda$ 的唯一性问题.

选取 $T_0=\{0\}$, 则 $\partial T_0=\{-1,1\},\cdots,\partial T_{n-1}=\{-n,n\}$, $T_n=\{-n,\cdots,-1,0,1,\cdots n\}\cdots$. 简单计算可得,

$$\forall y\in X(T_n),\quad w\in X(\partial T_n),$$
$$\frac{\hat{c}(\theta_{T_n}\times w,\ y\times w)}{\hat{c}(y\times w,\ \theta_{T_n}\times w)}=\exp\Big[\sum_{A\cap T_n\neq\phi}\lambda\Phi_A(y\times w)\Big].\tag{4.17}$$

特别地，当 $y=\theta_{T_{n-1}}\times z$, $z\in X(\partial T_{n-1})$ 时,

$$\frac{\hat{c}(\theta_{T_n}\times w,\ \theta_{T_{n-1}}\times z\times w)}{\hat{c}(\theta_{T_{n-1}}\times z\times w,\ \theta_{T_n}\times w)}=\exp[\lambda\Phi_{\{n\}}(\theta_{T_{n-1}}\times z\times w)+\lambda\Phi_{\{-n\}}(\theta_{T_{n-1}}\times z\times w)$$
$$+\lambda\Phi_{\{-n-1,-n\}}(\theta_{T_{n-1}}\times z\times w)+\lambda\Phi_{\{n,n+1\}}(\theta_{T_{n-1}}\times z\times w)].\tag{4.18}$$

由此及(4.15), (4.16), 无穷方程组(3.2)变为

$$\begin{cases}x_{n,1}=x_{n+1,1}+x_{n+1,2}+x_{n+1,3}+x_{n+1,4}\\ x_{n,2}=e^{-\lambda}x_{n+1,1}+x_{n+1,2}+e^{-\lambda}x_{n+1,3}+x_{n+1,4}\\ x_{n,3}=e^{-\lambda}x_{n+1,1}+e^{-\lambda}x_{n+1,2}+x_{n+1,3}+x_{n+1,4}\\ x_{n,4}=e^{-2\lambda}x_{n+1,1}+e^{-\lambda}x_{n+1,2}+e^{-\lambda}x_{n+1,3}+x_{n+1,4}.\end{cases}\quad n\geqslant 1\tag{4.19}$$

其中 $X(\partial T_{n-1})$, $(X(\partial T_n))$ 的四个元 (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) 分别记为 1, 2, 3, 4, $(n\geqslant1)$. 记 $X'_n=(x_{n,1},\ x_{n,2},\ x_{n,3},\ x_{n,4})$, (4.19) 右方的系数矩阵记为 A, 则(4.19)变为

$$X_n=AX_{n+1}.$$

于是有

$$X_{n+1}=A^{-1}X_n,\tag{4.20}$$
$$X_{n+1}=A^{-n}X_1.\tag{4.21}$$

无穷方程组(4.19)的正解是有界的. 事实上由(4.19)的第一式可知 $x_{n+1,i}\leqslant x_{n,1}$, $i=1, 2, 3, 4$. 分别比较(4.19)的第一式与其余三式可知: $x_{n,i}\leqslant x_{n,1}$, $i=1, 2, 3, 4$. 故有

$$x_{n,i}\leqslant x_{1,1},\quad n\geqslant1,\ i=1, 2, 3, 4.$$

A^{-1} 有特征根: $\alpha_1=\dfrac{1}{(1+e^{-\frac{\lambda}{2}})^2}$, $\alpha_2=\dfrac{1}{(1-e^{-\frac{\lambda}{2}})^2}$, $\alpha_3=\alpha_4=\dfrac{1}{1-e^{-\lambda}}$. 由此可得,

$$x_{n+1,i}=a_i\alpha_1^n+b_i\alpha_2^n+(c_i+d_i\cdot n)\alpha_3^n,\quad i=1, 2, 3, 4.$$

其中 a_i, b_i, c_i, d_i 分别是只与 X_1 有关的常数. 由 $x_{n+1,i}$ 的有界性知, $b_i=c_i=d_i=0$, $i=1, 2, 3, 4$. 于是有

$$x_{n+1,i}=a_i\alpha_1^n,\quad i=1, 2, 3, 4.$$

代入(4.19)可解得: $a_2=e^{-\frac{\lambda}{2}}a_1$, $a_3=e^{-\frac{\lambda}{2}}a_1$, $a_4=e^{-\lambda}a_1$ 故(4.19)有唯一的线性独立正解: $n\geqslant 0$,

$$x_{n+1,1}=\frac{1}{(1+e^{-\lambda/2})^{2n}},\quad x_{n+1,2}=x_{n+1,3}=\frac{e^{-\lambda/2}}{(1+e^{-\lambda/2})^{2n}},\quad x_{n+1,4}=\frac{e^{-\lambda}}{(1+e^{-\lambda/2})^{2n}}.$$

由定理 4.3 知, $|\mathscr{R}_\lambda|=1$, 从而 $|\mathscr{G}_{V_\lambda}|=1$. 将上述解代入(3.3), 可求得唯一的可逆测度(Gibbs 态) μ 在 $X(T_n)$ 上的投影为

$$\mu_n(y\times z)=\frac{e^{-\frac{|z|}{2}}}{2(1+e^{-\frac{\lambda}{2}})^{2n}}\exp\left[\sum_{A\cap T_{n-1}\neq\phi}\Phi_A(y\times z)\right],\quad \forall y\in X(T_{n-1}),\ z\in X(\partial T_{n-1}). \tag{4.22}$$

其中 $|z|=|\{u\in\partial T_{n-1},\ z(u)=1\}|$.

本文是在严士健老师指导下完成的,谨致谢意.

参 考 文 献

[1] Liggett, T. M., The stochastic evolution of infinite systems of interacting particles. *Lecture Notes in Math.*, **598** (1976).

[2] Preston, C., Gibbs states on countable sets, Combridge Univ press, London (1974).

[3] 侯振挺、陈木法,马尔可夫过程与场论, 可逆马尔可夫过程,湖南科学技术出版社(1979).

[4] Spitzer, F., Stochastic time evolution of one-dimensional infinite particle systems. *Bull. of Amer. Math. Soc.*, **83** (1977), 880—890.

[5] Preston, Random fields, *Lecture Notes in Math.*, **534** (1976).

QUASI-REVERSIBLE MEASURES OF NEAREST NEIGHBOUR SPEED FUNCTIONS

DING WANDING (*An Hui Normal University*)
CHEN MUFA (*Beijing Normal University*)

ABSTRACT

Let S be a countable set with a graph structure. The process with state space $X=\{0, 1\}^S$ is described in terms of a collection of nonnegative speed functions $c(u, \cdot)$, $u\in S$. In this paper, we introduce the concept of quasi-reversible measure for speed functions, and discuss some properties contained in the existence and uniqueness of quasi-reversible measures for the nearest neighbour speed functions, with the idea of field theory by Hou and Chen[3]. In section 2, we show that quasi-reversible measures are Markov random fields. A necessary and sufficient condition for the existence of quasi-reversible measures is presented. In section 3, a uniqueness theorem of quasi-reversible measures is given. The problem to determine the quasi-reversible measures in accordance with the speed function is discussed, for some particular cases, the quasi-reversible measures can be computed explicitly. In section 4, we show that if the speed functions are uniformly bounded, and each point of S has uniformly bounded boundary, then the quasi-reversible measures of the speed functions are reversible measures of the spin-flip process with the speed functions. Thus we obtain the necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of reversible measures for spin-flip process with nearest neighbour speed functions. Particularly if speed functions are defined by the nearest neighbour potential, then quasi-reversible measures exist, thus our results can be applied to solve the uniqueness problem of Gibbs states with the nearest neighbour potential.