数 学 年 刊
2 (1) 1981

关 于 完 全 谱 算 子

刘 隆 复
(吉林大学)

本文首先引进完全谱算子的概念，并对它的性质作一些讨论；其次，考虑此类算子的谱综合，部分地推广了 Wermer[1] 关于完全正规算子的谱综合之结果；最后，研究完全谱算子的单位分解的酉等价问题.

1. 完全谱算子的一些性质

设 $\mathscr{H}$ 是一可分的 Hilbert 空间，$\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是 $\mathscr{H}$ 上所有有界线性算子的代数. $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的所有不变子空间作成的格记为 $\mathrm{Lat}T$.

定义 1 若 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是约化的谱算子，则称 T 为完全谱算子.

命题 1 T 是完全谱算子当且仅当 T^* 是完全谱算子.

命题 2 若 T 是完全谱算子，$\mathfrak{M}\in\mathrm{Lat}T$，则 T 在 $\mathfrak{M}$ 上的限制是完全谱算子.

命题 3 设 T 是谱算子. 若 T 的每对互补子空间关于 T 皆不变，则 T 相似于一完全谱算子.

证 设 $T=S+Q$ 是 T 的典型分解，则有可逆的自伴算子 $B\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 使 $B^{-1}SB$ 是正规的. 由于 $B^{-1}QB$ 是拟幂零的且与 $B^{-1}SB$ 交换，故

$$B^{-1}TB=B^{-1}SB+B^{-1}QB$$

是一谱算子.

设 P 是任一满足 $(B^{-1}TB)P=P(B^{-1}TB)P$ 的正交射影，则

$$T(BPB^{-1})=(BPB^{-1})T(BPB^{-1}).$$

注意 BPB^{-1} 是一射影，故由假设有

$$T(BPB^{-1})=(BPB^{-1})T,$$

从而

$$(B^{-1}TB)P=P(B^{-1}TB).$$

因此 $B^{-1}TB$ 是约化的. 即 $B^{-1}TB$ 是一完全谱算子.

命题 4 若 T 是完全谱算子，则 $T=N+Q$，其中 N 是正规算子，Q 是与 N 交换的拟幂零算子，并且任一 $\mathfrak{M}\in\mathrm{Lat}T$ 皆约化 N 与 Q.

证 设谱算子 T 的典型分解为 $T=N+Q$，其中 $N=\int\lambda E(d\lambda)$，$Q$ 是与 N 交换的拟幂零算子. 因对任何 Borel 集 σ，$TE(\sigma)=E(\sigma)T$，故 $E(\sigma)\mathscr{H}\in\mathrm{Lat}T$，但 T 是约化的，故若令 $F(\sigma)$ 是到 $E(\sigma)\mathscr{H}$ 上的正交射影，则 $TF(\sigma)=F(\sigma)T$，从而

本文 1979 年 12 月 15 日收到，1980 年 2 月 13 日修改.

$$F(\sigma)E(\sigma)=E(\sigma)F(\sigma).$$

对于每一个 $x\in\mathscr{H}$，可将其写成 $x=x_1+x_2$，此处 $F(\sigma)x_1=x_1$，$F(\sigma)x_2=0$. 注意

$$E(\sigma)F(\sigma)x=E(\sigma)x_1=x_1=F(\sigma)x,$$

故 $E(\sigma)F(\sigma)=F(\sigma)$. 类似地

$$E(\sigma)F(\sigma)=F(\sigma)E(\sigma)=E(\sigma),$$

于是 $E(\sigma)=F(\sigma)$，即 $E(\sigma)$ 是自伴的. 因此 $N=\int\lambda E(d\lambda)$ 是一正规算子.

又因任一 $\mathfrak{M}\in\mathrm{Lat}T$ 皆约化 T，故若令 P 是到 $\mathfrak{M}$ 上的正交射影，则 $TP=PT$. 从而 $NP=PN$，$QP=PQ$. 于是 $\mathfrak{M}$ 约化 N 与 Q.

2. 完全谱算子的谱综合

定义 2 若对于任何非 $\{0\}$ 的 $\mathfrak{M}\in\mathrm{Lat}T$，$T$ 之含于 $\mathfrak{M}$ 的根向量集在 $\mathfrak{M}$ 内完全，则称 T 的谱综合成立.

定理 1 若 T 是完全谱算子且其根向量集在 $\mathscr{H}$ 内完全，则 T 的谱综合成立.

证 设 E 是 T 的单位分解，Q 是 T 的根基部分. 于任一非 $\{0\}$ 的 $\mathfrak{M}\in\mathrm{Lat}T$. 由于 T 的根向量集在 $\mathscr{H}$ 内完全，故存在 T 的一根向量 x 它不垂直于 $\mathfrak{M}$. 设 $(T-\lambda I)^n x=0$ 并将 x 写成 $x=x_1+x_2$，其中 $x_1\in\mathfrak{M}$，$x_2\in\mathfrak{M}^\perp$，则 $x_1\neq 0$，且

$$x_1+x_2=x=E(\{\lambda\})x=E(\{\lambda\})(x_1+x_2)=E(\{\lambda\})x_1+E(\{\lambda\})x_2,$$

$$0=Q^n x=Q^n(x_1+x_2)=Q^n x_1+Q^n x_2.$$

从而

$$E(\{\lambda\})x_1-x_1=x_2-E(\{\lambda\})x_2,$$

$$Q^n x_1=-Q^n x_2.$$

注意 $\mathfrak{M}$ 约化 T，故若令 P 是到 $\mathfrak{M}$ 上的正交射影，则 $TP=PT$. 于是对任何 Borel 集 σ，$E(\sigma)P=PE(\sigma)$，因此 $\mathfrak{M}$ 约化 $E(\{\lambda\})$. 又由命题 4，$\mathfrak{M}$ 也约化 Q. 故 $E(\{\lambda\})x_1-x_1\in\mathfrak{M}$，$x_2-E(\{\lambda\})x_2\in\mathfrak{M}^\perp$，$Q^n x_1\in\mathfrak{M}$，$-Q^n x_2\in\mathfrak{M}^\perp$，于是 $E(\{\lambda\})x_1=x_1$，$Q^n x_1=0$. 故 $(T-\lambda I)^n x_1=0$. 因此 $\mathfrak{M}$ 含有 T 的一根向量 x_1.

令 $\mathfrak{N}$ 表包含 T 之含于 $\mathfrak{M}$ 的根向量集的最小子空间，则显然 $\mathfrak{N}\in\mathrm{Lat}T$. 从而 $\mathfrak{N}^\perp\in\mathrm{Lat}T$，于是 $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}^\perp\in\mathrm{Lat}T$. 由前段的证明知，$\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}^\perp=\{0\}$. 因此 $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}$. 故 T 的谱综合成立.

3. 完全谱算子的单位分解的酉等价

我们知道，两相似的正规算子其单位分解必酉等价. 但一般来说，两相似的谱算子其单位分解未必酉等价.

例 设 $T_1=\int\lambda E_1(d\lambda)\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是非正规的标算子，则有一可逆的自伴算子 $B\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，使对任何 Borel 集 σ，射影 $E_2(\sigma)=B^{-1}E_1(\sigma)B$ 是自伴的. 令 $T_2=\int\lambda E_2(d\lambda)$，则 $T_2\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是正规算子且与 T_1 相似. 但 $E_1(\sigma)$ 与 $E_2(\sigma)$ 不酉等价. 否则，有酉算

子 U 使

$$E_2(\sigma)=U^*E_1(\sigma)U,$$

则
$$T_2=\int\lambda E_2(d\lambda)=\int\lambda U^*E_1(d\lambda)U=U^*\int\lambda E_1(d\lambda)U=U^*T_1U.$$

从而
$$T_1T_1^*=UT_2U^*UT_2^*U^*=UT_2T_2^*U^*=UT_2^*T_2U=UT_2^*U^*UT_2U^*=T_1^*T_1,$$

推出 T_1 是正规的，与假设矛盾.

此外，由此例也可看出，一般的两相似的谱算子未必酉等价.

下述引理是[2]之定理 5 的推广.

引理　设 $E_1(\sigma)$, $E_2(\sigma)$ 依次是 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 上的有界谱算子 T_1, T_2 的单位分解, A 是 $\mathscr{X}$ 上一有界线性算子. 若 $AT_1=T_2A$, 则 $AE_1(\sigma)=E_2(\sigma)A$.

定理 2　设 T_1, T_2 是两完全谱算子，其单位分解依次为 $E_1(\sigma)$, $E_2(\sigma)$. 若 T_1 是 T_2 的拟仿射，则 $E_1(\sigma)$ 与 $E_2(\sigma)$ 酉等价.

证　由命题 4, 可设 $T_i(i=1, 2)$ 的典型分解具有正规的标型部分 $N_i=\int\lambda E_i(d\lambda)$ $(i=1, 2)$.

据假设 T_1 是 T_2 的拟仿射，故有一对一稠值域的算子 $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 使 $AT_1=T_2A$. 因而由引理,

$$AE_1(\sigma)=E_2(\sigma)A. \tag{1}$$

由 N_1, N_2 的正规性知道, $E_1(\sigma)$, $E_2(\sigma)$ 是自伴的，故

$$E_1(\sigma)A^*=A^*E_2(\sigma). \tag{2}$$

令 $|A|=(A^*A)^{\frac{1}{2}}$, 则由(1)与(2)有

$$|A|E_1(\sigma)=E_1(\sigma)|A|. \tag{3}$$

再令 U 为 $A|A|^{-1}$ 按连续性扩张成的酉算子，则由(1)与(3)有

$$E_2(\sigma)U|A|=UE_1(\sigma)|A|.$$

由于算子 $|A|$ 的值域在 $\mathscr{H}$ 中稠密，所以

$$E_2(\sigma)U=UE_1(\sigma).$$

因此 $E_1(\sigma)$ 与 $E_2(\sigma)$ 酉等价.

注　命题 4 已包含在文献[3]的结果中，但本文证法不同

参 考 文 献

[1] Wermer, J., On invariant subspaces of normal operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 270—277.
[2] Dunford, N., Spectral operators. *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 321—354.
[3] Jafarian, A. A., On reductive opertors *Indiana Univ.Math. J.*, **23** (1973/74), 607—613.

ON COMPLETELY SPECTRAL OPERATORS

LIU LONGFU
(*Jilin University*)

ABSTRACT

In this paper we first introduce the concept of completely spectral operators and discuss its various properties; next, we consider spectral synthesis for this kind of operators and partly generalize Wermer's result [1] on spectral synthesis for completely normal operators; finally, we investigate the problem of unitary equivalence of resolutions of the identity for completely spectral operators.

Let $\mathscr{H}$ be a separable Hilbert space and $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ the algebra of all bounded linear operators on $\mathscr{H}$. Let $\operatorname{Lat} T$ denote the lattice of all invariant subspaces of $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Definition 1. An operator $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ is completely spectral if T is spectral and reductive.

Proposition 1. T is a completely spectral operator if and only if T^* is a completely spectral operator.

Proposition 2. If T is a completely spectral operator and $\mathfrak{M} \in \operatorname{Lat} T$, then the restriction of T to $\mathfrak{M}$ is a completely spectral operator.

Proposition 3. Let T be a spectral operator. If any pair of complementary subspaces of T is invariant under T, then T is similar to a completely spectral operator.

Proposition 4. If T is a completely spectral operator, then $T = N + Q$, where N is a normal operator and Q is a quasinilpotent operator commuting with N. Moreover, every $\mathfrak{M} \in \operatorname{Lat} T$ reduces both N and Q.

Difinition 2. We say that spectral synthesis holds for T, provided that for any $\mathfrak{M} \in \operatorname{Lat} T$, which is not $\{0\}$, the set of root vectors of T contained in $\mathfrak{M}$ is complete in $\mathfrak{M}$.

Theorem 1. Let T be a completely spectral operator and let the set of root vectors of T be complete in $\mathscr{H}$. Then the spectral synthesis holds for T.

The following lemma generalizes Theorem 5 of Dunford's [2].

Lemma. Let $E_1(\sigma)$, $E_2(\sigma)$ be resolutions of the identity for bounded spectral operators T_1, T_2 respectively, on Banach space $\mathscr{X}$, and let A be a bounded linear operator on $\mathscr{X}$. If $AT_1 = T_2A$, then $AE_1(\sigma) = E_2(\sigma)A$.

Theoerm 2. Let T_1, T_2 be completely spectral operators. Their resolutions of the identity are $E_1(\sigma), E_2(\sigma)$, respectively. If T_1 is a quasi-affine transform of T_2, then $E_1(\sigma)$ and $E_2(\sigma)$ are unitarily equivalent.