

射影平面上微分方程的定性理论*

陈 一 元
(南京大学)

一、基本概念和定理

考虑定义在正方形 $[0, a] \times [0, a]$ 上的微分方程

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

其中 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 $[0, a] \times [0, a]$ 上连续, 具有一阶连续偏导数, 且满足下列诸关系式

$$\begin{aligned} P(0, y) &= P(a, a-y), & Q(0, y) &= -Q(a, a-y), \\ P(x, 0) &= -P(a-x, a), & Q(x, 0) &= Q(a-x, a), \\ (x, y) &\in [0, a] \times [0, a]. \end{aligned} \quad (2)$$

如果我们把正方形 $[0, a] \times [0, a]$ 的两组对边分别扭转等同起来 (即点 $(0, y)$ 和点 $(a, a-y)$ 等同, 点 $(x, 0)$ 和点 $(a-x, a)$ 等同) 形成射影平面时, 方程 (1) 就是定义在这射影平面上的微分方程.

下面当我们说到射影平面时, 就是指由正方形 $[0, a] \times [0, a]$ 按上述方式等同一些点后形成的射影平面 (除特别说明外).

在射影平面上, 除通常意义下的闭曲线 (称它为 O 类闭曲线) 外, 还有由若干段 (在正方形 $[0, a] \times [0, a]$ 中看) 曲线构成的闭曲线, 如图 1 中的 (a), (b), (c), (d), 它们分别是由一段, 二段, 三段, 四段曲线构成的射影平面上的闭曲线 (图中箭头和标号表示沿这个方

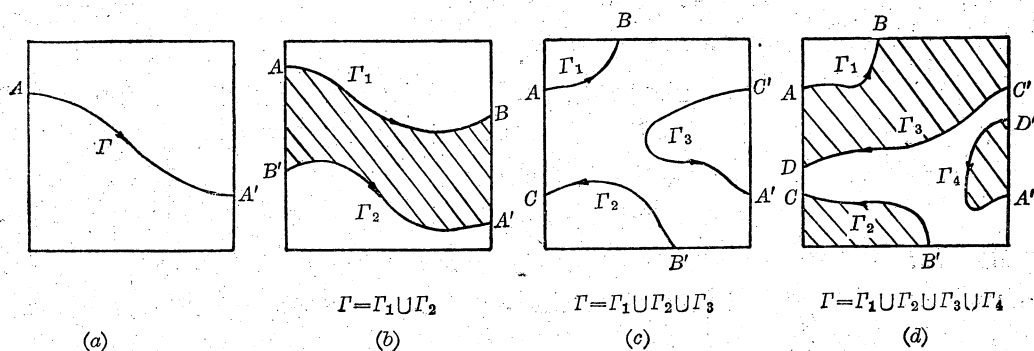


图 1

本文 1980 年 1 月 9 日收到.

* 本文是在导师叶彦谦指导下完成的.

$\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ 的内部, 如果 Γ 是只有二段曲线构成的射影平面上的闭曲线, 为方便起见, 我们称正方形 $[0, a] \times [0, a]$ 中被这二段曲线所夹的部分为 Γ 的内部. 图 1(b) 中阴影部分为 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 的内部.

注 以上的 Γ 若按别的顺序环行时, 也能确定出射影平面被它分成的两部分, 但在“内部”“外部”的称呼上可能不同. 若 Γ 是奇类闭曲线, 那末由引理 1 知不能定义其内部和外部.

射影平面上的闭曲线有上述那末多类型, 所以在射影平面上定义的微分方程的闭轨线也可能有那末多种类型, 我们仍用称呼闭曲线的那些名称来称呼它们, 下面来研究方程 (1) 的闭轨线.

一族只有两端点在 $[0, a] \times [0, a]$ 边界上的轨线段, 如果每段轨线的终点都在其起点的右方 (在正方形 $[0, a] \times [0, a]$ 上看), 我们就称这轨线段族为左右定向的. 同样, 可定义右左定向的, 上下定向的和下上定向的. 图 3 中的 (a), (b), (c) 都是定向轨线段族. 而图 1(c), (d) 中的轨线段族不是定向的.

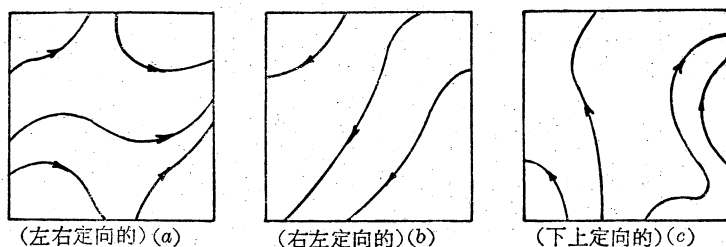


图 3

引理 2 设 Γ 为射影平面上的闭轨线, 由定向轨线段族 L 中的所有轨线段构成, 那末 L 最多只含二段轨线段.

证 我们只须证明 L 是左右定向的情形, 对于其它情形, 只要把正方形 $[0, a] \times [0, a]$ 的位置改变一下就成为这情形.

显然 L 中轨线段的数目是有限的. 因若无限, 那末把 L 中轨线段序号, 按 $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$ 的顺序构成闭轨线 Γ . 由于 Γ 的周期 T 是有限值, 于是当 $n \rightarrow \infty$ 时, l_n 上的运动时间趋于 0, 但 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 $l_i (i=1, 2, \dots)$ 上取有限值, 故 l_n 的长度趋于 0, 即渐渐缩为一点, 且这点是轨线, 从而是 Γ 上的奇点, 但 Γ 上无奇点, 这是矛盾.

任何起点和终点都在正方形 $[0, a] \times [0, a]$ 边界上的轨线段把这正方形分成两部分, 称它们为这轨线段的两侧. 由 L 中轨线段数目的有限性知, L 中必有一轨线段, 它的一侧不含 L 中其他轨线段. 设 l 为 L 中这样的一轨线段. l 可能为下图中 10 种情形之一. 阴影部分表 l 的不含 L 中轨线段的那一侧. 10 种情形分成四组, 每组中只要证明一种情形即可其他情形类似可证.

第一组 (1), (1')

第三组 (3), (3')

第二组 (2), (2'), (2''), (2''')

第四组 (4), (4')

情形 (1) 的证明.

由于 L 构成闭轨线 Γ , 故 L 中必存在轨线段 l_1 和 l_2 , 它们分别以 a, b 的对径点 a', b' 为终点和起点. l_1 不能在 l_2 之上, 否则 l_2 的终点 c 在 a' 的下方或在 b' 的右方, 于是 c

的对径点将会落到 a 的上方或 b 的左方, 从而在 l 阴影一侧必有 L 中轨线段, 但这是矛盾. 同理, l_2 不能在 l_1 上方, 又因 L 是左右定向的, 所以 l_1 和 l_2 的相对位置只能是图 4(1) 中所示的情形, 于是 L 中还存在 l_3 和 l_4 , l_3 的起点为 e . 从 e' 出发的 l_4 和接它之后的轨线段中必有一段的终点是 e' (因 L 构成闭轨线), 但由图可知, 接 l_4 之后的各轨线段将永远位于 l_4 和 l_2 之间, 因而不能到 e' , 这和 L 构成闭轨线 Γ 矛盾, 又易知二段轨线段构成 Γ 是可以的 (除 l 外, 另一轨线段的起点和终点分别为 b' 和 a'), 这就完成情形 (1) 的证明.

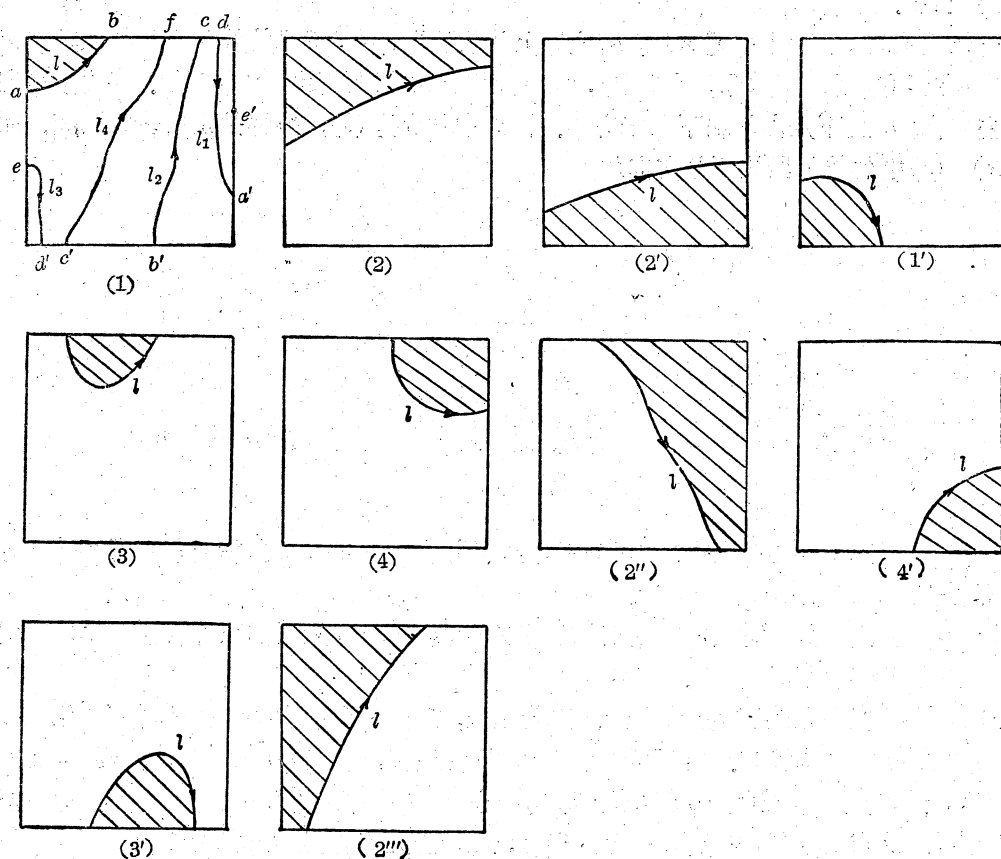


图 4

我们可类似地给出情形 (2), (3), (4) 的证明, 这里从略. 于是引理 2 被证明.

在射影平面上, 我们能和平面定性理论 [1] 中一样给出极限环、周期环、复合环的定义. 对偶类闭轨线可给出半稳定环的定义 (因由前述, 偶类闭轨线把射影平面分成 Γ 的相对内部和外部, 从而可确定这闭轨线的内 (外) 邻域), 但对奇类闭轨线, 它不可能是半稳定极限环, 也不具有单侧稳定性. 若一奇类闭轨线是极限环的话, 它只能是稳定的, 或不稳定的极限环, 不可能是半稳环. 图 5(a) 中闭轨线 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 是外稳定而内不稳定的极限环, (注意我们已约定了 Γ 的内部), 因为从它的外邻域出发的轨线由 1 到 2 到 3, ... 逐渐逼近 Γ , 以 Γ 为 ω 极限集. 而从它内邻域出发的轨线由 1' 到 2' 到 3', ... 逐渐离开 Γ , 以 Γ 为 α 极限集. 在图 5(b) 中的 I 类闭轨线是稳定的极限环. 显然, 若方程 (1) 有

I 类闭轨线存在, 那末只能有一条这种闭轨线.

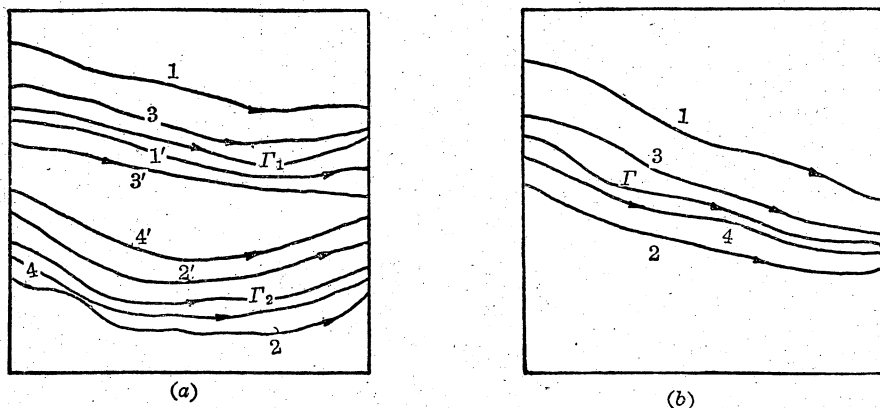


图 5

为了研究的需要, 我们必须要考虑把方程(1)的定义域按一定方式扩大后的方程的轨线性质.

首先把定义域从 $[0, a] \times [0, a]$ 扩大到 $[-a, a] \times [0, a]$ 上. 按下列方式在 $[-a, a] \times [0, a]$ 上定义函数 $P_1(x, y)$ 和 $Q_1(x, y)$.

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= \begin{cases} P(x, y), & (x, y) \in [0, a] \times [0, a], \\ P(a+x, a-y), & (x, y) \in [-a, 0] \times [0, a], \end{cases} \\ Q_1(x, y) &= \begin{cases} Q(x, y), & (x, y) \in [0, a] \times [0, a], \\ -Q(a+x, a-y), & (x, y) \in [-a, 0] \times [0, a]. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

由(2)知这种定义是允许的. 而且 $P_1(x, y)$, $Q_1(x, y)$ 在 $[-a, a] \times [0, a]$ 上是连续的 (由胶合引理[2]知).

延拓后的方程

$$\frac{dx}{dt} = P_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_1(x, y). \quad (4)$$

在 $[0, a] \times [0, a]$ 和 $[-a, 0] \times [0, a]$ 上分别可写成

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (4')$$

$$\frac{dx}{dt} = P(a+x, a-y), \quad \frac{dy}{dt} = -Q(a+x, a-y). \quad (4'')$$

用变换 $x_1 = x - a$, $y_1 = a - y$ 可把(4')变成(4''). 于是我们容易知道 $[-a, 0] \times [0, a]$ 上的轨线可由 $[0, a] \times [0, a]$ 上的轨线经下面运动获得.

设 l_1 为 $[0, a] \times [0, a]$ 上一条轨线, 把正方形 $[0, a] \times [0, a]$ 向左上方平移到图 6 中虚线所示的位置. 边 OA_1 和 B_2O' 迭合, 这时 l_1 成为 l' . 然后, 关于 B_2O' 作对称, l' 映成 l_2 , l_2 就是 $[-a, 0] \times [0, a]$ 上的一条轨线. $[-a, 0] \times [0, a]$ 上的任一条轨线可由这样的方式由 $[0, a] \times [0, a]$ 中的某一条轨线获得.

我们又可把方程(4)延拓到 $[-a, a] \times [-a, a]$ 上, 按下列方式定义函数 $P_2(x, y)$ 和

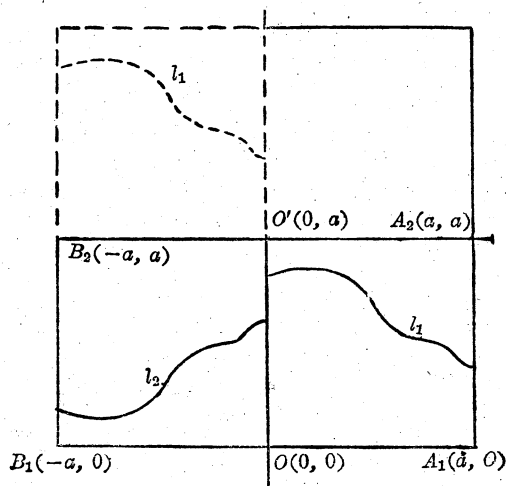


图 6

$Q_2(x, y)$

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= \begin{cases} P_1(x, y), & (x, y) \in [-a, a] \times [0, a], \\ -P_1(-x, -y), & (x, y) \in [-a, a] \times [-a, 0], \end{cases} \\ Q_2(x, y) &= \begin{cases} Q_1(x, y), & (x, y) \in [-a, a] \times [0, a], \\ -Q_1(-x, -y), & (x, y) \in [-a, a] \times [-a, 0]. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

易知 $P_2(x, y)$ 和 $Q_2(x, y)$ 在 $[-a, a] \times [-a, a]$ 上是连续的. 而且由 (2) 易知延拓后的方程

$$\frac{dx}{dt} = P_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y) \quad (6)$$

是把 $[-a, a] \times [-a, a]$ 二组对边分别等同后形成的环面上的微分方程. 由延拓方式可知射影平面上的一条 I 类或 II 类闭轨线很明显对应于这环面上的若干条闭轨线. 特别如果闭轨线是极限环的话, 那末与之对应的环面上的闭轨线也是极限环. 如图 7. $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 是射影平面上 II 类外稳定极限环, 在 $[-a, a] \times [0, a]$ 中对应于 $\Gamma_2 \cup \Gamma_1$ 和 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 是单侧稳定极限环(在环面上), 由于在 $[-a, a] \times [-a, 0]$ 中还有二条单侧稳定环, 所以 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 对应于环面上四条单侧稳定环.

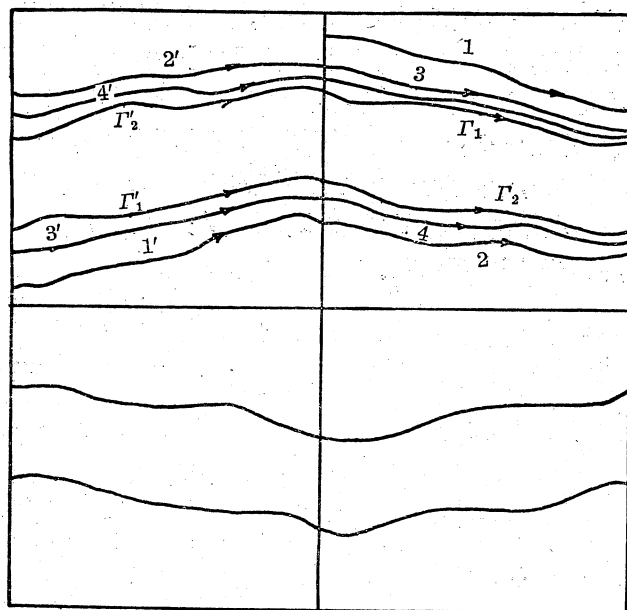
一般我们可证明射影平面上任何类型的闭轨线必对应于这环面上若干条闭轨线. 反之, 在某些情况下, 我们能从这环面上闭轨线的存在而得知在射影平面中也存在闭轨线.

若射影平面上一条闭曲线是由连接正方形 $[0, a] \times [0, a]$ 的左右(上下)对边的曲线段构成的 II 类闭曲线, 那末我们称它是横向(纵向)II 类闭曲线.

在射影平面上, II 类闭轨线的存在可用类似于平面定性论中的 Bendixson-Poincaré 环域的下述定理来确定, 定理 1, 1.1, 1.2 给出 (1) 的闭轨线存在判别.

定理 1* 设 $m = m_1 \cup m_2$ 和 $n = n_1 \cup n_2$ 是射影平面上不相交的二条 II 类闭曲线, Ω

* 在本定理和定理 1.1, 1.2 中, 我们总是假设轨线不和正方形的边相切.



(图中 2' 表轨线 2 经前述的运动后得到的轨线, 3', 4' 等有同样的意义)

图 7

为这二条闭曲线在射影平面上围成的区域, 不含奇点, 在 m 上轨线穿入(出) m 内部, 在 n 上轨线穿出(入) n 内部, 且 n 包含在 m 的内部, 那末 Ω 内至少有一条 II 类外稳(不稳)极限环和一条 II 类内稳(不稳)极限环. 这二条 II 类极限环可能都是双侧环, 也可能重合为一条 II 类稳定极限环.

证 我们只给出 m, n 是横向 II 类闭曲线时的证明, 对于其它的一些可能情形类似可证.

设轨线穿过 m, n 的方向如图 8 中所示. 把方程延拓到 $[-a, a] \times [-a, a]$ 上, 由延拓的方式可知, 曲线段 m_2 和 n_2 在 $[-a, 0] \times [0, a]$ 上有对应的曲线段 m'_2 和 n'_2 存在(只要把 m_2 和 n_2 按前述方式运动一下就是了)使轨线穿过的方向如图 8 中所示. 因延拓后的方程是由 $[-a, a] \times [-a, a]$ 形成的环面上的方程, 而易知图中阴影部分与平面上一个环域同胚, 故由平面环域定理知, 环面上至少有二条靠阴影部分的边界一侧是稳定的单稳环. 又由本定理前的叙述知, 这二条单稳环对应于射影中二条 II 类单稳环, 一条是 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, 而另一条 $L = L_1 \cup L_2$, Γ 是外稳定的, L 是内稳定的. 当轨线穿过 m, n 的方向和图 8 中相反时, 同样可证定理的结论.

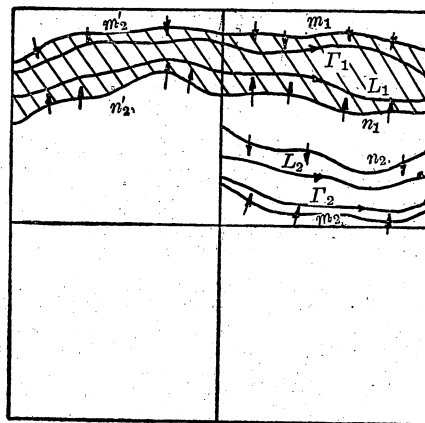


图 8

证毕.

定理 1.1 设 m 是一条由连接正方形 $[0, a] \times [0, a]$ 的对边的曲线段构成的射影平面上的 II 类闭曲线, 其内部不含奇点, 且轨线穿过它的方向均不向外(内). 那末在 m 内部至少有一外(内)稳定的 II 类极限环或 I 类稳定极限环.

证 不妨设 $m = m_1 \cup m_2$ 是一条 II 类横向闭曲线, 内部不含奇点且轨线穿过它的方向均不向外. 仿定理 1 的证明, 把方程延拓到 $[-a, a] \times [-a, a]$ 上, 曲线 m_1 和 m_2 在 $[-a, 0] \times [0, a]$ 上有对应的曲线 m'_1 和 m'_2 存在, 轨线穿过它们的方向如图 9 中所示. 环面上的阴影部分同胚于平面上一个环域, 于是在这阴影部分至少存在一条环面上的闭轨线, 靠阴影的边界一侧是稳定的, 于是射影平面上至少存在一外稳定的极限环, 但它可能是 II 类的, 也可能是 I 类的, 图中所示的 Γ 就是 I 类的 (a' 是 a 的对径点) 当轨线穿过 m 的方向和图 9 中相反时, 同样可证定理结论. 证毕.

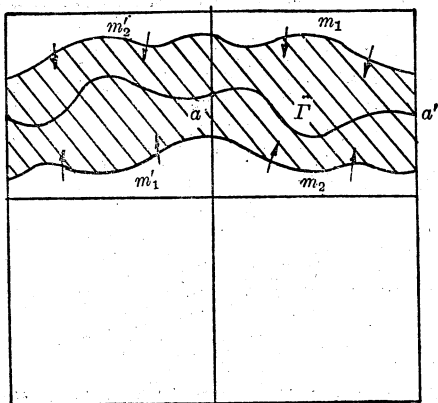


图 9

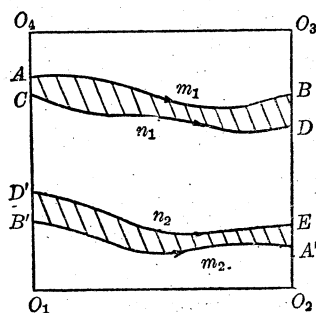


图 10

注 在定理 1.1 中, 当 m 为闭轨线时, 则其内部也存在闭轨线. (I 类或 II 类的), 但不一定是极限环.

证 如图 10. 设 $m = m_1 \cup m_2$ 是闭轨线. 取 C 在 A 下方, 充分靠近 A , 使从 C 出发的轨线 n_1 交 O_2O_3 于 D 点且从 D' (D 的对径点, A', B' 等有同样意义) 出发的轨线 n_2 交 O_2O_3 于 E . (由解对初值的连续依赖性知这是可能的) 若 $AC = A'E$, 那末 $n = n_1 \cup n_2$ 是闭轨线. 它可能是极限环, 可能是周期环, 断言被证明.

若 $AC > A'E$, 且设阴影部分无闭轨 (若阴影部分有闭轨线, 则断言也已明白). 那末 m 必是内稳定极限环 (因从 C 出发的轨线当 $t \rightarrow +\infty$ 时以 m 为 ω 极限集), 仿定理 1.1 的证明, 可在环面上造出一带域, 使它同胚于平面上一个由内稳环 Γ_1 和外稳环 Γ_2 围成的环域. (Γ_2 在 Γ_1 内部); 由平面定性理论知在这环域中至少存在一个内不稳定环和一个外不稳定环 (可能重合成一个不稳定环) 于是环面上, 从而在射影平面上 m 内部存在极限环.

对 $AC < A'E$ 的情形, 仿上可证在 m 内部存在极限环.

证毕.

定理 1.2 设 Γ 是一条由连接正方形 $[0, a] \times [0, a]$ 的对边的轨线段构成的射影平面上的 II 类闭轨线, 其内部不含奇点, 则其内部必存在 I 类闭轨线.

证 设 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 是一横向 II 类闭轨线 (对纵向情形同样可证). 由定理 1.1 后面的注知在 Γ 内部必有闭轨线 Γ^1 , 若它是 I 类的, 定理证毕.

若 Γ^1 是 II 类的, 同理 Γ^1 的内部又存在闭轨线 Γ^2 . 若有限步后, 能找到一条 I 类闭轨线, 则断言被证明. 反之, 我们得到一 II 类闭轨线的无穷列 $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3, \dots$. 位于后面的闭轨线都包含在其前面闭轨线的内部. 易知这无穷列有极限存在, 且为一闭轨线 Γ^ω (由轨线的不相交性知 Γ^ω 是轨线). 若 Γ^ω 是 II 类的, 又可重复上面过程, 得到一超穷闭轨线列 $\Gamma^1, \Gamma^2, \dots, \Gamma^\omega, \Gamma^{\omega+1}, \dots$. 因这些轨线具有包含关系, 内部渐渐缩小, 用 Cantor-Baire 定态原理^[3] 易证, 它们趋向一条闭曲线, 其内部是零. 所以是 I 类的. 同样, 由轨线的不相交性知这条 I 类闭曲线是轨线. 证毕.

注 本定理的结论和证法都类似于平面定性理论中熟知的定理:“闭轨线内部必定有奇点”.

下面给出判别射影平面上不存在闭轨线的几个定理.

定理 2 设 G 为射影平面上的一个区域, 若方程 (1) 的发散量 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ 在 G 中保持常号, 且 G 中使 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ 的集不含任何 2 维区域, 则方程 (1) 不存在其相对内部或外部含在 G 中的偶类闭轨线和奇异闭轨线. (O 类的被认为是偶类的)

特别, 当 G 是整个射影平面时, 则方程 (1) 不存在任何类型的闭轨线和奇异闭轨线.

证 不妨设 G 为图 11 中由二段曲线 l_1, l_2 构成的 II 类闭曲线的内部. 在 G 中不存在 O 类闭轨线和奇异闭轨线是平面定性理论中所知的.

我们以证明在 G 中不存在 IV 类闭轨线为例, 一般情况与此类似.

若定理不成立, 于是存在 IV 类闭轨线. 设它为 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ 且 Γ 相对于顺序 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ 的内部在 G 中. 如图 11 中阴影部分所示. 记它为 $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, 沿 S_1, S_2, S_3 的边界积分, (在平面上). 边界的方向是这样定的, 和平面的定向相同, 即 S_1 的边界方向是从 A 到 F 、到 E 、到 O' 、到 B 、回到 A , 记作 $AFEO'BA$, 而 S_2 的边界方向为 $CDOC$, S_3 的边界方向为 $GIHG$. 由 Green 公式知

$$\begin{aligned} & \oint_{S_1 \text{ 边界}} P dy - Q dx + \oint_{S_2 \text{ 边界}} P dy - Q dx + \oint_{S_3 \text{ 边界}} P dy - Q dx \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (7)$$

左端积分 = $\left(-\int_{O'B} Q dx + \int_{AF} P dy + \int_{EO'} P dy \right) + \left(\int_{DO} P dy - \int_{DC} Q dx \right) + \int_{HG} P dy$ (在 $O'B$ 上, 沿 O' 到 B 的方向积分, 其他表示类似) $O'B$ 和 OC 在射影平面上是等同的. 因

$$\begin{aligned} \int_{O'B} Q dx + \int_{OC} Q dx &= \int_a^{x_0} Q(x, a) dx + \int_0^{a-x_0} Q(x, 0) dx \\ &= -\int_0^{a-x_0} Q(a-x, a) dx + \int_0^{a-x_0} Q(x, 0) dx = 0 \end{aligned}$$

(因由 (2) 知 $Q(a-x, a) = Q(x, 0)$).

同理可证

$$\int_{AF} P dy + \int_{HG} P dy = 0, \quad \int_{EO'} P dy + \int_{DO} P dy = 0,$$

于是左端积分 = 0. 但由定理条件知 $\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \neq 0$. 这和 (7) 矛盾, 所以在 G 中不存在 IV 类闭轨线. 类似可证不存在 IV 类奇异闭轨线. (在上面的证明中, 我们默认

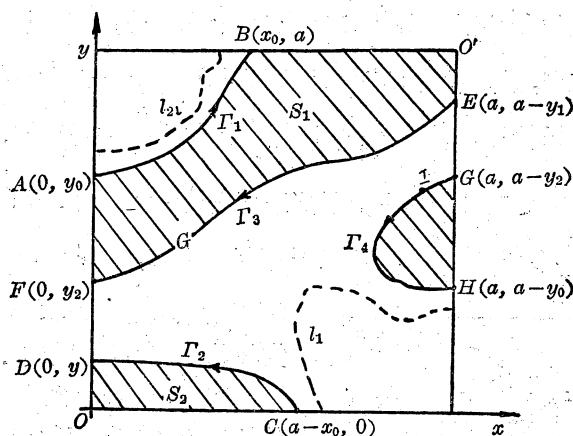


图 11

P, Q 在正方形 $[0, a] \times [0, a]$ 的边界上也是连续可微的. 否则, 可用 $[0, a] \times [0, a]$ 中的曲线来逼近 S 的在正方形边上的边界的方法来证明).

显然以上的证明可用于证明在 G 中不存在任何偶类闭轨线和奇异闭轨线. 定理的前半部分得证.

下面证明定理后半部分. 当 G 是整个射影平面时, 若存在闭轨线, 我们可设它是奇类的 (因以上已证明不存在偶类闭轨线), 它把正方形分成若干块, 每块的边界按前述方式定向, 易知沿所有各块的边界积分 $\int P dy - Q dx = 0$ (用前部分证明的方法得), 但这时由定理条件知 $\iint_{[0, a] \times [0, a]} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \neq 0$, 导出矛盾. 类似可证无奇异闭轨线. 证毕.

定理 3 设 G 为射影平面上的一个区域, $B(x, y)$ 是 G 中的单值连续可微函数, $\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ)$ 在 G 中保持常号, 且 G 中使 $\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = 0$ 的集不含任何

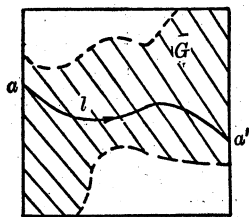


图 12

2 维区域. 则方程 (1) 不存在其相对内部或外部含在 G 中的偶类闭轨线和奇异闭轨线.

特别, 当 G 是整个射影平面时, 则方程 (1) 不存在任何类型的闭轨线和奇异闭轨线.

证 仿定理 2 的证明. 只须用 BP, BQ 分别代替那里的 P, Q 即可.

注 在定理 2, 3 中, 我们没有要求区域 G 在射影平面上是单连通的. 注意图 12 中的 G 在正方形上是单连通的, 但在射影平面上不是单连通的. 因为 G 中的闭曲线 l 在 G 中不能收缩为一点.

定理 4 设 $F(x, y) = C$ 是一曲线族. $F(x, y)$ 是定义在射影平面上的单值一次连续可微函数. 在区域 G 中 $P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y}$ 保持常号, 且在使 $P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ 的子集中不含方程 (1) 的整条闭轨线. 则方程 (1) 在 G 中不存在任何整条闭轨线.

证 仿平面定性理论^[1]中 Poincaré 的切性曲线法定理的证明.

从上述一系列定理看出, 射影平面上关于判别闭轨线或极限环的存在与不存在的定理和平面定性论中十分类似.

二、例 子

在前部分中我们给出了一些基本定理和方法, 下面给出它们的应用. 例子中的方程都是由 $[0, \pi] \times [0, \pi]$ 形成的射影平面上的微分方程.

例 1

$$\frac{dx}{dt} = A \sin 2x + B \sin y, \quad \frac{dy}{dt} = C \sin 4y, \quad (8)$$

其中 A, B, C 是常数, 但满足条件 $\left| \frac{\sqrt{2} B}{2A} \right| > 1, C \neq 0$.

取 $F(x, y) = \cos 4y, \quad P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} = -4C \sin^2 4y,$

$F(x, y)$ 满足定理 4 中除 $P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ 中不含有方程 (8) 的闭轨线外的所有条件. 所以方程 (8) 除可能含在 $P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ 中的闭轨线外, 不存在任何闭轨线. 而我们又易验证 $-4C \sin^2 4y = 0$ 中含有方程 (8) 的两条闭轨线. 一条是由 $y = \frac{3}{4}\pi$ 和 $y = \frac{\pi}{4}$ 在 $[0, \pi] \times [0, \pi]$ 中的部分构成的 II 类闭轨线, 另一条是由 $y = \frac{\pi}{2}$ 在这正方形中部分构成的 I 类闭轨线. 它们都是极限环, (用定理 1 和定理 1.1 可证). 例如在 A, B, C 都大于 0 时, 那条 II 类闭轨线是稳定极限环, 而那条 I 类闭轨线为不稳定极限环.

例 2

$$\frac{dx}{dt} = B \sin y, \quad \frac{dy}{dt} = C \sin x + \frac{D}{2} \sin 2y, \quad (9)$$

其中 B, C, D 是常数, 均不为 0.

可设 $B > 0$. 这方程在 $[0, \pi] \times [0, \pi]$ 上有四个奇点, 即这正方形的四个顶点, 当 $C < 0$ 时, $O_1(0, 0), O_3(\pi, \pi)$ 同为焦点或结点. $O_2(\pi, 0), O_4(0, \pi)$ 同为鞍点, 当 $C > 0$ 时情况恰相反, 我们只须在条件 $B > 0, C < 0$ 下研究 (9).

这时 O_2, O_4 处合有一条分界线在 $[0, \pi] \times [0, \pi]$ 中. 在这正方形中, 方程 (9) 对参数 C 构成旋转向量场

$$\begin{vmatrix} B \sin y & C \sin x + \frac{D}{2} \sin 2y \\ 0 & \sin x \end{vmatrix} = B \sin y \sin x.$$

当 C 减小时, $B+C$ 可从大于 $|D|$ 变到小于 $|D|$, 于是分界线的相对位置由图 13(a) 变到图 13(b).

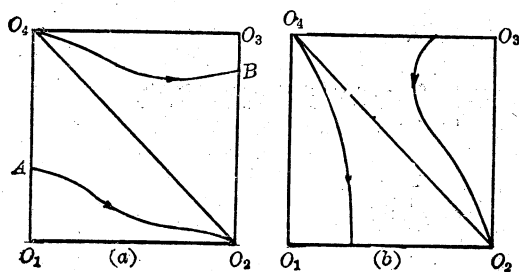


图 13

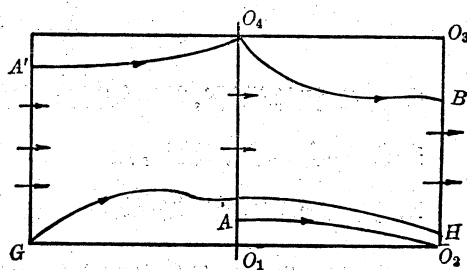


图 14

我们只要把图 13(a) 的情形搞清楚. 图 13(b) 的情形可类似讨论. 把方程 (9) 延拓, 考虑 $[-\pi, \pi] \times [0, \pi]$ 上的轨线, 下面证明方程 (9) 总存在 I 类闭轨线.

在图 13(a) 中, 若 O_3B 的长度等于 O_1A 的长度, 则二条分界线构成一条 II 类奇异闭轨线. 由定理 1.1 后的注的证明知, 这时我们也能用定理 1.2 于这 II 类奇异闭轨线. 于是其内部含有一条 I 类闭轨线.

若 O_3B 的长度大于 O_1A 的长度, 我们在 $[-\pi, \pi] \times [0, \pi]$ 上作出分界线, 如图 14. 借助于轨线建立 $A'G$ 到 BH 上的映射, BH 等同于 $A'G$ 的一真子集 (在环面上), 于是根据压缩映象原理, 必存在环面上的闭轨线, 所以射影平面上也存在闭轨线, 这闭轨线是 I

类的或 II 类的. 若是 I 类的, 则断言证明, 否则由定理 1.2 可知存在 I 类闭轨线.

若 O_3B 的长度小于 O_1A 的长度时, 同样可证.

当分界线的相对位置如图 13(b) 时, 可获同样结果. 于是方程 (9) 总存在 I 类闭轨线.

由 $[0, \pi] \times [0, \pi]$ 上方向场的方向和引理 2, 知不存在由三段或三段以上的轨线段构成的闭轨线. 下面证明当 $\left|\frac{D}{2C}\right| > 1$ 时, 方程 (9) 无 II 类闭轨线.

在条件 $\left|\frac{D}{2C}\right| > 1$ 下, 画出 $C \sin x + \frac{D}{2} \sin 2y = 0$ 在正方形 $[0, \pi] \times [0, \pi]$ 中的部分, 如图 15 中. +、- 号, 表 $C \sin x + \frac{D}{2} \sin 2y$ 在该区域中取值的符号, 我们只讨论 $D < 0$ 的情形, 当 $D > 0$ 时可得同样结果.

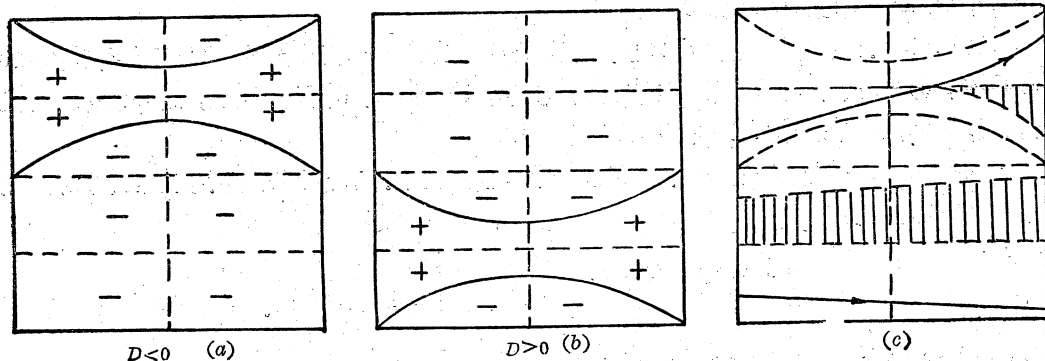


图 15

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = D \cos 2y.$$

若能证明下面断言, 就可知道方程 (9) 在条件 $\left|\frac{D}{2C}\right| > 1$ 时无 II 类闭轨线.

若 (9) 存在 II 类闭轨线, 则

1. 其任一段轨线的终点不能落在 $\{\pi\} \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上.
2. 其任一段轨线的终点不能落在 $\{\pi\} \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上.
3. 其二段轨线的终点不能同时落在 $\{\pi\} \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上.

证

1. 若 II 类闭轨线有一段的终点落在 $\{\pi\} \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上, 由 $C \sin x + \frac{D}{2} \sin 2y$ 的符号知另一段必整段落在 $[0, \pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 中, 如图 15(c), 设 S 为这 II 类闭轨线的内部. 把 S 落在 $[0, \pi] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 外面的部分关于 $y = \frac{\pi}{4}$ 或 $y = \frac{3}{4}\pi$ 作对称, 落到图中阴影部分. 在 $[0, \pi] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$ 上 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ 取正值, 而在正方形的其余部分取负值. 从而易知

$\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy > 0$. 由定理 2 的证明可知这是矛盾.

2. 若 II 类闭轨线有一段终点落在 $\{\pi\} \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上, 那末另一段的起点在 $\{0\} \times \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ 上, 由 $C \sin x + \frac{D}{2} \sin 2y$ 的符号知其终点在 $\{\pi\} \times \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ 上, 由 1 知这不可能.

3. 若 II 类闭轨线的二段的终点都在 $\{\pi\} \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上, 那末同样由 $C \sin x + \frac{D}{2} \sin 2y$ 的符号可知这 II 类闭轨线完全在 $[0, \pi] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$ 上, 在这区域上发散量保持常号, 由定理 2 的证明知这也不可能.

以上就证明了我们的断言.

更进一步我们证明方程 (9) 在条件 $\left| \frac{D}{2C} \right| > 1$ 下的那条 I 类闭轨线是极限环. 为此取由直线 $y = \frac{\pi}{4}$ 和 $y = \frac{3}{4}\pi$ 在 $[0, \pi] \times [0, \pi]$ 中的部分构成射影平面上的闭曲线, 用定理 1.1 即知当 $D > 0$ ($D < 0$) 时, 此闭轨线为稳定 (不稳定) 极限环.

例 3

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A}{2} \sin 2x, \quad \frac{dy}{dt} = C \sin x + \frac{D}{2} \sin 2y, \quad (10)$$

其中 A, C, D 是均不为 0 的常数且, $D \geq -2C > 0$.

取
$$F(x, y) = \cos 2x, \quad P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} = -A \sin^2 2x.$$

由定理 4 知 (10) 无闭轨线, (因 $-A \sin^2 2x = 0$ 中的曲线上都有奇点. 特别直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 在 $[0, \pi] \times [0, \pi]$ 内的部分上有奇点 $N_1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{-2C}{D}\right)\right)$ 和 $N_2\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{-2C}{D}\right)\right)$). 虽然射影平面是一个单侧曲面.

参 考 文 献

- [1] 叶彦谦, 极限环论, 上海科学技术出版社, (1965).
- [2] Singer, I. M. Thorpe, J. A. Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry.
- [3] 那汤松, И. И. 实变函数论, 第十五章 § 3.

QUALITATIVE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE PROJECTIVE PLANE

CHEN YIYUAN
(Nanjing University)

ABSTRACT

I. Basic concepts and theorems

Consider the differential system

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

where $P(x, y)$, $Q(x, y)$ are defined on the square $S: [0, a] \times [0, a]$, continuous and have continuous first partial derivative there, and satisfy the following relations

$$\begin{aligned} P(0, y) &= P(a, a-y), & Q(0, y) &= -Q(a, a-y), \\ P(x, 0) &= -P(a-x, a), & Q(x, 0) &= Q(a-x, a), \\ (x, y) &\in [0, a] \times [0, a]. \end{aligned} \quad (2)$$

A projective plane will be viewed as the square S in the (x, y) -plane, in which the points $(0, y)$, $(a, a-y)$ or $(x, 0)$, $(a-x, a)$ on opposite sides of the square are identified. Thus, under condition (2), (1) is a differential system defined on the projective plane.

On the projective plane, in addition to closed curves in the usual sense (we call it 0-closed curve), there are also closed curves consisting of several arcs in the square, such closed curves are illustrated in Fig. 1 (in which we use arrows and numbers to show that a closed curve can be constructed according to this direction and order). Hereafter, we will call the closed curve Γ on the projective plane an n -closed curve, if Γ consists of n arcs which do not meet each other in S , and each arc intersects the sides of S at its two end points only. If n is even (odd), then we also call Γ an even-closed curve (odd-closed curve) on the projective plane.

Lemma 1. An even-closed curve on the projective plane divides the projective plane into two parts, but an odd-closed curve does not.

So we can define in a certain sense the interior and exterior of an even-closed curve, while for an odd-closed curve, we can not define its interior and exterior.

We call L left-right orientad family of directed arcs in S , if the origin of every arc in L is at the left hand side of its end. Similarly, we can define right-left, upper-lower and lower-upper oriented families.

Lemma 2. Let Γ be a closed orbit of system (1) on the projective plane consisting of only oriented arcs of the same kind, then Γ contains two arcs at most.

On the projective plane, we can define limit cycle of the differential system (1) as in [1]. In particular, we can define stable and unstable cycles as well as semi-stable cycle for an even-closed orbit, but if an odd-closed orbit is a limit cycle, it must be a stable or unstable limit cycle.

Let us extend system (1) to the square $S^*: [-a, a] \times [-a, a]$ by defining first in $[-a, a] \times [0, a]$:

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= \begin{cases} P(x, y), & (x, y) \in [0, a] \times [0, a]; \\ P(a+x, a-y), & (x, y) \in [-a, 0] \times [0, a]; \end{cases} \\ Q_1(x, y) &= \begin{cases} Q(x, y), & (x, y) \in [0, a] \times [0, a]; \\ -Q(a+x, a-y), & (x, y) \in [-a, 0] \times [0, a]; \end{cases} \end{aligned}$$

and then in S^* :

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= \begin{cases} P_1(x, y), & (x, y) \in [-a, a] \times [0, a]; \\ -P_1(-x, -y), & (x, y) \in [-a, a] \times [-a, 0]; \end{cases} \\ Q_2(x, y) &= \begin{cases} Q_1(x, y), & (x, y) \in [-a, a] \times [0, a]; \\ -Q_1(-x, -y), & (x, y) \in [-a, a] \times [-a, 0]. \end{cases} \end{aligned}$$

It is easily seen that

$$\frac{dx}{dt} = P_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y) \quad (6)$$

is a C^1 differential system on the torus formed by identifying opposite sides of S^* . A closed orbit of (1) on the projective plane must correspond to some closed orbits of (6) on the torus. We can prove now the following theorems.

Theorem 1. Let $m = m_1 \cup m_2$ and $n = n_1 \cup n_2$ be two 2-closed curves in the projective plane, and n is in the interior of m . Suppose the domain Ω bounded by m and n contains no stationary points, and trajectories of (1) crossing m all run from exterior to interior, while trajectories crossing n all run from interior to exterior. Then Ω contains at least two 2-closed orbits Γ and L , where Γ is outer-stable, L is inner-stable limit cycle. Here Γ may coincide with L , if this takes place, then $\Gamma = L$ is a stable limit cycle.

Theorem 1.1. Let m be a 2-closed curve in the projective plane which consists of arcs joining opposite sides of the square S . The interior of m contains no stationary points, and trajectories crossing m all run into the interior of m , then in the interior of m there is at least a closed orbit of (1) which is an outer stable 2-limit cycle or a stable 1-limit cycle.

Theorem 1.2. Let Γ be a 2-closed orbit of (1) in the projective plane which consists of arcs joining opposite sides of the square S . The interior of Γ contains no stationary points, then in the interior of Γ there is a 1-closed orbit.

Theorem 3. Let G be a domain in the projective plane, and $B(x, y)$ be a single-valued continuous function in G which has continuous first partial derivatives. Suppose $\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ)$ does not change its sign in G , and the set $\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = 0$ contains no 2-dimensional domain, then the system (1) has no even-closed orbit whose interior is in G .

In particular, if G is the whole projective plane, then the system (1) has no closed orbit at all.

Theorem 4. Suppose $F(x, y) = C$ is a family of curves, where $F(x, y)$ is a single-valued continuous function and has continuous first partial derivatives in the projective plane. $P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y}$ does not change its sign in a domain G , and the subset of G in which $P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ contains no closed orbits of (1), then system (1) has no closed orbits in G .

II. Examples

The systems in the following examples are all systems of differential equations defined in the projective plane, and the projective plane is formed by the square $[0, \pi] \times [0, \pi]$. A, B, C, D are constants other than zero.

Ex. 1
$$\frac{dx}{dt} = A \sin 2x + B \sin y, \quad \frac{dy}{dt} = C \sin 4y, \quad (8)$$

where

$$C \neq 0, \quad \left| \frac{\sqrt{2} B}{2A} \right| > 1.$$

Using theorem 4 and theorem 1, we can prove that (8) has a 2-closed orbit and an 1-closed orbit, which are stable and unstable limit cycles respectively.

Ex. 2
$$\frac{dx}{dt} = B \sin y, \quad \frac{dy}{dt} = C \sin x + \frac{D}{2} \sin 2y, \quad (9)$$

system (9) has always a 1-closed orbit, if $\left| \frac{D}{2C} \right| > 1$, then we can prove that (9) has no 2-closed orbit.

Ex. 3
$$\frac{dx}{dt} = \frac{A}{2} \sin 2x, \quad \frac{dy}{dt} = C \sin x + \frac{D}{2} \sin 2y, \quad (10)$$

where

$$D > -2C > 0.$$

This system has no closed orbit, although the projective plane is a one-sided surface.