数 学 年 刊
2 (1) 1981

一般多路通讯网络系统信息传输的基本定理

沈 世 镒
（南开大学）

1. 引 言

多路通讯问题是 Shannon 信息论在近几年内获得迅速发展的一个重要分支，它以快速通讯系统网络化，卫星通讯网与广播电视卫星网为背景而建立的信息传输模型，[1]文综合介绍了1962—1977年内有关工作的进展情况，从这些结果可以看出对各种多路通讯的典型系统已在无记忆条件下得到很大程度上的解决，近两年内许多工作（如[5—10]文）针对上述多路通讯中更复杂的模型进行研究，并且得到了许多有意义的结果，本文试图用一般网络系统的观点综述各种多路系统的特点，获得了具有普遍意义的信息传输定理，这些结果在特殊条件下与[5—10]文一致.

本文仍采用[2]文中引入的多路系统的序列模型思想，关于序列模型的基本概念可参阅[3, 4]文叙述. 本文给出的多路系统多重随机码与信息门限译判决译码法理论对进一步讨论多路系统的误差界理论与概率码的构造可能会有一定的帮助.

2. 多路系统的描述

1) 模型与记号

本文讨论的多路网络系统系指一般无边信息，无反馈的多路网络系统，它的信息传输模型有如图1所示.

图1模型具有翻码相关网络，译码相关网络与多重译码输出网络的综合结构，对此引入如下记号：

i) 复合信源 $\mathscr{S}_L$:

$$\mathscr{S}_L=\left\{[X,\ p(x)],\ X=\prod_{l=1}^{L}\otimes X(l)\right\}, \tag{2.1}$$

上述 $X(l)$ 为有限集合，元为 $x(l)$，则 X 的元为 $x=(x(1),\cdots,x(L))$，称之为多重输入消息，$p(x)$ 为 X 上的概率分布，本文设 $p(x)$ 为均匀分布，如记 $X(l)$ 元的个数为 $|X(l)|=M_l$，则称 $\overline{M}=(M_1,\ \cdots,\ M_L)$ 为消息长度，因此

本文1980年1月10日收到.

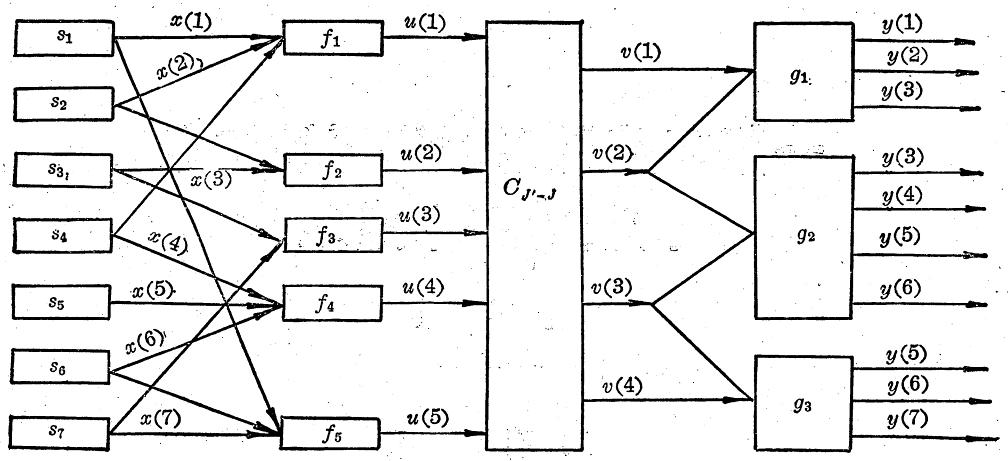

图1 一般多路通讯网络示意图

$$p(x)=\frac{1}{M},\quad M=|X|=\prod_{l=1}^{L}\cdot M_l, \tag{2.2}$$

记 $Y=\prod_{l=1}^{L}\otimes Y(l)$ 为 X 的复制字母集合,相应的元为

$$y=(y(1),\ \cdots,\ y(L)),\ y(l)\in Y(l),$$

本文设 $Y(l)=X(l)$,因此 $Y=X$;

ii) 多路信道 $\mathscr{C}_{J'-J}$:

$$\mathscr{C}_{J'-J}=\left\{[U,\ p(v/u),\ V],\ U=\prod_{j'=1}^{J'}\otimes U(j'),\ V=\prod_{j=1}^{J}\otimes V(j)\right\}, \tag{2.3}$$

上述 $U(j)$, $V(j)$ 均为有限集合,相应的元为 $u(j')$, $v(j)$, 而

$$u=(u(1),\ \cdots,\ u(J')),\ v=(v(1),\ \cdots,\ v(J))$$

为 U, V 的元, $p(v/u)$ 为 v 关于 u 的条件概率;

iii) 复合翻码 $f=(f_1,\cdots,f_{J'})$:

如记 $\mathscr{L}=\{1,\ \cdots,\ L\}$, $\mathscr{U}(j')$ 为 $\mathscr{L}$ 的非空子集,而 $\mathscr{U}=(\mathscr{U}(1),\ \cdots,\ \mathscr{U}(J'))$,称 $f=(f_1,\ \cdots,\ f_{J'})$ 为 $\mathscr{U}$ 型翻码,如 $f_{j'}$ 为 $X_{\mathscr{U}(j')}\Rightarrow U(j')$ 的映射,其中

$$X_{\mathscr{U}(j')}=\prod_{l\in\mathscr{U}(j')}\otimes X(l), \tag{2.4}$$

相应的元记为 $x_{\mathscr{U}(j')}$, 如 $\alpha\subset\mathscr{L}$, x_α 为 x 在 α 上的分量所构成的向量, 因此有 $x=(x_\alpha,\ x_{\bar{\alpha}})$, $\bar{\alpha}=\mathscr{L}|\alpha$;

iv) 复合译码 $g=(g_1,\ \cdots,\ g_T)$:

如 $\mathscr{Y}(t)\subset\{1,\ \cdots,\ J\}$, $\mathscr{V}(t)\subset\mathscr{L}$, $t=1,2,\cdots,T$ 而

$$\mathscr{Y}=(\mathscr{Y}(1),\ \cdots,\ \mathscr{Y}(T)),\ \mathscr{V}=(\mathscr{V}(1),\ \cdots,\ \mathscr{V}(T)),$$

称 $g=(g_1,\ \cdots,\ g_T)$ 为 $(\mathscr{Y},\ \mathscr{V})$ 型译码, 如 g_t 为 $V_{\mathscr{Y}(t)}\Rightarrow Y_{\mathscr{V}(t)}$ 的映射, $V_{\mathscr{Y}(t)}$, $Y_{\mathscr{V}(t)}$ 定义与(2.4)类似,如 f 为 $\mathscr{U}$ 型, g 为 $(\mathscr{Y},\ \mathscr{V})$ 型,则称 (f,g) 为 $(\mathscr{U},\mathscr{Y},\mathscr{V})$ 型编码, 记之为 $(f_{\mathscr{U}},\ g_{(\mathscr{Y},\mathscr{V})})$.

例 对图1系统 $L=7$, $J'=3$, $J=4$, $T=3$, 而

$$\mathscr{U}=(\{1,\ 2,\ 4\},\ \{2,\ 3\},\ \{3,\ 7\},\ \{4,\ 5,\ 6\},\ \{1,\ 6,\ 7\}),$$

$$\mathscr{Y}=(\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}),$$
$$\mathscr{V}=(\{1,2,3\},\{3,4,5,6\},\{5,6,7\});$$

v) 多路系统 $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}(f, g)$: 记

$$\mathscr{E}=\{\mathscr{S}_L, \mathscr{C}_{J'-J}, (\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})\}, \tag{2.5}$$
$$\mathscr{E}(f, g)=\{\mathscr{S}_L, \mathscr{C}_{J'-J}, (f_{\mathscr{U}}, g_{(\mathscr{Y},\mathscr{V})})\}, \tag{2.6}$$

分别称之为多路通讯系统与给定编码的多路系统，由上述一般模型的特殊情形就可得到各种典型系统，如：

$J=1$ 为多址信道系统；如 $J'=L$, $\mathscr{U}(l)=\{l\}$ 就为标准多址信道系统，相应的 $\mathscr{U}$, 记为 $\mathscr{U}_0$.

如 $J'=1$ 就为广播信道系统，如 $J=T=L$, 且 $\mathscr{Y}(l)=\mathscr{V}(l)=\{l\}$ 就为标准广播信道系统.

2) 多路系统的序列模型

本文以下均讨论多路系统序列

$$\mathscr{E}^{(n)}=\{\mathscr{S}_L^{(n)}, \mathscr{C}_{J'-J}^{(n)}, (\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})\},\ n=1,2,\cdots, \tag{2.7}$$

上述 $\mathscr{S}_L^{(n)}$, $\mathscr{C}_{J'-J}^{(n)}$ 为一系列信源，信道而指标符号 L, J', J, T, $\mathscr{U}$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{V}$ 等与 n 无关，因此在下文中，除了上述指标符号及其他特别声明符号之外，其余各字右上角均有 (n) 但省略不写，另外我们还约定：

i) l, j', j, t 分别为 $\{1,\cdots,L\}$, $\{1,\cdots,J'\}$, $\{1,\cdots,J\}$, $\{1,\cdots,T\}$ 中任取的元；

ii) "$\to$" 表示当 $n\to\infty$ 时的极限值；

iii) ε, δ 为正数, M, N, M_l, N_l, $\mathscr{T}_l$ 均为正数数列，且 $\to\infty$.

以上规定以后就不一一声明了.

3. 多路系统的 Shannon 定理

1) $\mathscr{E}(f, g)$ 的误差概率

对上述 $\mathscr{E}(f, g)$, 如记 $Y'=\prod_{t=1}^{T}\otimes Y_{\mathscr{V}(t)}$, 相应的元为

$$y'=(y_{\mathscr{V}(1)}, \cdots, y_{\mathscr{V}(T)}),\ y_{\mathscr{V}(t)}\in Y_{\mathscr{V}(t)},$$

则由前述定义可知，当 $\mathscr{E}(f,g)$ 给定时，(x, u, v, y') 的联合分布确定，记 $\mathscr{E}(f, g)$ 的传输误差为

$$e(f, g)=p\{(x, y')\text{：有一个 } t, \text{ 使 } x_{\mathscr{V}(t)}\neq y_{\mathscr{V}(t)}\}, \tag{3.1}$$

如 $\mathscr{V}(t)=\{t\}$, 则 y' 就为 y.

定义 1　称 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 为 $\overline{M}-(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 可传，如对长度为 $\overline{M}$ 的信源 $\mathscr{S}_L$ 存在一列 $(f_{\mathscr{U}}, g_{(\mathscr{Y},\mathscr{V})})$, 使 $\mathscr{E}(f, g)$ 的 $e(f, g)\to 0$.

以下就可讨论 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 为 $\overline{M}-(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 可传的等价条件.

2) $\mathscr{C}_{J'-J}$ 的 $(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 型 ε-专线

记 $\overline{N}=(N_1, \cdots, N_L)$, $I(l)=\{0, 1, \cdots, N_l-1\}$, 而

$$I_\alpha=\prod_{l\in\alpha}\otimes I(l),\ I=I_{\mathscr{L}}, \tag{3.2}$$

上述 α 为 $\mathscr{L}$ 的非空子集, $I(l)$, I_α, I 的元分别记为 $k(l)$, k_α, $k=(k(1), \cdots, k(L))$, 称

$$U_0=\{u_k,\ k\in I\},\ u_k=(u_{k_{\mathscr{U}(1)}}(1),\ \cdots,\ u_{k_{\mathscr{U}(J')}}(J')),\tag{3.3}$$

为 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 的一个 $\mathscr{U}$ 型入口码子, 上述 $u_{k_{\mathscr{U}(j')}}(j')\subset U(j')$; 称 $\{B_k,\ k\in I\}$ 为 V 的一组 $(\mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 分割, 如

$$B_k=\bigcap_{t=1}^{T} B_{k_{\mathscr{V}(t)}},\ B_{k_{\mathscr{V}(t)}}=B'_{k_{\mathscr{V}(t)}}\otimes V_{\overline{\mathscr{Y}}(t)},\ B'_{k_{\mathscr{V}(t)}}\subset V_{\mathscr{Y}(t)},\tag{3.4}$$

且对不同的 $k_{\mathscr{V}(t)}$, $B_{k_{\mathscr{V}(t)}}$ 互不相交, 因此 B_k 互不相交, 上述 $\overline{\mathscr{Y}}(t)=\{1, \cdots, J\}\backslash\mathscr{Y}(t)$.

定义 2 称 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 有 $\overline{N}$ 条 $(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 型 ε-专线, 如有一组 $\{(u_k, B_k), k\in I\}$, 满足条件:

i) u_k 为(3.3)的 $\mathscr{U}$ 型入口码元, $\{B_k, k\in I\}$ 为(3.4)的 $(\mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 型分割.

ii) I 为(3.2)定义, 对任何 $k\in I$, 有

$$p(B_k\backslash u_k)>1-\varepsilon.\tag{3.5}$$

定义 2' 如上述条件 ii) 改为

ii') 有一个 $I_0\subset I$, $|I_0|>N(1-\varepsilon)$, 对任何 $k\in I_0$ (3.5) 成立,

则称 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 有 $\overline{N}$ 条 $(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})^*$ 型 ε-专线.

对 $\mathscr{U}_0$ 型入口码元显然为有

$$u_k=(u_{k(1)}(1), \cdots, u_{k(L)}(L)),\ k=(k(1), \cdots, k(L)).\tag{3.6}$$

定理 1 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 为 $\overline{M}-(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 可传的充要条件为存在一列 $\varepsilon\to 0$, 使 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 有 $\overline{N}\geqslant\overline{M}$ 条 $(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})^*$ 型 ε-专线, $\overline{N}\geqslant\overline{M}$ 即 $N_l\geqslant M_l$.

证　由[4]文引理 3.5 与 $(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 型编码与 $(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})^*$ 型 ε-专线定义即得.

4. $(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 网络的随机码理论

1) $(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 网络系统模型为如下类型:

先讨论它的编码问题

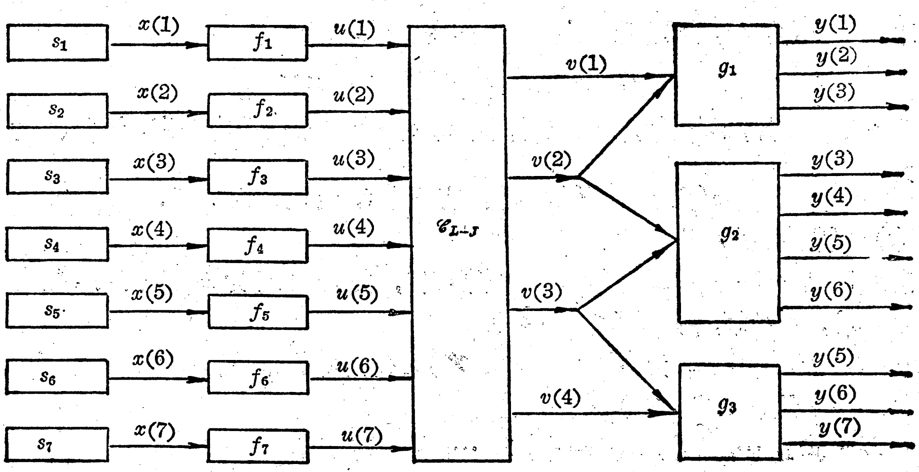

图 2　$(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 网络系统示意图

2) U 上的随机码.

U 的 $\mathscr{U}_0$ 型码子 U_0 如(3.3), (3.6)定义, 对不同的 $k\in I$, 允许 u_k 相同, 为了简单起见, 记

$$v_t=v_{\mathscr{Y}(t)},\ u_t=u_{\mathscr{V}(t)},\ k_t=k_{\mathscr{V}(t)},\tag{4.1}$$

因此 u_{k_t} 即 $u_{k_{\mathscr{V}(t)}}$, 由(3.6)知

$$U_0=\prod_{l=1}^{L}\otimes U_0(l),\ U_0(l)=\{u_{k(l)}(l),\ k(l)\in I(l)\},\tag{4.2}$$

以下记 $p_l(u(l))$ 为 $U(l)$ 上的概率分布, 而

$$p(u)=\prod_{l=1}^{L}p_l(u(l))\quad 或\quad p=(p_1,\ \cdots,\ p_L)\tag{4.3}$$

为 U 上的概率分布, 记

$$p(u,\ v)=p_0(u,\ v)=p(u)p(v/u)\tag{4.4}$$

为 $U\otimes V$ 的联合分布, 上述 $p(v/u)$ 由 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 定义, 由 $p(u,\ v)$ 就可确定 $U\otimes V$ 上各种边际分布与条件分布, 由此可引入以下概念:

i) 随机码 U_0^*, 记

$$\{u_{k(l)}^*(l),\ k(l)\in I(l),\ l\in\mathscr{L}\},\tag{4.5}$$

为一组随机变量, 对每个 $U_0^*(l)=\{u_{k(l)}^*(l),\ k(l)\in I(l)\}$ 中的元为独立, 同分布的随机变量, $u_{k(l)}^*(l)$ 在 $U(l)$ 上取值, 分布为 $p_l(u(l))$, 而 $U_0^*(l)$, $l\in\mathscr{L}$ 又相互独立, 则称

$$U_0^*=\{u_k^*,\ k\in I\},\ u_k^*=(u_{k(1)}^*(1),\ \cdots,\ u_{k(L)}^*(L))\tag{4.6}$$

为一组由 $p(u)$ 确定的长度为 $\overline{N}$ 的随机码, u_k^* $k\in I$ 的联合分布由(4.5), (4.6)定义确定;

ii) 对(4.4)的 $p(u,\ v)$, 如记 $\alpha\subset\mathscr{V}(t)$, $\bar{\alpha}=\mathscr{V}(t)|\alpha$, 称

$$i_{(\mathscr{Y},\mathscr{V})}(\alpha,\ t)=i(\alpha,\ u_t,\ v_t)=i(u_\alpha,\ v_t/u_{\bar{\alpha}}),\tag{4.7}$$

为$(\mathscr{Y},\ \mathscr{V})$型公息密度, 上述 u_t, v_t 如(4.1)定义, 因此 $u_t=(u_\alpha,\ u_{\bar{\alpha}})$, 而

$$i(u_\alpha,\ v_t/u_{\bar{\alpha}})=\log\frac{p(u_\alpha/u_{\bar{\alpha}},\ v_t)}{p(u_\alpha/u_{\bar{\alpha}})}=\log\frac{p(u_\alpha/u_{\bar{\alpha}},\ v_t)}{p(u_\alpha)}=i(u_\alpha;u_{\bar{\alpha}},\ v),\tag{4.8}$$

由 $p(u,\ v)$ 完全确定. 如 U_0 给定, 则记

$$i_{(\mathscr{Y},\mathscr{V})}(\alpha,\ t,\ k)=i(\alpha,\ u_{k_t},\ v_t)=i(u_{k_\alpha},\ v_t/u_{k_{\bar{\alpha}}}),\tag{4.9}$$

其中 k_t 如(4.1)定义, 因此 $k_t=(k_\alpha,\ k_{\bar{\alpha}})$;

iii) 对上述随机码 U_0^*, 如记 v^* 为 u_φ^* 的接收信号(φ 为 L 维 0 向量), 也就是 U_0^*, v^* 关系为使

$$U_0^*\Rightarrow u_\varphi^*\Rightarrow v^*\tag{4.10}$$

成一个马氏链, 而 $u_\varphi^*\Rightarrow v^*$ 的转移概率为 $p(v/u)$, 这时 u_φ^*, v^* 的联合分布为

$$p\{u_\varphi^*=u,\ v^*=v\}=p_0(u,\ v)=p(u)p(v/u),\tag{4.11}$$

对一般的 k, 如记

$$\beta=\beta(k)=\{l:\ k_l\neq 0\},\quad \bar{\beta}=\mathscr{L}\backslash\beta,\tag{4.12}$$

则 $u_{k_\beta}^*$ 与 u_φ^*, v^* 独立, 而 $u_{k_{\bar{\beta}}}^*$ 与 u_φ^* 的分量重合, 因此 u_k^* 与 v^* 的联合分布为

$$p\{u_k^*=u,\ v^*=v\}=p_k(u,\ v)=p(u_\beta)\cdot p_0(u_{\bar{\beta}},\ v),\tag{4.13}$$

上述 $u=(u_\beta,\ u_{\bar{\beta}})$, 因此 U_0^* 与 v^* 的联合分布确定.

iv) 如将 u_k^*, v^* 的值代入 $i_{(\mathscr{U},\mathscr{V})}(\alpha, t)$, 则

$$i^*_{(\mathscr{U},\mathscr{V})}(\alpha, t, k)=i(\alpha, u^*_{k_t}, v^*_t)=i(u^*_\alpha, v^*_t/u^*_\alpha), \tag{4.14}$$

为随机公息密度,它们的联合分布由 U_0^*, v^* 确定.

3) 多路系统的信息门限译码判决方案.

设 U_0 为(4.2)的入口码子, v 为接收信号,我们把 I 看作 X, 因此 $p(k)$ 为 I 上的均匀分布,翻码显然为 $f(k)=u_k$, 即 $f_l(k(l))=u_{k(l)}(l)$, 而译码步骤如下:

i) 取一列 $\overline{K}=(K_1, \cdots, K_L)$为判决门限,记 $K_\alpha=\sum\limits_{l\in\alpha}K_l$;

ii) 适当的选择 $p(u)$, 由(4.3), (4.8)计算 $i(\alpha, u_{k_t}, v_t)$, 对固定的 t, k_t, 如

$$i(\alpha, u_{k_t}, v_t)>K_\alpha, \tag{4.15}$$

对任何 $\alpha\subset\mathscr{V}(t)$成立,则称 k_t(或 u_{k_t})关于 v_t 保留,否则为放弃;

iii) 如 k_t(注意: 不是 u_{k_t})是 v_t 的唯一的保留元, 作译码 $g_t(v_t)=k_t$, 否则就不能译出.

以上译码法我们称之为信息门限判别译码法,这种译码法,如 v 是 u_k 的接收信号, 这时发生错误可能有: i)有一个 t, 使 k_t 关于 v_t 放弃; ii)有一个 t 与 $k'_t\neq k_t$, k'_t 关于 v_t 保留,因此如记

$$A_{1k}=\{v\text{: 有一个 } t \text{ 与 } \alpha\subset\mathscr{V}(t),\text{ 使 } i(\alpha, u_{k_t}, v_t)\leqslant K_\alpha\}, \tag{4.16}$$

$$A_{2k}=\{v\text{: 有一个 } t \text{ 与 } k'_t\neq k_t \text{ 对任何 } \alpha\subset\mathscr{V}(t),\ i(\alpha, u^{k't}, v_t)>K_\alpha\}, \tag{4.17}$$

则不能由 v 译为 k 的充要条件为 $v\in A_{0k}=A_{1k}\cup A_{2k}$, 记

$$e_\lambda(U_0)=\sum_{k\in I}p(k)p(A_{\lambda k}/u_k),\ \lambda=0, 1, 2, \tag{4.18}$$

则 $e_0(U_0)$为上述$(f_{\mathscr{U}_0}, g_{(\mathscr{U},\mathscr{V})})$的误差概率,显然有 $e_0(U_0)\leqslant e_1(U_0)+e_2(U_0)$成立,而

$$\bar{e}^*_\lambda=\sum_{U_0}p\{U^*_0=U_0\}e_\lambda(U_0),\ \lambda=0, 1, 2, \tag{4.19}$$

为随机码的平均误差, 上述 Σ 对全体长度为 $\overline{N}$ 的码子($\mathscr{U}_0$ 型)而取. 由 u_k^* 的对称性, 可设 v^* 为 u^*_φ 的接收信号,由(4.16)—(4.19)可验证 $\bar{e}^*_\lambda$ 为

$$\begin{aligned}\bar{e}^*_1&=p\{\text{有一个 } t,\text{ 使 } u^*_{\varphi_t} \text{ 关于 } v^*_t \text{ 放弃}\}\\&=p\{\text{有一个 } t \text{ 与 } \alpha\subset\mathscr{V}(t),\text{ 使 } i(\alpha, u^*_{\varphi_t}, v^*_t)\leqslant K_\alpha\}\\&=p_0\{(u, v)\text{: 有一个 } t \text{ 与 } \alpha\subset\mathscr{V}(t) \text{ 使 } i(\alpha, u_t, v_t)\leqslant K_\alpha\},\end{aligned} \tag{4.20}$$

上述 φ_t 仍为 φ 在 $\mathscr{V}(t)$上的向量,而

$$\bar{e}^*_2=p\{\text{有一个 } t \text{ 与 } k_t\neq\varphi_t,\text{ 使 } u^*_{k_t} \text{ 关于 } v^*_t \text{ 保留}\}, \tag{4.21}$$

这样就可进一步估计 $\bar{e}^*_\lambda$ 的值.

4) 随机码的误差界定理.

定义 3 称 $\mathscr{C}_{L-J}$ 为 $\overline{\mathscr{T}}-(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$型信息稳定,如有一列(4.2)的入口分布 $p(u)$与一列 $\varepsilon\to0$, 对(4.3)的 $p(u, v)$有

$$p\{(u, v)\text{: 对任何 } t,\ \alpha\subset\mathscr{V}(t),\ i(\alpha, u_t, v_t)>\mathscr{T}_\alpha(1-\varepsilon)\}>1-\varepsilon, \tag{4.22}$$

成立,上述 $\overline{\mathscr{T}}=(\mathscr{T}_1, \cdots, \mathscr{T}_L)$, $\mathscr{T}_\alpha=\sum\limits_{l\in\alpha}\mathscr{T}_l$.

上述定义又称为 $\mathscr{C}_{L-J}$ 在 $p(u)$ 上关于 ε, $\overline{\mathscr{T}}-(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$信息稳定,因为(4.22)中 ε 可任意放大而保持成立,因此对 $\varepsilon\to0$ 可设 $\mathscr{T}_l\cdot\varepsilon\to\infty$;

定理 2　对 $\mathscr{C}_{L-J}$ 与 U_0^*，如

i) $\mathscr{C}_{L-J}$ 在 $p(u)$ 上关于 ε, $\overline{\mathscr{T}}-(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 信息稳定；

ii) U_0^* 为由 $p(u)$ 决定的长度为 $\overline{N}$ 的随机码，$\overline{N}\leqslant 2^{\overline{\mathscr{T}}(1-2\varepsilon)}$（即 $N_l\leqslant 2^{\mathscr{T}_l(1-2\varepsilon)}$）；

iii) 取判决门限为 $\overline{K}=\overline{\mathscr{T}}(1-\varepsilon)$，

则对上述信息门限判决译码法有 $\bar{e}_0^*\to 0$.

证　首先由(4.20), (4.22)得

$$\bar{e}_1^*\leqslant\sum_t\sum_{\alpha\in\mathscr{V}(t)}p\{(u, v): i(\alpha, u_t, v_t)\leqslant\mathscr{T}_\alpha(1-\varepsilon)\}\leqslant T\cdot(L!)\varepsilon\to 0, \tag{4.23}$$

成立，又由(4.21)知

$$\begin{aligned}\bar{e}_2^*&\leqslant\sum_t\sum_{k_t\neq\varphi_t}p\{\text{对任何 }\alpha\subset\mathscr{V}(t),\ i(\alpha, u_{k_t}^*, v_t^*)>\mathscr{T}_\alpha(1-\varepsilon)\}\\&=\sum_t\sum_{\beta(t)<\mathscr{V}(t)}\sum_{k_t\in I(\beta(t))}p_{k_t}(A(t)),\end{aligned} \tag{4.24}$$

其中 $\beta(t)$ 为 $\mathscr{V}(t)$ 的非空子集，$p_{k_t}(\cdot)$ 为 $u_{k_t}^*$, v^* 的联合分布，而

$$I(\beta(t))=\{k_t:\ \text{如 }l\in\beta(t),\ k(l)\neq 0,\ \text{否则 }k(l)=0\},$$

$$A(t)=\{(u_t, v_t):\ \text{对任何 }\alpha\subset\mathscr{V}(t):\ i(\alpha, u_t, v_t)>\mathscr{T}_\alpha(1-\varepsilon)\}.$$

由(4.13)知，如 $u_t=(u_{\beta(t)}, u_{\overline{\beta}(t)})$，则

$$p_{k_t}(u_t, v_t)=p(u_{\beta(t)})p(v_{\overline{\beta}(t)}, u_t). \tag{4.24}$$

又由 $A(t)$ 定义知，如 $(u_t, v_t)\in A(t)$，则

$$i(u_\alpha, v_t/u_{\bar{\alpha}})=i(u_\alpha;\ u_{\bar{\alpha}}, v_t)>\mathscr{T}_\alpha(1-\varepsilon),$$

对任何 $\alpha\subset\mathscr{V}(t)$ 成立，此即

$$p(u_\alpha)\leqslant p(u_\alpha/u_{\bar{\alpha}}, v_t)\cdot 2^{-\mathscr{T}_\alpha(1-\varepsilon)},$$

如取 $\alpha=\beta(t)$，当 $k_t<I(\beta(t))$ 时将上式两边同乘 $p(u_{\bar{\alpha}}, v_t)$ 就得

$$p_{k_t}(u_t, v_t)\leqslant p_0(u_t, v_t)\cdot 2^{-\mathscr{T}_{\beta(t)}(1-\varepsilon)}$$

成立，因此　$$p_{k_t}(A(t))\leqslant p_0(A(t))\cdot 2^{-\mathscr{T}_{\beta(t)}(1-\varepsilon)}\leqslant 2^{-\mathscr{T}_{\beta(t)}(1-\varepsilon)}$$

成立，因为　$$|I(\beta(t))|<\prod_{l\in\beta(t)}N_l\leqslant 2^{\mathscr{T}_{\beta(t)}(1-2\varepsilon)},$$

因此　$$\bar{e}_2^*\leqslant\sum_t\sum_{\beta(t)\subset\mathscr{V}(t)}2^{-\mathscr{T}_{\beta(t)}\varepsilon}\to 0.$$

5) $\mathscr{C}_{L-J}$ 信道关于$(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$型 ε-专线的正、反编码定理

关于 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 的$(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$型 ε-专线前面已定义，在此我们先讨论 $\mathscr{C}_{L-J}$ 的$(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$型 ε-专线.

定理 3　对 $\mathscr{C}_{L-J}$ 有一列 $\varepsilon\to 0$, $\mathscr{C}_{L-J}$ 有 $\overline{N}\geqslant 2^{\overline{\mathscr{T}}(1-\varepsilon)}$ 条$(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})^*$型 ε-专线的充要条件是 $\mathscr{C}_{L-J}$ 为 $\overline{\mathscr{T}}-(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 信息稳定.

证　充分性由定理 1, 2 即得，如 $\mathscr{C}_{L-J}$ 为 $\overline{\mathscr{T}}-(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 信息稳定，则有一列 $\varepsilon\to 0$ 与 $\overline{M}=2^{\overline{\mathscr{T}}(1-2\varepsilon)}$，使 $\mathscr{C}_{L-J}$ 为 $\overline{M}-(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 可传，因此有一列 $\varepsilon'\to 0$，使 $\mathscr{C}_{L-J}$ 有 $\overline{N}\geqslant\overline{M}$ 条$(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$型 ε'-专线.

反之，如 $\mathscr{C}_{L-J}$ 有 $\overline{N}\geqslant 2^{\overline{\mathscr{T}}(1-\varepsilon)}$ 条$(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})^*$型 ε-专线，$\varepsilon\to 0$，且记之为

$$\{(u_k, B_k),\ k\in I\},\ U_0=\{u_k,\ k\in I\}, \tag{4.25}$$

上述 u_k, B_k 如(3.6), (3.4)所示，且有定义 2′)的 ii′)成立，不失一般性，我们可设 U_0 的元互不相同，作

$$p_l(u(l))=\begin{cases}\frac{1}{N_l}, & u(l)\in U_0(l),\\ 0, & u(l)\overline{\in} U_0(l).\end{cases}\tag{4.26}$$

上述 $U_0(l)=\{u_{k(l)}(l),\ k(l)\in I(l)\}$，而 $p(u)$, $p(u, v)$ 由(4.3)，(4.4)确定，对 $\alpha\subset\mathscr{L}$，记 $u_t=(u_\alpha, u_{\bar\alpha})$，且

$$D[\alpha, t]=\{(u_t, v_t):\ p(u_\alpha/u_{\bar\alpha}, v_t)\subset\varepsilon\},$$

则当 $(u_t, v_t)\in D[\alpha, t]$ 时

$$i(\alpha, u_t, v_t)=i(u_\alpha; u_{\bar\alpha}, v_t)\geqslant\log\frac{\varepsilon}{p(u_\alpha)},$$

因为在定义 2′ 中 ε 可任意放大，因此取 $\frac{1}{\mathscr{T}_l}\left(\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\to 0$，而

$$-\log p(u_\alpha)=\log(\prod_{l\in\alpha}\cdot N_l)\geqslant\mathscr{T}_\alpha(1-\varepsilon),$$

因此当 n 充分大时，有

$$i(\alpha, u_t, v_t)>\mathscr{T}_\alpha(1-2\varepsilon)\tag{4.27}$$

成立，另一方面，记

$$G[t]=\sum_{k_t\in I_t}u_{k_t}\otimes B'_{k_t},$$

B'_{k_t} 如(3.4)定义，I_t 即 $I_{\mathscr{T}(t)}$ 如记 $k=(k_{\mathscr{T}(t)}, k_{\overline{\mathscr{T}}(t)})$，有

$$\begin{aligned}p(G[t])&=\sum_{k_t}p(u_{k_t}\otimes B'_{k_t})=\sum_{k}p(u_k\otimes B_{k_t})\\&\geqslant\sum_{k}p(u_k\otimes B_k)\geqslant\sum_{k\in I_0}p(u_k)p(B_k/u_k)>1-2\varepsilon\end{aligned}$$

成立，上述 I_0 如定义 2′ 所记，记

$$E[t]=G[t]\cap D[\alpha, t]^c,\ D[\alpha, t]^c=U_t\otimes V_t\,|\,D[\alpha, t],$$

其中 U_t, V_t 即 $U_{\mathscr{T}(t)}$, $V_{\mathscr{D}(t)}$，这时有

$$p(G[t])=p(G[t]\cap D[\alpha, t])+p(E[t])\leqslant p(D[\alpha, t])+p(E[t])\tag{4.28}$$

成立，由 $D[\alpha, t]$ 定义与 B'_{k_t} 的互不相交性有

$$\begin{aligned}p(E[t])&=\sum_{(u_t, v_t)\in E[t]}p(u_t, v_t)=\sum_{(u_t, v_t)\in E[t]}p(u_{\bar\alpha}, v_t)p(u_\alpha/u_{\bar\alpha}, u_t)\\&\leqslant\varepsilon\cdot\sum_{(u_t, v_t)\in E[t]}p(u_{\bar\alpha}, v_t)\leqslant\varepsilon\cdot\sum_{(u_t, v_t)\in G[t]}p(u_{\bar\alpha}, v_t)\\&=\varepsilon\cdot\sum_{k_t}p(u_{k_{\bar\alpha}}\otimes B'_{k_t})\leqslant\varepsilon\end{aligned}$$

成立，将上式代入(4.28)即得

$$p(D[\alpha, t])>1-3\varepsilon,$$

由上式与(4.27)即得 $\mathscr{C}_{L-J}$ 为 $\mathscr{T}-(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 信息稳定， 证毕.

定理 3′ 对 $\mathscr{C}_{L-J}$ 有一列 $\varepsilon\to 0$ 与 $\overline{M}\geqslant 2^{\mathscr{T}(1-\varepsilon)}$，则 $\mathscr{C}_{L-J}$ 为 $\overline{M}-(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 可传的充要条件是 $\mathscr{C}_{L-J}$ 为 $\mathscr{T}-(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 信息稳定.

5. 一般($\mathscr{U}$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{V}$)网络的正、反编码定理

1) 拍发信号的 $\mathscr{U}$ 变换.

以下我们讨论图 1 的多路系统，记之为 $\mathscr{E}$，对图 2 的系统记为 $\mathscr{E}_0$，设 $Z=\prod_{l=1}^{L}\otimes Z(l)$

为一组辅助集合，F 为一个 $Z\Rightarrow U$ 的映射，我们称(Z, F)为 U 的一个 $\mathscr{U}$ 变换，如以下条件成立：

i) 对每个 j', $Z_{\mathscr{U}(j')}$ 与 $U(j')$的某个子集 1-1 对应，记为

$$Z_{\mathscr{U}(j')}\Leftrightarrow U_0(j')\subset U(j'), \tag{5.1}$$

上述映射我们记为 $F_{j'}$;

ii) $F=(F_1, \cdots, F_{J'})$, 如记 $U_0=\{u;\ u=F(z),\ z\in Z\}$，则显然有 $Z\Leftrightarrow U_0$ 为 1-1 对应.

这时记信道

$$\mathscr{C}_{L-J}=\left\{[Z,\ p(v/z),\ V],\ Z=\prod_{l=1}^{L}\otimes Z(l),\ V=\prod_{j=1}^{J}\otimes V(j)\right\}, \tag{5.2}$$

为 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 的一个 $\mathscr{U}$ 变换，上述

$$p(v/z)=p(v/F(z)), \tag{5.3}$$

因为 $\mathscr{U}$ 型入口码子 U_0(见(3.3))就是一个 $Z=I$ 的 $\mathscr{U}$ 变换，因此有

定理 4 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 有 $\overline{N}$ 条$(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$型 ε–专线的充要条件为(5.2), (5.3)的 $\mathscr{C}_{L-J}$ 有 $\overline{N}$ 条$(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$型 ε–专线.

2) $(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$网络的正、反编码定理.

定义 4 称 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 为 $\overline{\mathscr{T}}-(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$信息稳定，如有一组 $\mathscr{U}$ 变换(Z, F)，使 $\mathscr{C}_{L-J}$ 为 $\overline{\mathscr{T}}-(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$信息稳定.

定理 5 对 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 如存在一列 $\varepsilon\to 0$ 与 $\overline{M}\geqslant 2^{\overline{\mathscr{T}}(1-\varepsilon)}$ 使 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 为 $\overline{M}-(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$可传(或 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 有 $\overline{N}\geqslant\overline{M}$ 条$(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})^*$ 型 ε–专线)的充要条件是 $\mathscr{C}_{J'-J}$ 为 $\overline{\mathscr{T}}-(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$信息稳定.

证　由定理 2, 3, 4 即得.

对上面的论述我们还可直接引入 $\mathscr{U}$ 型随机码与一般$(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$系统的信息门限译码法及相应的误差估计定理，我们在此就不一一细述了，从定理 5 的结果可以知道，本文已在一般序列模型下解决了一般$(\mathscr{U}, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$网络编码的基本定理.

6. 关于信道信息变量区域的反编码定理

以下我们利用上述基本定理来讨论信道容量的计算问题，为了简单起见，以下均讨论$(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$系统，为此先引进以下记号：

i) 记 R^τ 为 τ 维欧氏空间，记 $\overline{R}$ 为它的向量，各分量非负，记 $\overline{R}=(R(1), \cdots, R(\tau))$，而

$$\overline{\overline{R}}_0=\{\overline{R};\ 0\leqslant R(\lambda)\leqslant R_0(\lambda),\ \lambda=1, \cdots, \tau\},$$

如 A 为 R^τ 的一个有界集合，记

$$G_0(A)=\bigcup_{\overline{R}\in\widetilde{A}}\overline{\overline{R}},\quad \widetilde{A}=\left\{\overline{R};\ \overline{R}=\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{R}_i,\ \overline{R}_i\in A\right\}, \tag{6.1}$$

上述 $\widetilde{A}$ 中 n 为任意自然数，而 $a_i\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$ 任取，记

$$G(A)=\overline{G_0(A)}, \tag{6.2}$$

为 $G_0(A)$ 的闭包，因此 $G(A)$ 为 A 的凸闭包，

ii) 全记 (α, t)（即 $t=1, \cdots, T, \alpha\subset\mathscr{V}(t)$ 任取）为 Δ，$|\Delta|=\tau$，而对(4.4)的联合分布 $p(u, v)$ 有

$$\bar{i}(u, v)=(i(\alpha, u_t, v_t), (\alpha, t)\in\Delta)$$

为 $U\otimes V$ 上 τ-维向量函数，上述 $i(\alpha, u_t, v_t)$ 由(4.7)定义，记

$$\mathscr{I}(\alpha, t)=\sum_{u,v}p(u, v)i(\alpha, u_t, v_t)$$

$$\mathscr{I}=(\mathscr{I}(\alpha, t), (\alpha, t)\in\Delta), \tag{6.3}$$

为 $(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 型公息向量，如 $\mathscr{C}_{L-J}$ 给定，记全体(4.3)的 p 为 $\widetilde{P}$，则 $\mathscr{I}=\mathscr{I}(p)$，为 $\widetilde{P}$ 上的函数，如记

$$D(\mathscr{C}_{L-J})=G(A),\ A=\{\mathscr{I}:\ \mathscr{I}=\mathscr{I}(p),\ p\in\widetilde{P}\}, \tag{6.4}$$

则称 $D(\mathscr{C}_{L-J})$ 为 $\mathscr{C}_{L-J}$ 的信道信息变量区域.

2) 关于信息变量区域的反编码定理

设 $\overline{N}=(N_1, \cdots, N_L)$ 为一个 L 维向量，记

$$\overline{N}'=(N(\alpha, t), (\alpha, t)\in\Delta),\ N(\alpha, t)=\prod_{l\in\alpha}N_l \tag{6.5}$$

为一个 τ 维向量，称之为由 $\overline{N}$ 决定.

定理6 如 $\mathscr{C}_{L-J}$ 有 $\overline{N}$ 条 $(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 型 ε-专线，$\varepsilon\to 0$，则对任何常数 $\delta_0>0$，当 n 充分大时，有

$$(1-\delta_0)\cdot\log\overline{N}'\in D(\mathscr{C}_{L-J}) \tag{6.6}$$

成立，上述 $\overline{N}'$ 由 $\overline{N}$ 决定，而

$$\log\overline{N}'=(\log N(\alpha, t), (\alpha, t)\in\Delta) \tag{6.7}$$

上述结论又称之为 $\mathscr{C}_{L-J}$ 关于 $D(\mathscr{C}_{L-J})$ 的反编码定理成立.

证 记 $\mathscr{C}_{L-J}$ 的 $\overline{N}$ 条 $(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$ 型 ε-专线为：$\{(u_k, B_k), k\in I\}$，u_k, B_k, I, U_0 等记号均与4中相同，$p_l, p(u), p(u, v)$ 如(4.26)，(4.3)，(4.4)定义，如记 $B_{k_\alpha}=\sum_{k_{\bar{\alpha}}}B_{k_t}$，其中 $\alpha\subset\mathscr{V}(t)$，$\bar{\alpha}=\mathscr{V}(t)|\alpha$，而 $k_t=(k_\alpha, k_{\bar{\alpha}})$，由定义2′得

$$\sum_{k_\alpha}p(u_{k_\alpha}\otimes B_{k_\alpha})=\sum_{k_t}p(u_{k_t}\otimes B_{k_\alpha})\geqslant\sum_{k_t}p(u_{k_t}\otimes B_{k_t})$$

$$=\sum_{k}p(u_k\otimes B_{k_t})\geqslant\sum_{k}p(u_k\otimes B_k)\geqslant\sum_{k\in I_0}p(u_k\otimes B_k)\geqslant 1-2\varepsilon \tag{6.8}$$

成立，由(6.3)定义知

$$\mathscr{I}(\alpha, t)=H(u_\alpha)-H(u_\alpha/u_{\bar{\alpha}}, v_t), \tag{6.9}$$

其中

$$H(u_\alpha)=-\sum_{u_\alpha}p(u_\alpha)\log p(u_\alpha)=\log N(\alpha, t), \tag{6.10}$$

$$H(u_\alpha/u_{\bar{\alpha}}, v_t)=-\sum_{u_tv_t}p(u_t, v_t)\log p(u_\alpha/u_{\bar{\alpha}}, v_t), \tag{6.11}$$

由[3]引理3.2与(6.8)，(4.26)得

$$H(u_\alpha/u_{\bar{\alpha}}, v_t)\leqslant H(u_\alpha/v_t)\leqslant 1+2\varepsilon\log N(\alpha, t) \tag{6.12}$$

成立，因此当 n 充分大时必有

$$\mathscr{I}(\alpha, t)\geqslant -1+(1-2\varepsilon)\log N(\alpha, t)\geqslant(1-\delta_0)\log N(\alpha, t)$$

成立，此即(6.6)成立. 证毕.

7. 无记忆多路通讯网络系统的正、反编码定理

1) 无记忆多路信道

我们现在利用上述基本定理来讨论无记忆多路信道的正、反编码定理，对此我们仍讨论$(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$型，记

$$\mathscr{C}_{L-J}=\left\{[U, p(v/u), V], U=\prod_{l=1}^{L}\otimes U(l), V=\sum_{j=1}^{J}\otimes V(j)\right\} \tag{7.1}$$

为一个多路信道，而

$$\mathscr{C}_{L-J}^{(n)}=\left\{[U^{(n)}, p(v^{(n)}/u^{(n)}), V^{(n)}], U^{(n)}=\prod_{l=1}^{L}\otimes U^{(n)}(l), V^{(n)}=\prod_{j=1}^{J}\otimes V^{(n)}(j)\right\} \tag{7.2}$$

为多路信道序列，$n=1, 2, \cdots$，如满足下述条件则称之为由$\mathscr{C}_{L-J}$产生的无记忆信道序列，如

i) $U^{(n)}(l)=\prod_{i=1}^{n}\otimes U^i(l)$, $V^{(n)}(j)=\prod_{i=1}^{n}\otimes V^i(j)$, $U^i(l)=U(l)$, $V^i(j)=V(j)$，因此

$$U^{(n)}=\prod_{i=1}^{n}\otimes U^i, V^{(n)}=\prod_{i=1}^{n}\otimes V^i, U^i=U, V^i=V, \tag{7.3}$$

相应的元为

$$u^{(n)}=(u^1, \cdots, u^n), v^{(n)}=(v^1, \cdots, v^n), u^i\in U, v^i\in V, \tag{7.4}$$

而$u^i=(u^i(1), \cdots, u^i(L))$, $v^i=(v^i(1), \cdots, v^i(J))$，对$u^{(n)}(l)$, $v^{(n)}(j)$也有(7.4)类似的表示；

ii)
$$p^{(n)}(v^{(n)}/u^{(n)})=\prod_{i=1}^{n}p(v^i/u^i), \tag{7.5}$$

2) 无记忆信道的信息变量区域的性质

对上述$\mathscr{C}_{L-J}$, $\mathscr{C}_{L-J}^{(n)}$前面已定义了信道信息变量区域$D(\mathscr{C}_{L-J})$与$D(\mathscr{C}_{L-J}^{(n)})$，以下简记为$D$, $D^{(n)}$，我们讨论它们的性质，如$\bar{R}\in R^\tau$，记$n\bar{R}=(nR(1), \cdots, nR(\tau))$，而

$$nD=\{n\bar{R}: \bar{R}\in D\}, \tag{7.6}$$

引理 1　对上述无记忆信道$\mathscr{C}_{L-J}$必有$D^{(n)}\supset nD$成立。

证　记

$$p^i=(p_1^i, \cdots, p_L^i), \quad (i=1, \cdots, n), \tag{7.7}$$

为$U^i=U$上的入口分布(见(4.3)定义)作$p^{(n)}=(p_1^{(n)}, \cdots, p_L^{(n)})$为(4.3)的$U^{(n)}$上的入口分布，而

$$p_l^{(n)}(u^{(n)}(l))=\prod_{i=1}^{n}p_l^i(u^i(l)), \quad (l=1, \cdots, L), \tag{7.8}$$

由(7.8)与$\mathscr{C}_{L-J}^{(n)}$的无记忆性知有

$$\mathscr{I}(p^{(n)})=\sum_{i=1}^{n}\mathscr{I}(p^i)\subset D^{(n)}, \tag{7.9}$$

成立，对任何$p\in\widetilde{P}$，如取$p^i=p$由(7.9)即得

$$n\mathscr{I}(p)\subset D^{(n)},$$

因此$nD\subset D^{(n)}$成立。　　证毕。

定理7 对无记忆多址信道$(J=1)\mathscr{C}_{L-1}^{(n)}$有$D^{(n)}=nD$成立.

证 我们只要证$D^{(n)}\subset nD$就可，如记$p^{(n)}$为$U^{(n)}$上的概率分布由(4.3)定义，记$p^{(n)}$在U^i上的边际分布为p^i，这时p^i也为(4.3)型，由$p^{(n)}(v^{(n)}/u^{(n)})$的无记忆性可得

$$\mathscr{I}(p^{(n)})\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mathscr{I}(p^i)<nD,$$

即得$D^{(n)}\subset nD$, 证毕.

3) 无记忆信道的编码定理.

定理8 对上述无记忆信道序列$\mathscr{C}_{L-J}^{(n)}$，设$\bar{R}$为任一L维向量，如由$\bar{R}$决定的$\bar{R}'\in D$，则对任何$\varepsilon_0>0$只要n充分大$\mathscr{C}_{L-J}^{(n)}$就有$\bar{N}\geqslant 2^{n\bar{R}(1-\varepsilon_0)}$条$(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})$型$\varepsilon_0$-专线，我们称之为$\mathscr{C}_{L-J}^{(n)}$关于$D$的编码定理成立.

证

i) 首先由定理2知$\mathscr{C}_{L-J}^{(n)}$关于$\bigcup_{p\in\tilde{P}}\mathscr{I}(p)$的编码定理成立，如作入口分布

$$p^{(n)}(u^{(n)})=\prod_{i=1}^{n}p^i(u^i),\quad(p^i=p),\tag{7.10}$$

由$\mathscr{C}_{L-J}^{(n)}$的无记忆性知$\mathscr{C}_{L-J}^{(n)}$在$p^{(n)}(u^{(n)})$上$n\mathscr{I}(p)$—信息稳定，因此本结论成立.

ii) 如$\bar{R}'\in D$，由D的定义知，对任何$\varepsilon_0>0$，有一个$\bar{R}''\geqslant\bar{R}'\left(1-\frac{\varepsilon_0}{8}\right)$，而$\bar{R}''=\sum_{i=1}^{m}a_i\mathscr{I}(p^i)$，固定上述$m$, a_i, p^i，知有一组有理数$a_i'=\frac{K_i}{K}$, $\left(K=\sum_{i=1}^{m}K_i\right)$，使

$$\bar{\gamma}=\sum_{i=1}^{m}a_i'\mathscr{I}(p^i)\geqslant\bar{R}'\left(1-\frac{\varepsilon_0}{4}\right),$$

成立，作$p^{(K_i)}(u^{(K_i)})$为K_i个$p^i(u^i)$的乘积分布，而$p^{(K)}(u^{(K)})$为$p^{(K_i)}(u^{(K_i)})$, $(i=1, \cdots, m)$的乘积分布，有

$$\mathscr{I}(p^{(K)})=\sum_{i=1}^{m}K_i\mathscr{I}(p^i)\geqslant K\bar{R}'\left(1-\frac{\varepsilon_0}{4}\right)$$

成立;

iii) 对固定的K, $\mathscr{C}_{L-J}^{(nK)}$, $(n=1, 2, \cdots)$仍为无记忆信道序列，由i)知当n充分大时$\mathscr{C}_{L-J}^{(nK)}$有$\bar{N}^{(nK)}\geqslant 2^{nK\bar{R}'\left(1-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}$条$(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})^*$型$\varepsilon_0$-专线，由此可得，当$n$充分大时$\mathscr{C}_{L-J}^{(n)}$有$\bar{N}\geqslant 2^{n\bar{R}(1-\varepsilon_0)}$条$(\mathscr{U}_0, \mathscr{Y}, \mathscr{V})^*$型$\varepsilon_0$-专线， 证毕.

由定理6, 7, 8即得，D为一般无记忆信道的可达速率区域，对多址信道则为容量区域这些结果与[5]—[10]中的部分结果符合.

由上讨论可见本文在一般序列模型下解决了编码的基本特征问题，因此这些结论具有较大的普遍性，从这些结论还可见到关于一般网络系统信道容量区域的计算问题还没有完全解决，因此还须对信道容量区域的性质作更深入的讨论，有关结论可参见[5]—[10]文有关结果.

利用本文结果还可进一步讨论有记忆多路信道的编码问题与误差界定理，我们在此就不一一细述了.

参 考 文 献

[1] E. C. Van der Meulen, *IEEE Trans. Inform. Theory*, TI-**23** (1977), 1—37.
[2] 沈世镒，复合系统信息传输的若干问题，(未发表).
[3] 胡国定，数学学报 **11**: 3 (1961), 260—294.
[4] Hu Guo-Ding, Third Prague Conference on Information Theory etc. (1962).
[5] Slepian D., and Wolf, J. K., *The Bell Sys. Tech. Journal*, **52** (1973), 1037—1076.
[6] Te Sun Han, *Inform. and Contr.*, **40**: 1 (1979), 37—61.
[7] Cover, M., *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-**18** (1972), 629—637.
[8] E. C. Van der Meulen, 同上, IT-**21** (1975), 180—190.
[9] Hajek, B., and Pursley, B. 同上, IT-**25** (1979), 36—46.
[10] Marton, K., 同上, IT-**25** (1979), 306—311.

THE FUNDAMENTAL THEOREM OF INFORMATION TRANSMISSION FOR GENERAL MULTI-USER COMMUNICATION NETWORK SYSTEMS

SHEN SHIYI
(*Nankai University*)

ABSTRACT

In this paper, we first give a definition of the general multi-user communication network system, and introduce the coding type ($\mathscr{U}$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{V}$) and ($\mathscr{U}_0$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{V}$) for the general network systems (cf. Fig. 1, 2). We obtain the following results:

1. For the above ($\mathscr{U}$'$\mathscr{Y}$,$\mathscr{V}$) type network system, in the general sequence model, the Shannon theorem of information transmission, the coding theorem of multi-user channel and their converse hold water;

2. The converse coding theorem holds water on the region D ($\mathscr{C}^{(n)}_{L-J}$) (see(6.4)) for the general sequence model of ($\mathscr{U}_0$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{V}$) type network system;

3. On the memoryless multi-user channel for ($\mathscr{U}_0$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{V}$) type network system, the $D(\mathscr{C}_{L-J})$ is an achievable vetes region

For the memoryless multiple-access channel, the $D(\mathscr{C}_{L-J})$ is the capacity region,

4. For general ($\mathscr{U}_0$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{V}$) type multi-user communication network system, we set up a new decoding method, whick is said to be information threshold distinguishing decoding.