数 学 年 刊
2 (1) 1981

线性估计弱相合性的一个问题

陈 希 孺
(中国科学技术大学)

§1. 引言和主要结果

设有线性回归模型

$$Y_i=x_i'\beta+e_i, (i=1, \cdots, n, \cdots), \tag{1}$$

其中 $x_i=(x_{i1}, \cdots, x_{ip})'$, $(i=1, 2, \cdots)$, 为一串已知向量(试验点列), $\beta=(\beta_1, \cdots, \beta_p)'$ 为未知的回归系数向量, $\{e_i\}$ 为随机误差序列. 我们称 $\{e_i\}$ 满足 Gauss-Markov 条件(简称 GM 条件), 如果

$$E(e_i)=0,\ E(e_ie_j)=\sigma^2\delta_{ij},\ (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots),\ 0<\sigma^2<\infty. \tag{2}$$

此处 $\delta_{ij}=1$ 或 0, 视 $i=j$ 或否而定. 若除(2)外还假定 e_i 都服从正态分布, 则称 $\{e_i\}$ 满足正态条件.

记 $X_n=(x_1\cdots x_n)'$. 若 X_n 的秩为 p, 则在(1)的前 n 次试验的基础上, 可求出 β 的最小二乘(LS)估计为

$$\hat{\beta}(n)=(\hat{\beta}_1(n),\ \cdots,\ \hat{\beta}_p(n))'=S_n^{-1}X_n'(Y_1,\ \cdots,\ Y_n)'.$$

这里 $S_n=X_n'X_n$. 在 GM 条件下, $\hat{\beta}(n)$ 是 β 的弱相合估计(简记为 WCE)的充要条件为 $S_n^{-1}\to 0$(见[1]). 这结果可以表述为更一般的形式: 若当 n 充分大时, 线性函数 $c'\beta$ 在(1)的前 n 次试验的基础上可估, 则 $c'\beta$ 的 Gauss-Markov (GM) 估计为弱相合的充要条件, 是它的方差趋于 0, 这说明: 在 GM 条件下, 可估函数的 GM 估计的弱相合性与均方相合性等价.

形如

$$T_n=c_{n0}+\sum_{i=1}^{n}c_{ni}Y_i,\quad (n=1,\ 2,\ \cdots). \tag{3}$$

的估计, 称为线性估计. 在 GM 条件下, 甚至进一步要求 $e_1, e_2, \cdots$ 同分布或者独立, 也不能排斥如下的可能性: $c'\beta$ 的 GM 估计不是 WCE, 但是存在着其他线性的 WCE. 在[1]中我们证明了: 在 $\{e_i\}$ 满足正态条件时, 这种可能性不存在. 本文将正态条件削弱为只要求 $e_1, e_2, \cdots$ 相互独立, 得到了比较彻底的结果.

定理 设 $\{e_i\}$ 为满足 GM 条件及下述条件(A)的独立随机变量序列.

(A)不存在常数 a 及自然数子序列 $\{n_k\}$, 使

$$e_{n_k}\xrightarrow{P}a,\ 当\ k\to\infty\ 时,$$

本文 1980 年 2 月 29 日收到.

则当可估函数 $c'\beta$ 的 GM 估计不为 $c'\beta$ 的 WCE 时，任何形如(3)的线性估计都不是 $c'\beta$ 的 WCE.

反过来，若条件(A)不满足，则可以找到试验点列 $\{x_i\}$ 及可估函数 $c'\beta$，使 $c'\beta$ 的 GM 估计不为 WCE，但 $c'\beta$ 的其他某个线性估计却为其 WCE.

在研究这个问题的过程中我们附带证明了以下的有趣结果：在 $\{e_i\}$ 满足 GM 条件下，若可估函数 $c'\beta$ 的 GM 估计不是 $c'\beta$ 的均方相合估计，则 $c'\beta$ 的线性均方相合估计根本不存在. 为了避免误解，此处及下文都约定称 $c'\beta$ 可估，是指它在(1)的前 n 次试验的基础上可估，当 n 充分大时.

§2. 两个引理

本文主要定理的证明依赖于两个有独立兴趣的引理. 其中之一，即引理1，证明了§1末尾处提到的关于均方相合的事实，又以下沿用§1的记号.

引理1 设 $\{e_i\}$ 满足 GM 条件而 β_1 可估，则由(3)给出的线性估计 T_n 为 β_1 的均方相合估计的充要条件为

$$\lim_{n\to\infty} c_{n0}=0, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n c_{ni}x_{i1}=1, \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n c_{ni}x_{ij}=0,\quad (j=2,\ \cdots,\ p), \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n c_{ni}^2=0. \tag{7}$$

又若 $c'\beta$ 为可估，则当其 GM 估计不为均方相合时，其任何线性估计决非均方相合.

证 由定义，T_n 为 β_1 的均方相合估计的充要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty}E[(T_n-\beta_1)^2]=0$. 但

$$T_n-\beta_1=c_{n0}+\left(\sum_{i=1}^n c_{ni}x_{i1}-1\right)\beta_1+\sum_{j=2}^p\sum_{i=1}^n c_{ni}x_{ij}\beta_j+\sum_{j=1}^n c_{ni}e_i,$$

因而由 $\{e_i\}$ 满足 GM 条件知

$$E[(T_n-\beta_1)^2]=\left[c_{n0}+\left(\sum_{i=1}^n c_{ni}x_{i1}-1\right)\beta_1+\sum_{j=2}^p\sum_{i=1}^n c_{ni}x_{ij}\beta_j\right]^2+\sigma^2\sum_{i=1}^n c_{ni}^2.$$

为了 $\lim\limits_{n\to\infty}E[(T_n-\beta_1)^2]=0$ 对任何 $\beta_1,\ \cdots,\ \beta_p$ 都成立，显然必须只须(4)—(7)同时成立，这证明了引理的第一部分. 为证后一部分，注意通过在必要时改换参数，不失普遍性可设 $c'\beta=\beta_1$. 记

$$\xi_{jn}=(x_{1j},\ \cdots,\ x_{nj})',\ (j=1,\ \cdots,\ p),$$

必要时适当改换参数，不失普遍性可设当 n 充分大时，$\xi_{1n},\ \cdots,\ \xi_{pn}$ 线性无关，以 η_n 记 ξ_{1n} 在由 $\xi_{2n},\ \cdots,\ \xi_{pn}$ 所张成的线性子空间 $\mathscr{M}_n$ 内的投影，则 η_n 可唯一表示为

$$\eta_n=d_{2n}\xi_{2n}+\cdots+d_{pn}\xi_{pn},\ n\ 充分大. \tag{8}$$

设 β_1 的 LS 估计 $\hat{\beta}_1(n)$ 不为均方相合，则 $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1(n))\downarrow v>0$ 当 $n\to\infty$ 时. 后面我们将证明

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1(n))=\sigma^2/\|\zeta_n\|^2,\ \zeta_n=\xi_{1n}-\eta_n, \tag{9}$$

因而存在常数 $R<\infty$，致

$$\|\zeta_n\|\leqslant R. \tag{10}$$

现在再证存在 $K<\infty$，使 $|d_{in}|\leqslant K$ 当 n 充分大时，$(i=2, \cdots, p)$，事实上，若这种 K 不存在，则为确定计且不失普遍性，可找到自然数子序列 $\{n_r\}$，致

$$\lim_{r\to\infty}|d_{2n_r}|=\infty, \tag{11}$$

在(8)中改 n 为 n_r，并记 $f_{ir}=d_{in_r}/d_{2n_r}$，有

$$\eta_{n_r}=d_{2n_r}\left(\xi_{2n_r}+\sum_{i=3}^{p}f_{ir}\xi_{in_r}\right). \tag{12}$$

因为当 n 充分大时 $\xi_{2n}, \cdots, \xi_{pn}$ 线性无关，存在自然数 d，致

$$u_r=\xi_{2n_r}+\sum_{i=3}^{p}f_{ir}\xi_{in_r}\neq 0, \text{ 当 } r\geqslant d \text{ 时}, \tag{13}$$

以 α 记 ξ_{2n_d} 在 $\{\xi_{jn_d}, j=3, \cdots, p\}$ 所张成的线性子空间上的投影，而 $\delta=\xi_{2n_d}-\alpha$，则 $\delta\neq 0$. 对任何 $r\geqslant d$，以 b_r 记 u_r 的前 n_d 个分量构成的列向量，则由 u_r 的定义(13)式及 δ 的定义，知

$$\|b_r\|\geqslant\|\delta\|, \quad r\geqslant d. \tag{14}$$

以 θ_r 记 η_{n_r} 的前 n_d 个分量构成的列向量．由(10)—(14)，有

$$\begin{aligned} R\geqslant\|\zeta_{n_r}\|&=\|\xi_{1n_r}-\eta_{n_r}\|\geqslant\|\xi_{1n_d}-\theta_r\|\geqslant\|\theta_r\|-\|\xi_{1n_d}\|\\ &=\|d_{2n_r}b_r\|-\|\xi_{1n_d}\|\geqslant|d_{2n_r}|\,\|\delta\|-\|\xi_{1n_d}\|\to\infty.\end{aligned}$$

这与 $R<\infty$ 矛盾，因而证明了所述 K 的存在性．

现设 β_1 有线性均方相合估计(3)．由本引理已证部分，知(4)—(7)成立．上面已证明了 $\{d_{jn}, (j=2, \cdots, p), n$ 充分大$\}$ 的有界性，故可以用 $-d_{jn}$ 乘(6)式，并与(5)式相加，$(j=2, \cdots, p)$，得

$$1=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}c_{ni}\left(x_{i1}-\sum_{j=2}^{p}d_{jn}x_{ij}\right)=\lim_{n\to\infty}c_n'\zeta_n, \tag{15}$$

此处 $c_n'=(c_{n1}, \cdots, c_{nn})$．另一方面，由(7)和(10)得

$$(c_n'\zeta_n)^2\leqslant\|c_n\|^2\|\zeta_n\|^2\leqslant R^2\|c_n\|^2\to 0,$$

当 $n\to\infty$ 时．这与(15)矛盾，因而(3)不能是 β_1 的均方相合估计．现往证(9)式．在 GM 条件下，如所周知，若以 g 记 S_n^{-1} 的(1, 1)元，则 $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1(n))=\sigma^2 g$．记 $B=(\xi_{2n}\cdots\xi_{pn})$，则

$$S_n=\begin{pmatrix}\|\xi_{1n}\|^2 & \xi_{1n}'B\\ B'\xi_{1n} & B'B\end{pmatrix},$$

由

$$\begin{aligned} g^{-1}&=\|\xi_{1n}\|^2-\xi_{1n}'B(B'B)^{-1}B'\xi_{1n}\\ &=\|\xi_{1n}-B(B'B)^{-1}B'\xi_{1n}\|^2=\|\xi_{1n}-\eta_n\|^2=\|\zeta_n\|^2.\end{aligned}$$

这证明了(9)式，因而完成了引理 1 的证明(此处利用了 $B(B'B)^{-1}B'$ 为向 $\mathscr{M}_n$ 投影的算子这个事实)．

引理 2　设 $\{e_i\}$ 为独立随机变量序列，满足如下的条件(A')：

(A')不存在常数序列 $\{a_k\}$ 及自然数子序列

$$\{n_k\}, \text{ 致 } e_{n_k}-a_k\xrightarrow{P}0 \text{ 当 } k\to\infty \text{ 时}.$$

又设 $c_{n1}, \cdots, c_{nn}, b_n, (n=1, 2, \cdots)$ 为给定的常数，致

$$Z_n=\sum_{i=1}^{n}c_{ni}e_i-b_n\xrightarrow{P}0, \tag{16}$$

则有

$$d_n^2=\sum_{i=1}^{n}c_{ni}^2\to 0,\ \text{当}\ n\to\infty\ \text{时}, \tag{17}$$

证　作随机变量 $e_1^*, e_2^*, \cdots$, 致 $e_1, e_1^*, e_2, e_2^*, \cdots$ 相互独立，且对每个 i, e_i 与 e_i^* 同分布，记 $e_i^s=e_i-e_i^*$. 由(16)知，当 $n\to\infty$ 时，$Z_n^*=\sum_{i=1}^{n}c_{ni}e_i^*-b_n\xrightarrow{P}0$, 故

$$Z_n^s=Z_n-Z_n^*=\sum_{i=1}^{n}c_{ni}e_i^s\xrightarrow{P}0. \tag{18}$$

现证在引理条件下，存在 $m>0$, 使

$$P(|e_i^s|\geqslant m)\geqslant m,\ (i=1, 2, \cdots). \tag{19}$$

事实上，若这样的 m 不存在，则可找到自然数子序列 $\{n_k\}$, 致 $e_{n_k}^s\xrightarrow{P}0$ 当 $k\to\infty$ 时，以 μ_i 记 e_i 的中位数，则对任给 $\varepsilon>0$ 有(见[2], p. 245).

$P(|e_{n_k}-\mu_{n_k}|\geqslant\varepsilon)\leqslant 2P(|e_{n_k}^s|\geqslant\varepsilon)\to 0$, 当 $k\to\infty$ 时，即 $e_{n_k}-\mu_{n_k}\xrightarrow{P}0$, 这与 $\{e_i\}$ 满足条件(A′)矛盾.

现作如下的补充假定：存在 $M<\infty$, 使

$$P(|e_i^s|>M)=0,\ (i=1, 2, \cdots), \tag{20}$$

则将有 $E(e_i^s)=0$, $(i=1, 2, \cdots)$. 又由(19), (20), 有

$$E[(e_i^s)^2]\geqslant m^3,\quad E(|e_i^s|^3)\leqslant M^3,$$

故若以 $f_i(t)$ 记 e_i^s 的特征函数，将有

$$|f_i(t)|\leqslant 1-t^2m^3/2+|t^3|M^3/6,\ (i=1, 2, \cdots),$$

因而存在与 i 无关的常数 $\eta>0$, $\delta>0$, 致

$$|f_i(t)|\leqslant 1-\delta t^2,\ \text{当}\ |t|\leqslant\eta\ \text{时}, (i=1, 2, \cdots), \tag{21}$$

显然可设 $\delta\eta^2<1$. 若(17)式不对，则存在常数 $A>0$ 及自然数子序列 $\{n_k\}$, 致 $d_{n_k}^2\geqslant A$, $(k=1, 2, \cdots)$, 记 $c'_{ki}=c_{n_ki}/d_{n_k}$, $(i=1, \cdots, n_k)$, 有

$$\sum_{i=1}^{n_k}c'^2_{ki}=1, \tag{22}$$

由 $d_{n_k}^2\geqslant A>0$ 及(18), 得

$$W_k=\sum_{i=1}^{n_k}c'_{ki}e_i^s\xrightarrow{P}0. \tag{23}$$

W_k 的特征函数为

$$\varphi_k(t)=\prod_{i=1}^{n_k}f_i(c'_{ki}t). \tag{24}$$

由于 $|c'_{ki}|\leqslant 1$, 由(21)有

$$|f_i(c'_{ki}t)|\leqslant 1-\delta c'^2_{ki}t^2,\ \text{当}\ |t|\leqslant\eta\ \text{时}, (i=1, \cdots, n_k), \tag{25}$$

由(24), (25), $\delta\eta^2<1$, 以及 $\log(1-x)<-x$ 当 $0<x<1$ 时，有

$$\log|\varphi_k(t)|=\sum_{i=1}^{n_k}\log|f_i(c'_{ki}t)|\leqslant-\delta t^2\sum_{i=1}^{n_k}c'^2_{ki}=-\delta t^2\not\to 0,$$

这与(23)矛盾，因而在补充条件(20)之下证明了(17).

现考虑一般情况，仍用反证法，若(17)式不对，则如前，有 A, $\{n_k\}$, c'_{ki}, 及(22), (23)

式，现再证

$$\{c'_{k1}e^s_1,\ \cdots,\ c_{kn_k}e^s_{n_k}\},\ (k=1,\ 2,\ \cdots).$$

适合 uan 条件(见[2], p. 302)．事实上，若以 $f_{ki}(t)$ 记为 $c'_{ki}e^s_i$ 的特征函数，则因 e^s_i 对称，有 $f_{ki}(t)\geqslant 0$．又由(23)知 $\lim\limits_{k\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n_k} f_{ki}(t)=1$ 对任何 t，故有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n_k}|1-f_{ki}(t)|\leqslant 1-\prod_{i=1}^{n_k} f_{ki}(t)\to 0.$$

这证明了所要的结论(参看[2], p. 302—303)．这与(23)结合，根据[2], p. 317, 并利用 e^s_i 的对称性，知对任给 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} dF_{ki}(x)=0, \tag{26}$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k}\int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{ki}(x)=0, \tag{27}$$

这里 $F_{ki}(x)$ 为 $c'_{ki}e^s_i$ 的分布函数．现任取 $M>m$(m 的意义见(19)式)，并定义

$$\hat{e}_i=\min(M,\ \max(-M,\ e^s_i)),\ (i=1,\ 2,\ \cdots),$$

则 $\{\hat{e}_i\}$ 为一相互独立的对称随机变量序列，满足条件

$$P(|\hat{e}_i|\geqslant m)\geqslant m,\quad P(|\hat{e}_i|>M)=0,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots), \tag{28}$$

又若以 $\hat{F}_{ki}$ 记 $c'_{ki}\hat{e}_i$ 的分布函数，则对任给 $\varepsilon>0$ 有

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} d\hat{F}_{ki}(x)\leqslant\int_{|x|\geqslant\varepsilon} dF_{ki}(x),$$

$$\int_{|x|<\varepsilon} x^2 d\hat{F}_{ki}(x)\leqslant\int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{ki}(x)+c'^2_{ki}M^2\int_{|x|>\varepsilon} dF_{ki}(x).$$

由此及(22), (26), (27), 得知(26), (27)式将 $F_{ki}(x)$ 改为 $\hat{F}_{ki}(x)$ 时，仍保持成立．再利用[2], p. 317, 3°, 即得

$$\sum_{i=1}^{n_k} c'_{ki}\hat{e}_i\xrightarrow{P}0,\ \text{当 } k\to\infty \text{ 时}, \tag{29}$$

因为 $\{\hat{e}_i\}$ 满足(28)，由已证部分，由(29)将得

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k} c'^2_{ki}=0,$$

这与(22)矛盾，因而证明了本引理．

§3. 定理的证明

现在来证明 §1 中提出的定理．先证，若 $\{e_i\}$ 满足定理的条件，则必满足引理 2 的条件(A′)．

事实上，若条件(A′)不满足，则存在常数序列 $\{a_k\}$ 及自然数子序列 $\{n_k\}$，使

$$e_{n_k}-a_k\xrightarrow{P}0,\ \text{当 } k\to\infty \text{ 时}, \tag{30}$$

易见 $\{a_k\}$ 有界．不然的话，必要时抽出子序列，不失普遍性可设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=\infty$．由(30)知

$$\lim_{k\to\infty} P(|e_{n_k}|\geqslant a_k-1)=1. \tag{31}$$

另一方面，由 $E(e^2_{n_k})=\sigma^2$ 知 $P(|e_{n_k}|\geqslant a_k-1)\leqslant\sigma^2/(a_k-1)^2\to 0$ 当 $k\to\infty$ 时，与(31)矛盾，

因而证明了 $\{a_k\}$ 的有界性. 由此可从 $\{a_k\}$ 中取出一个收敛于有限极限 a 的子序列，为方便计且不失普遍性，设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=a$，此与(30)结合将给出 $e_{n_k}-a\xrightarrow{P}0$，与 $\{e_i\}$ 满足条件(A)矛盾，这证明了 $\{e_i\}$ 满足条件(A′).

现设 $c'\beta$ 可估，但其 GM 估计不为弱相合，不失普遍性，不妨假定 $c'\beta=\beta_1$(这可通过适当改换参数做到). 若由(3)确定的 T_n 为 β_1 的线性 WCE，则由

$$T_n-\beta_1=\Big(\sum_{i=1}^n c_{ni}x_{i1}-1\Big)\beta_1+\sum_{j=2}^p\sum_{i=1}^n c_{ni}x_{ij}\beta_j+\Big(c_{n0}+\sum_{i=1}^n c_{ni}e_i\Big),$$

而且这表达式对 $\beta_1, \cdots, \beta_p$ 的任何值都依概率收敛于 0，知(5)，(6)两式成立，且

$$c_{n0}+\sum_{i=1}^n c_{ni}e_i\xrightarrow{P}0,\ \text{当}\ n\to\infty\ \text{时}. \tag{32}$$

根据定理的假定及上文的论证，$\{e_i\}$ 满足引理 2 的一切条件，故由引理 2 知(7)式成立. 因此

$$\lim_{n\to\infty}E\Big[\Big(\sum_{i=1}^n c_{ni}e_i\Big)^2\Big]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n c_{ni}^2\sigma^2=0.$$

这推出 $\sum\limits_{i=1}^n c_{ni}e_i\xrightarrow{P}0$，当 $n\to\infty$ 时. 与(32)结合，即知(4)式成立，这样，(4)—(7)全成立，由引理 1，知 T_n 为 β_1 的均方相合估计. 再由引理 1，知 β_1 的 LS 估计为均方相合，与假设矛盾，这证明了定理的前一部分.

现设 $\{e_i\}$ 不满足条件(A)，即存在自然数子序列 $\{n_k\}$ 及常数 a，使 $e_{n_k}-a\xrightarrow{P}0$ 当 $k\to\infty$ 时，记 $\tilde e_k=e_{n_k}-a$. 找自然数子序列 $\{k_j\}$，致

$$P(|\tilde e_{k_j}-a|\geqslant 1/j^2)\leqslant 1/j,\ (j=1, 2, \cdots), \tag{33}$$

任取 p 维向量 d. 取试验点列 $\{x_i\}$ 如下

$$x_i=\begin{cases} d/j, & \text{当}\ i=n_{k_j}\ \text{时},\ (j=1, 2, \cdots),\\ 0, & \text{其他}\ i.\end{cases}$$

则显然 $d'\beta$ 为可估的. 对充分大的 n，取 $d'\beta$ 的线性估计 $T_n=c_{n0}+\sum\limits_{i=1}^n c_{ni}Y_i$ 如下：先找出最大的自然数 j，满足条件 $n_{k_j}\leqslant n$，然后令

$$c_{n0}=-ja,\quad \begin{cases} c_{ni}=j, & \text{当}\ i=n_{k_j}\ \text{时},\\ c_{ni}=0, & \text{对其他}\ i.\end{cases}$$

这时易见 $T_n=d'\beta+j\tilde e_{k_j}$，因而由(33)得

$$P(|T_n-d'\beta|\geqslant 1/j)\leqslant 1/j.$$

因为当 $n\to\infty$ 时有 $j\to\infty$，得知 T_n 为 $d'\beta$ 的 WCE. 但易见 $d'\beta$ 的 GM 估计为 $\psi_n=\sum\limits_{i=1}^j\frac{1}{i}Y_{m_i}\Big/\sum\limits_{i=1}^j\frac{1}{i^2}$，此处 $m_i=n_{k_i}$，j 与 n 的关系同上. 有

$$\mathrm{Var}(\psi_n)=\sigma^2\Big(\sum_{i=1}^j 1/i^2\Big)^{-1}.$$

它当 $n\to\infty$ 时不趋于 0，因而 ψ_n 不为 $d'\beta$ 的 WCE. 证毕.

从本文结果及其证明过程，可以提供以下两点有意义的解释.

首先，我们前已指出，在 GM 条件下，可估函数的 GM 估计的弱相合性与均方相合性

等价，在证明本文定理的过程中，我们得到：若 $\{e_i\}$ 满足本文定理的条件，则对一般线性估计而言，上述等价性也成立，而当 $\{e_i\}$ 不满足定理中的条件(A)时则不然.

其次，设某个可估函数 $c'\beta$，为方便计且不失普遍性，就设 $c'\beta=\beta_1$，其 LS 估计为弱相合. 这时，若由(3)式所定义的线性估计 T_n 也是 β_1 的 WCE，且 $\{e_i\}$ 满足本文定理的条件，则如上所述，T_n 也是 β_1 的均方相合估计. 有 $\mathrm{Var}(T_n)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}c_{ni}^2$. 但由引理 1 的证明看出(见(15)式)，这时有 $\lim_{n\to\infty}c_n'\zeta_n=1$(记号意义见引理 1). 因而由

$$\mathrm{Var}(T_n)/\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1(n))=\|c_n\|^2\|\zeta_n\|^2,$$

以及 $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1(n))=E[(\hat{\beta}_1(n)-\beta_1)^2]$ 知

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty}[E(T_n-\beta_1)^2/E(\hat{\beta}_1(n)-\beta_1)^2]\\ &\geqslant\liminf_{n\to\infty}[\mathrm{Var}(T_n)/\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1(n))]\geqslant\liminf_{n\to\infty}\|c_n\|^2\|\zeta_n\|^2\\ &\geqslant\lim_{n\to\infty}(c_n'\zeta_n)^2=1.\end{aligned}$$

这说明：在平方损失函数之下，若一可估函数 $c'\beta$ 的 GM 估计 ψ_n 为弱相合的，则在 $c'\beta$ 的一切弱相合线性估计的类中，ψ_n 具有一致最小的渐近风险. 因而，不可能存在这样的线性估计(不论是否弱相合) T_n，使

$$\liminf_{n\to\infty}[E(T_n-c'\beta)^2/E(\psi_n-c'\beta)^2]\leqslant1.$$

对一切 β，且不等号至少对一个 β 成立. 这可以解释为，$c'\beta$ 的 GM 估计 ψ_n 为"渐近可容许"的，当样本大小 n 固定时，关于线性估计在全体线性估计类中的可容许性问题(在平方损失下)有深入的研究(见[3])，特别是证明了：可估函数的 GM 估计在全部线性估计的类中是可容许的. 上面指出的"渐近可容许性"从大样本的角度补充和加强了这个结论.

参 考 文 献

[1] 陈希孺, *Scientia Sinica, Sp. Iss.* (**II**) (1979), 162.
[2] Loeve, M., Probability Theory, *Van Nostrand,* (1960).
[3] Rao, C. R., *Ann. Statist.* **4** (1976), 1023.

A PROBLEM OF WEAKLY CONSISTENT LINEAR ESTIMATE

CHEN XIRU
(*University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

Suppose we have a linear regression model $Y_i = x_1'\beta + e_i$, $(i=1, \cdots, n, \cdots)$, e_1, e_2, $\cdots$ independent, $E(e_i)=0$, $\mathrm{Var}(e_i)=\sigma^2$, $(i=1, 2, \cdots)$, and there is no such subsequence of $\{e_i\}$ which converges in probability to some constant, then when the Gauss-Markov estimate $c'\hat{\beta}(n)$ of a linear estimable function $c'\beta$ is not a weakly consistent estimate, there exists no weakly consistent linear estimate of $c'\beta$. The final condition imposed on $\{e_i\}$ is necessary in some meaning. This greatly improved the related result in [1].