数 学 年 刊
2 (2) 1981

一类弱相依序列的极限定理

林 正 炎
（杭州大学）

对于平稳弱相依随机变量序列的极限定理已有大量的工作，如[2, 4]．但通常都是在方差存在的条件下来讨论的．是否能除去这一限制呢？譬如说能否将[1]中关于独立同分布方差不存在的极限定理推广到弱相依的情形呢？本文即是在这一方向上的一个尝试．我们讨论了平稳、m–相依的随机变量序列，给出了下列定理．

定理 设$\{X_n, n=1, 2, \cdots\}$是平稳、m–相依随机变量序列，$EX_n=0$．如果满足

(i) $M^2\int_{|X_1|>M} dP \Big/ \int_{|X_1|<M} X_1^2 dP \to 0 \quad (M\to\infty)$；

(ii) $\int_{\{|X_1|<M, |X_i|<M\}} X_1X_i dP \Big/ \int_{|X_1|<M} X_1^2 dP \to 0 \quad (M\to\infty)$，$(i=2, \cdots, m)$，

那么，$\{X_n\}$服从中心极限定理．

由于平稳、m–相依序列在方差存在时必服从中心极限定理[3; 定理 2]，所以我们可以假设$\{X_n\}$的方差是无限的．

定理的证明 对任意的正整数n，记$n=pk+r$（p、k、r都是正整数，$0\leqslant r<k$）．定义

$$Y_i=X_{(i-1)k+1}+X_{(i-1)k+2}+\cdots+X_{ik-m},$$
$$Z_i=X_{ik-m+1}+X_{ik-m+2}+\cdots+X_{ik}, \quad (i=1, 2, \cdots, p).$$

由m–相依性，只要$k>2m$，$\{Y_i\}$和$\{Z_i\}$就都是独立同分布的随机变量序列．

首先证明，对固定的k，在定理的条件下，$\{Y_i\}$服从中心极限定理．为此，只须证明[1; § 35, 定理 1]

$$M^2\int_{|Y_1|>M} dP \Big/ \int_{|Y_1|<M} Y_1^2 dP \to 0 \quad (M\to\infty). \tag{1}$$

简记$k'=k-m$，先来考虑(1)中的分母，因为

$$0\leqslant\int_{|Y_1|<M} Y_1^2 dP-\int_{\bigcap_{j=1}^{k'}\left\{|X_j|<\frac{M}{k'}\right\}} Y_1^2 dP=\int_{\{|Y_1|<M\}\cap\left\{\bigcup_{j=1}^{k'}\left(|X_j|\geqslant\frac{M}{k'}\right)\right\}} Y_1^2 dP$$
$$\leqslant k'M^2\int_{|X_1|\geqslant\frac{M}{k'}} dP=o\left(k'^3\int_{|X_1|<\frac{M}{k'}} X_1^2 dP\right),$$

最后一个不等号是根据条件(i)．所以

$$\int_{|Y_1|<M} Y_1^2 dP=\int_{\bigcap_{j=1}^{k'}\left\{|X_j|<\frac{M}{k'}\right\}}\left(\sum_{i=1}^{k'} X_i^2+\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j\leqslant k'}} X_iX_j\right) dP+o\left(k'^3\int_{|X_1|<\frac{M}{k'}} X_1^2 dP\right). \tag{2}$$

对上式右端第一个和式的积分，因为

本文1980年1月5日收到．

$$0\leqslant\int_{|X_i|<\frac{M}{k'}}X_i^2dP-\int_{\bigcap\limits_{j=1}^{k'}\{|X_j|<\frac{M}{k'}\}}X_i^2dP=\int_{\{|X_i|<\frac{M}{k'}\}\cap\{\bigcup\limits_{\substack{j\neq i\\ j\leqslant k'}}(|X_j|\geqslant\frac{M}{k'})\}}X_i^2dP$$

$$\leqslant\frac{M^2}{k'}\int_{|X_1|\geqslant\frac{M}{k'}}dP=o\Big(k'\int_{|X_1|<\frac{M}{k'}}X_1^2dP\Big),$$

所以

$$\sum_{i=1}^{k'}\int_{\bigcap\limits_{j=1}^{k'}\{|X_j|<\frac{M}{k'}\}}X_i^2dP=\sum_{i=1}^{k'}\Big\{\int_{|X_i|<\frac{M}{k'}}X_i^2dP+o\Big(k'\int_{|X_1|<\frac{M}{k'}}X_1^2dP\Big)\Big\}$$

$$=k'\int_{|X_1|<\frac{M}{k'}}X_1^2dP+o\Big(k'^2\int_{|X_1|<\frac{M}{k'}}X_1^2dP\Big).\qquad(3)$$

对(2)中右端的第二个和式，类似地有

$$\int_{\bigcap\limits_{j=1}^{k'}\{|X_j|<\frac{M}{k'}\}}X_iX_jdP=\int_{\{|X_i|<\frac{M}{k'},\ |X_j|<\frac{M}{k'}\}}X_iX_jdP+o\Big(k'\int_{|X_1|<\frac{M}{k'}}X_1^2dP\Big).$$

因此

$$\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j\leqslant k'}}\int_{\bigcap\limits_{j=1}^{k'}\{|X_j|<\frac{M}{k'}\}}X_iX_jdP=\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j\leqslant k'}}\int_{\{|X_i|<\frac{M}{k'},\ |X_j|<\frac{M}{k'}\}}X_iX_jdP+o\Big(k'^3\int_{|X_1|<\frac{M}{k'}}X_1^2dP\Big)$$

$$=\Big(\sum_{\substack{|i-j|\leqslant m\\ i\neq j,\ i,j\leqslant k'}}+\sum_{\substack{|i-j|>m\\ i,j\leqslant k'}}\Big)\int_{\{|X_i|<\frac{M}{k'},\ |X_j|<\frac{M}{k'}\}}X_iX_jdP$$

$$+o\Big(k'^3\int_{|X_1|<\frac{M}{k'}}X_1^2dP\Big).\qquad(4)$$

由条件(ii)，上式右端的第一个和式是$o\Big(k'\int_{|X_1|<\frac{M}{k'}}X_1^2dP\Big)$，而第二个和式中的$X_i$和$X_j$是相互独立的，所以其中的每一个积分$I_{ij}\Big(\frac{M}{k'}\Big)=E(X_iI_{\{|X_i|<\frac{M}{k'}\}})E(X_jI_{\{|X_j|<\frac{M}{k'}\}})$，注意到条件$EX_n=0$，有$I_{ij}\Big(\frac{M}{k'}\Big)\to0\,(M\to\infty)$．因此(4)右端的第二个和式可以写成$o\Big(k'^3\int_{|X_1|<\frac{M}{k'}}X_1^2dP\Big)$．于是

$$\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j\leqslant k'}}\int_{\bigcap\limits_{j=1}^{k'}\{|X_j|<\frac{M}{k'}\}}X_iX_jdP=o\Big(k'^3\int_{|X_1|<\frac{M}{k'}}X_1^2dP\Big).\qquad(5)$$

将(3)和(5)代入(2)即得

$$\int_{|Y_1|<M}Y_1^2dP=k'\int_{|X_1|<\frac{M}{k'}}X_1^2dP+o\Big(k'^3\int_{|X_1|<\frac{M}{k'}}X_1^2dP\Big).\qquad(6)$$

再考虑(1)中的分子

$$M^2\int_{|Y_1|>M}dP\leqslant M^2\int_{\bigcup\limits_{j=1}^{k'}\{|X_j|>\frac{M}{k'}\}}dP\leqslant k'M^2\int_{|X_1|>\frac{M}{k'}}dP.\qquad(7)$$

注意到k'是固定的，由条件(i)得证(1)式．这就是说存在常数$B_p^{(k')}>0$，使得

$$\frac{1}{B_p^{(k')}}\sum_{i=1}^{p}Y_i\xrightarrow{\mathscr{D}}N(0,\ 1),\ (p\to\infty).\qquad(8)$$

显然我们也有$B_p^{(m)}>0$，使得

$$\frac{1}{B_p^{(m)}}\sum_{i=1}^{p}Z_i\xrightarrow{\mathscr{D}}N(0,\ 1),\ (p\to\infty).\qquad(9)$$

为了完成定理的证明，需要估计比值 $\frac{B_p^{(m)}}{B_p^{(k')}}$. 假设 $\{X'_n\}$ 是与 $\{X_n\}$ 有共同分布的独立随机变量序列. 由条件(i)知，存在常数列 $B_p>0$，使得 $\frac{1}{B_p}\sum_{i=1}^{p}X'_i\xrightarrow{\mathscr{D}}N(0,1)\ (p\to\infty)$. 为了估计 $\frac{B_p^{(m)}}{B_p^{(k')}}$，我们需要利用[1; § 26, 定理 4]. 假设 $C_p^{(k')}$ 和 C_p 分别是序列 $\{Y_i\}$ 和 $\{X'_i\}$ 对应于该定理中的常数序列. 我们先来证明可以选取

$$C_p^{(k')}=k'C_p. \tag{10}$$

这就是说需要验证：如此选取的 $C_p^{(k')}$ 对于序列 $\{Y_i\}$ 满足上面提到的定理中的条件，也即

$$p\int_{|Y_1|>k'C_p}dP\to0,\ (p\to\infty), \tag{11}$$

$$\frac{p}{(k'C_p)^2}\left\{\int_{|Y_1|<k'C_p}Y_1^2dP-\left(\int_{|Y_1|<k'C_p}Y_1dP\right)^2\right\}\to\infty\ (p\to\infty). \tag{12}$$

利用(7)式，并注意到 C_p 自身的定义，(11)是容易验证的. 对于(12)，我们首先指出，从(6)式可以看出，当 X_n 的方差无穷时，Y_n 的方差也无穷. 再注意到 $C_p^{(k')}\to\infty\ (p\to\infty)$ 和(1)，由[1; § 35, 定理 1]的证明可知

$$\left(\int_{|Y_1|<C_p^{(k')}}Y_1dP\right)^2=o\left(\int_{|Y_1|<C_p^{(k')}}Y_1^2dP\right),\ (p\to\infty). \tag{13}$$

因此我们只须考察(12)左端的第一项就够了，由(6)，它等于

$$\frac{p}{k'C_p^2}\int_{|X_1|<C_p}X_1^2dP+o\left(\frac{k'p}{C_p^2}\int_{|X_1|<C_p}X_1^2dP\right)\to\infty\ (p\to\infty).$$

也即(12)也成立. 这就证明了(10).

由[1; § 26, 定理 4]，我们可以取 $B_p^{(k')}=p\left\{\int_{|Y_1|<C_p^{(k')}}Y_1^2dP-\left(\int_{|Y_1|<C_p^{(k')}}Y_1dP\right)^2\right\}$. 利用(13)及(6)，又可写

$$B_p^{(k')^2}=(1+o(1))p\int_{|Y_1|<C_p^{(k')}}Y_1^2dP=(1+o(1)pk'\int_{|X_1|<C_p}X_1^2dP+o\left(pk'^3\int_{|X_1|<C_p}X_1^2dP\right).$$

于是

$$\frac{B_p^{(m)^2}}{B_p^{(k')^2}}=\frac{(1+o(1)m^2)m}{(1+o(1)k'^2)k'}. \tag{14}$$

考虑 $\frac{1}{B_p^{(k')}}\sum_{i=1}^{p}Z_i=\frac{B_p^{(m)}}{B_p^{(k')}}\frac{1}{B_p^{(m)}}\sum_{i=1}^{p}Z_i$. 任给常数序列 $\varepsilon_n\downarrow0$，对充分大的 $M_n\uparrow\infty$，由(9)，存在 $P_N^{(1)}$，对一切 $p\geqslant P_N^{(1)}$，

$$P\left(\left|\frac{1}{B_p^{(m)}}\sum_{i=1}^{p}Z_i\right|>M_N\right)<\frac{\varepsilon_N}{2}. \tag{15}$$

而由(14)，对任意给定的常数序列 $\delta_N\downarrow0$，又存在 $P_N^{(2)}$ 和 $K_N^{(1)}$，使当 $p\geqslant P_N^{(2)}$，$k\geqslant K_N^{(1)}$ 时

$$\frac{B_p^{(m)}}{B_p^{(k')}}\leqslant\frac{\delta_N}{2M_N}. \tag{16}$$

因此对 $p\geqslant\max(P_N^{(1)},\ P_N^{(2)})$，$k\geqslant K_N^{(1)}$.

$$P\left(\left|\frac{1}{B_p^{(k')}}\sum_{i=1}^{p}Z_i\right|>\frac{\delta_N}{2}\right)<\frac{\varepsilon_N}{2}. \tag{17}$$

再来看 $\frac{1}{B_p^{(k')}}\sum_{i=pk+1}^{n}X_i$ 回顾 p、k 的取法，$r=n-pk<k$，所以 $P\left(\left|\frac{1}{B_p^{(k')}}\sum_{i=1}^{p}z_i\right|>\frac{\delta_N}{2}\right)<\frac{\varepsilon_N}{2}$，存在 $P_N^{(3)}$ 和 $K_N^{(2)}$，对一切 $p>P_N^{(3)}$ 和 $k\geqslant K_N^{(2)}$，

$$P\left(\left|\frac{1}{B_p^{(k')}}\sum_{i=pk+1}^{n}X_i\right|>\frac{\delta_N}{2}\right)\leqslant\frac{2k}{\delta_N B_p^{(k')}}E|X_1|\leqslant\frac{2m^{1/2}E|X_1|}{\delta_N k'^{1/2}B_p^{(m)}}<\frac{\varepsilon_N}{2} \tag{18}$$

由于 $B_p^{(m)}\to\infty\,(p\to\infty)$，利用刚才修改函数值 $p(k)$ 的办法，总可以使得对 $k\geqslant K_0$，

$$P\left(\left|\frac{1}{B_{p_{k'}}^{(k')}}\sum_{i=p_{k'}k+1}^{n}X_i\right|>\frac{\delta}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{19}$$

记 $n_k=kp_{k'}$. 对任意的正整数 n 有 k，使得 $n_k\leqslant n<n_{k+1}$. 因此我们可以写

$$n=n_k+jk+i,$$

其中 $j=0, 1, \cdots, \left[\frac{n_{k+1}-n_k-1}{k}\right]$, $i=0, 1, \cdots, k-1$.

对这样的 n，我们取 $B_n=B_{p_{k'}+j}^{(k')}$. 考虑和 $S_n=\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. 若记 $U_{nk}=\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{p_{k'}+j}Y_i$, $V_{nk}=\frac{1}{B_n}\left(\sum_{i=1}^{p_{k'}+j}Z_i+\sum_{i=(p_{k'}+j)k+1}^{n}X_i\right)$，则 $S_n=U_{nk}+V_{nk}$. 回顾(15)、(14)和(16)等式可知，(17)中的 $p_{k'}$ 换作 $p_{k'}+j$ 后不等式仍保持；注意到(18)，对(19)式也有同样的结论. 因此对 $k\geqslant K_0$，

$$P(|V_{nk}|>\delta)<\varepsilon. \tag{20}$$

对 U_{nk}，根据(8)，并通过适当增大函数 $p(k)$ 的取值（如有必要）的办法，当 $k\geqslant K_0$ 时，对 x 一致地成立

$$|P(U_{nk}<x)-\Phi(x)|<\varepsilon, \tag{21}$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数，综合(20)和(21)两式即可推知 $S_n=\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{\mathscr{D}}N(0, 1)$. 证毕.

注 当 $\{X_n\}$ 是独立同分布随机变量序列时，条件(ii)自动满足，因此我们的定理可以看作是独立情形的一种推广.

参考文献

[1] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., 相互独立随机变量之和的极限分布, (1949) (王寿仁译).

[2] Ибрагимов, И. А., Линник, Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, *изд-во «Наука»*, *М.*, (1965).

[3] Dinanda, P. H., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **49** (1953), 239—246.

[4] Dinanda, P. H., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **51** (1955), 92—95.

LIMIT THEOREM FOR A CLASS OF SEQUENCE OF WEAKLY DEPENDENT RANDOM VARIABLES

Lin Zhengyan
(*Hangzhou University*)

ABSTRACT

In this paper, we consider a central limit theorem for the sequence of stationary m-dependent random variables, the variance of which is possibly infinite.

Theorem. Let $\{X_n, \ n=1, \ 2, \ \cdots\}$ be a sequence of stationary m-dependent random variables with means zero. The following conditions are satisfied:

(i) $M^2 \int_{|X_1|>M} dP \Big/ \int_{|X_1|<M} X_1^2 \, dP \to 0 \quad (M \to \infty)$;

(ii) $\int_{\{|X_1|<M, |X_i|<M\}} X_1 X_i \, dP \Big/ \int_{|X_1|<M} X_1^2 dP \to 0 \quad (M \to \infty), \ i=2, \ \cdots, \ m,$

then there are constants $B_n > 0$, such that $\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} X_1$ converges in distribution $N(0,1)$.