

关于混合曲率旋转曲面的 无穷小变形问题

孙 和 生

1. 问题的提出

苏联已故数学家 Векун И. Н., 在其专著[1]中指出, 研究混合曲率旋转曲面的无穷小变形问题的重要性.

本文对一类混合曲率旋转曲面利用能量积分法研究混合型方程边值问题的唯一性问题, 由此得到了当曲面满足某个(与 Gauss 曲率有关的)条件时, 我们只要在正曲率部分的边界上给一个约束条件, 而在负曲率部分的边界上不给任何条件, 就能保证曲面的刚性. 同时举出有相当广泛的曲面满足我们所设置的条件.

不属于此类的混合曲率旋转曲面, 将在[2]中证明, 即使在曲面的二个边界处各给一个约束条件也不能确保刚性, 只有当满足某个与边界位置有关的条件时, 曲面才是刚的.

我们还研究了旋转曲面上混合曲率曲面块的 Tricomi 问题, 广义 Tricomi 问题, 变态 Tricomi 问题和 Франкель 问题的唯一性.

设混合曲率旋转曲面 S 的矢量表示为

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}(\theta) + z(\rho) \mathbf{k}, \quad (1)$$

其中 $z = z(\rho)$ 为曲面的经线, $\mathbf{e}(\theta)$, $\mathbf{g}(\theta)$, $\mathbf{k}$ 为曲面上的活动标架, $\mathbf{k}$ 为旋转轴 z 轴方向的单位矢量, $\mathbf{e}$ 为径向单位矢量, $\mathbf{g}$ 为切向单位矢量, 按右手法则. 且假设曲面 S 单值地投影在垂直于 z 轴的 (x, y) 平面上, 即 $z(\rho)$ 为单值函数.

变形的位移矢量可表为

$$\mathbf{U}(\theta, \rho) = u(\theta, \rho) \mathbf{e}(\theta) + v(\theta, \rho) \mathbf{g}(\theta) + w(\theta, \rho) \mathbf{k}. \quad (2)$$

于是, 无穷小曲面变形方程^[1]

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{U} = 0 \quad (3)$$

可化为

$$\begin{cases} u_\rho + z'(\rho) w_\rho = 0, \\ v_\theta + u = 0, \\ \rho v_\rho + (u_\theta - v) + z'(\rho) w_\theta = 0. \end{cases} \quad (4)$$

消去 u 和 v 可得

$$k(\rho) w_{\rho\rho} + w_{\theta\theta} + \rho w_\rho = 0, \quad (5)$$

其中

$$k(\rho) = \frac{\rho z'(\rho)}{z''(\rho)} \quad (6)$$

是和曲面的 Gauss 曲率

$$K = \frac{z'z''}{\rho(1+z'^2)^2} \quad (7)$$

有关的函数, 即 k 与 K 是同符号的.

现在我们设曲面 S 的经线 $z(\rho)$ 在 $\rho = \rho_0$ 处满足

$$z'(\rho) = 0, \quad \rho = \rho_0. \quad (8)$$

而 $z''(\rho)$ 在 $\rho = \rho_0$ 处可以为 0, ∞ 或常数. 并设 $z'(\rho)$, $z''(\rho)$ 在其它处不再有零点(见第 6 节说明(4)). 我们设

$$k(\rho) \begin{cases} < 0, & 0 < \rho_2 \leq \rho < \rho_0, \\ = 0, & \rho = \rho_0, \\ > 0, & \rho_0 < \rho \leq \rho_1. \end{cases} \quad (9)$$

于是, 对应于 $\rho_2 \leq \rho < \rho_0$ 的旋转曲面 S^- 为负曲率曲面, 即 $K < 0$, 对应于 $\rho_0 < \rho \leq \rho_1$ 的旋转曲面 S^+ 为正曲率曲面, 即 $K > 0$, 二部分由蜕型线 $L_0(\rho = \rho_0)$ 的线(即 Gauss 曲率 K 等于 0 的线)相衔接. 曲面 S 在 S^- 的边界为 L^- , 在 S^+ 的边界为 L^+ , 它们和蜕型线 L_0 在 (x, y) 平面上的投影为三个同心圆(L^+ 和 L^- 也可以是满足某些条件的闭曲线, 条件见下面公式(28)和(29)或定理 2), 对应于 (θ, ρ) 平面上, 则为在 $[0, 2\pi]$ 间的 $\rho = \text{const.}$ 的三条直线 I^- , I^+ (I^+ , I^- 也可以是曲线)和 I_0 , 所围区域分别为 Ω^- 和 Ω^+ , 对应于 S^- 和 S^+ .

注意, 满足条件(9)的曲面在整个区域 $\rho_2 \leq \rho \leq \rho_1$ 内可以是 z'' 定号 z' 变号, 也可以是 z' 定号, z'' 变号, 在后者情形 z' 还必须满足(8).

我们假定

$$\mathbf{r} \in C^3, \quad \mathbf{U} \in C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-) \cap C^1(\bar{\Omega}) \quad (10)$$

(由(4)推出(5)要求 $\mathbf{U}$ 有三阶连续微商, 但我们可利用[3]中用连续函数逼近的办法, 使(5)对 $\mathbf{U} \in C^2$ 亦成立).

定义 若方程(5)在某些边界条件下只有零解 $w = 0$, 则我们称曲面在这些条件下是刚的.

本文所说的曲面刚性, 是指除绕 z 轴一旋转运动(刚体运动, 或称平凡解)外是刚的(即不存在非平凡的曲面变形). 也即从 $w = 0$ 我们从(4)可导出

$$u = 0, \quad v = c\rho, \quad (11)$$

其中 c 为常数, 也即

$$\mathbf{U} = \mathbf{k} \times \mathbf{r}. \quad (11')$$

这是曲面绕 z 轴的旋转.

为了解方程(5)的几何边值问题, 我们先研究一个稍微一般的混合型方程.

2. 一个第二类退化的混合型方程的边值问题

我们考虑方程

$$k(x, y)w_{yy} + w_{xx} + a(x, y)w_y = 0, \quad (12)$$

其中

$$k(x, y) \begin{cases} < 0 & \text{当 } y < y_0, \\ = 0 & \text{当 } y = y_0, \\ > 0 & \text{当 } y > y_0. \end{cases} \quad (13)$$

因此, (12) 是属于第二类退化的混合型方程. 其中 $k \in C^1$, $a \in C$, 而求解的函数

$$w \in C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-) \cap C^1 C^1(\bar{\Omega}).$$

我们利用熟知的能量积分法(即 abc 法), 为此, 作二重积分

$$0 = \iint_{\Omega} c w_y [k(x, y) w_{yy} + w_{xx} + a w_y] dx dy, \quad (14)$$

这里 c 为待定的光滑函数. 由于

$$\begin{cases} c k(x, y) w_y w_{yy} = \frac{1}{2} (c k(x, y) w_y^2)_y - \frac{1}{2} (c k(x, y))_y w_y^2, \\ c w_y w_{xx} = (c w_x w_y)_x - \frac{1}{2} (c w_x^2)_y + \frac{1}{2} c_y w_x^2 - c_x w_x w_y, \\ c a(x, y) w_y^2 = c a(x, y) w_y^2, \end{cases} \quad (15)$$

应用 Green 公式得

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega (= \Omega^+ \cup \Omega^-)} \{c_y w_x^2 - 2c_x w_x w_y + [2ca - (ck)_y] w_y^2\} dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma (= \Gamma^+ + \Gamma^-)} c (w_x^2 - k w_y^2) dx + 2c w_x w_y dy \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 Γ^+ 表示 $k > 0$ 区域 Ω^+ 的外边界, Γ^- 表示 $k < 0$ 区域 Ω^- 的外边界(即不包含蜕型线). 线积分沿逆时针方向为正.

我们取

$$c = e^{\varepsilon y} \quad \text{在 } \Omega (= \Omega^+ \cup \Omega^-), \quad (17)$$

其中 ε 是待选的正实数. 于是

$$I_1 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} e \{ \varepsilon w_x^2 + (2a - k_y - \varepsilon k) w_y^2 \} dx dy. \quad (18)$$

如果方程(12)的系数 $k(x, y)$ 和 $a(x, y)$ 满足条件

$$2a - k_y \geq \delta > 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (19)$$

其中 δ 为任意充分小的实数(下面将说明这个条件具有明确的几何意义, 因此, 条件是自然的), 则我们可以取

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2 \max_{\Omega^+} k}, \quad (20)$$

使得

$$I_1 > 0, \quad \text{在 } \Omega (= \Omega^+ \cup \Omega^-) \text{ 内}. \quad (21)$$

现在如果我们在某些边界条件下能推出

$$I_2 > 0, \quad (22)$$

则我们就能由(16), (21)和(22)导出

$$I_1 = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}. \quad (23)$$

于是由(18), 考虑到条件(19), 就导出

$$w_x = w_y = 0, \quad \text{在 } \Omega (= \Omega^+ \cup \Omega^-) \text{ 内.} \quad (24)$$

再根据边界条件就推出

$$w = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内.} \quad (25)$$

这样, 我们就在条件(19)之下导出了方程(12)在一定的边界条件之下解的唯一性.

下面我们就不同的边界条件来推出(22).

3. 问 题 E

现在设

$$w(0, y) = w(x_0, y), \quad y_2 \leq y < y_0, \quad y_0 < y \leq y_1. \quad (26)$$

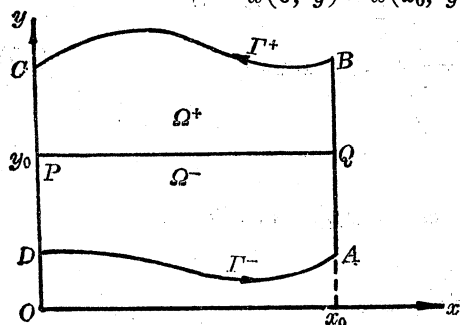


图 1

Γ^+ 为 Ω^+ 的上边界 $\widehat{CB}$, Γ^- 为 Ω^- 的下边界 $\widehat{DA}$, A, B 为直线 $x = x_0$ 上二点, C, D 为 y 轴上二点 (见图 1), 且

$$y_B = y_C, \quad y_D = y_A. \quad (27)$$

假设边界 Γ^+, Γ^- 满足条件:

$$dx \leq 0, \quad \text{在 } \Gamma^+ \text{ 上,} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} dy &= \alpha dx, \\ -\sqrt{-k} &\leq \alpha \leq \sqrt{-k}, \end{aligned} \right\} \quad \text{在 } \Gamma^- \text{ 上.} \quad (29)$$

我们有

定理 1 设混合型方程(12)的系数满足条件(13)和(19), 则在域 $DABCD$ (即 $\Omega^+ \cup \Omega^-$) 中满足边界条件

$$w|_{\Gamma^+} = 0 \quad (30)$$

的周期解 (即满足条件(26)) 只能是零解, 其中 Γ^+, Γ^- 满足条件(28)和(29).

证 由于(30)我们有

$$w_x dx + w_y dy = 0, \quad \text{在 } \Gamma^+ \text{ 上.} \quad (31)$$

于是由(16), 并考虑到(31)和(29), 我们有

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} c(w_x^2 + kw_y^2) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^-} c\{[w_x + \alpha w_y]^2 - (\alpha^2 + k)w_y^2\} dx. \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (32)$$

由条件(28)导出

$$J_1 > 0. \quad (33)$$

由条件(29), 并考虑到在 Γ^- 上 $dx > 0$, 因而推出

$$J_2 > 0. \quad (34)$$

这样, 我们就导出了(22), 因而也就证明了定理.

附注 1 我们称边值问题(30)为问题 E, 是来源于 Колдыш 对第二类退化椭圆型方程所提的问题^[4]. 其间关系可看第 6 节说明(1).

如果现在不给周期性条件(26), 则需要在 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 上给条件:

$$w_{\overline{AB}} = w_{\overline{CD}} = 0 \quad (35)$$

或

$$w_x|_{\overline{AB}} = w_x|_{\overline{CD}} = 0 \quad (36)$$

或它们的混合, 也能导出唯一性.

特别, 当

$$\Gamma^+: y = y_1, \quad \Gamma^-: y = y_2 \quad (0 \leq x \leq x_0) \quad (37)$$

时条件(28), (29)就不再需要.

现在令

$$\begin{cases} x = \theta, & y = \rho, & x_0 = 2\pi, \\ k(x, y) \equiv k(\rho), & a(x, y) \equiv \rho. \end{cases} \quad (38)$$

由定理 1 立即可导出曲面变形问题的一个结论.

定理 2 设旋转曲面 S 的经线 $z = z(\rho)$ 满足条件(8), (9)和

$$\Phi(\rho) \equiv 2\rho - k'(\rho) \geq \delta > 0, \quad \rho_2 \leq \rho \leq \rho_1, \quad (39)$$

其中 δ 为任意充分小的一个实数. 并设 S^+ 的上边界 L^+ (对应于 Γ^+) 上的切线除一点外处处不与旋转轴 z 轴相交 (包括交于无穷远点); S^- 的下边界 L^- (对应于 Γ^-) 始终使二族渐近线 (对应于特征线) 落在曲线 L^- 的一边. 若在曲面 S 的上边界 L^+ 处不允许有平行于旋转轴 z 轴方向的变形, 即

$$Uk|_{L^+} = w|_{L^+} = 0, \quad (30')$$

(若 L^+ 在垂直于 z 轴的平面上, 则条件(30')表示, 只允许在此平面上滑移), 而在 L^- 处不给任何约束, 则曲面 S 是刚的.

考虑到(6)和(7), 容易验证, 当 Gauss 曲率满足条件

$$K' > 0, \quad \rho_2 \leq \rho \leq \rho_1 \quad (40)$$

时, 条件(39)显然成立. 因而, 条件(39) (或条件(19)) 是具有确定的几何意义的. 而且这个条件不仅仅是得到刚性的充分条件, 而且也是必要的. 因为随着 ρ 的增长, 曲面在蜕型线附近是从负曲率变到正曲率, 因而在蜕型线附近必须有 $K' > 0$.

附注 2 定理 1 中的蜕型线不一定要是直线 $y = y_0$, 可以假定

$$k(x, y) \begin{cases} < 0, & \text{在 } \gamma \text{ 之下,} \\ = 0, & \text{在 } \gamma \text{ 上,} \\ > 0, & \text{在 } \gamma \text{ 之上,} \end{cases} \quad (13')$$

这里 γ 是一条任意的光滑曲线, 但其两端的 y 必须相等 (由周期性要求).

但是, 在定理 2 中由于是旋转曲面, 蜕型线必须是直线 $\rho = \rho_0$.

满足条件(39)或(40) (当然还要满足(8)和(9)) 的曲面是很普通的, 我们举出二类.

例 1 设曲面的经线表为

$$z = \begin{cases} C_1 + C_2(\rho_0 - \rho)^\alpha, & \rho_2 \leq \rho < \rho_0, \\ C_1 \pm C_2(\rho - \rho_0)^\alpha, & \rho_0 < \rho \leq \rho_1, \end{cases} \quad (41)$$

其中 C_1, C_2 为任意的实数 (可正可负), 而 α 为满足下列条件的任何实数

$$\alpha > 1 + \frac{\rho_0}{2\rho_2}. \quad (42)$$

显见, 满足条件(8)和(9), 根据(42)我们有

$$\Phi(\rho) = 2\rho - \frac{\rho_0}{\alpha-1} > 0. \quad (43)$$

因此, 满足条件(39).

例 2 设曲面的经线表为

$$z = C_1 + C_2 \sqrt{R^2 - (\rho_0 - \rho)^2}, \quad |\rho - \rho_0| < R, \quad (44)$$

其中 C_1, C_2 为任意实数. 显见, 亦满足条件(8)和(9). 同时, 考虑到 $|\rho - \rho_0| < R$, 我们有

$$\Phi(\rho) = \rho_0 + \frac{1}{R^2} (\rho_0 - \rho)^2 (4\rho - \rho_0) > 0. \quad (45)$$

因此, 亦满足条件(39).

4. 变态问题 T 和问题 F

(A) 变态问题 T

现在设 Γ^+ 是在 $y > y_0$ 半平面中一条任意的逐段光滑曲线 σ , 其两端与蜕型线 $y = y_0$ (当然这里也可以是一条 γ 曲线) 上两点 P 和 Q 相连接, 且满足条件

$$dx \leq 0, \quad \text{在 } \sigma \text{ 上} \quad (46)$$

(在 Γ^+ 上的积分线路以逆时针方向为正). Γ^- 在 $y < y_0$ 半平面中可以由二条特征线 l_1 和 l_2 :

$$\begin{cases} l_1: dy = -\sqrt{-k} dx, \\ l_2: dy = \sqrt{-k} dx \end{cases} \quad (47)$$

所组成, l_1 和 σ 在 P 点相接, l_2 和 σ 在 Q 点相接, l_1 和 l_2 交于 R 点; 也可以是一条连接 P 和 Q 的逐段光滑的曲线 l_1 , 满足条件

$$\left. \begin{aligned} dy &= \alpha dx, \\ -\sqrt{-k} &\leq \alpha \leq \sqrt{-k}, \end{aligned} \right\} \quad \text{在 } \Gamma^- \text{ (即 } l_1 \text{) 上.} \quad (48)$$

于是, 我们有

定理 3 设混合型方程(12)的系数满足条件(13)和(19), 且设 Ω^+ 的外边界 σ 满足条件(46), Ω^- 的外边界 Γ^- 满足条件(47)或(48), 则在域 $\Omega (= \Omega^+ \cup \Omega^-)$ 中满足边界条件

$$w|_{\sigma} = 0 \quad (49)$$

的解只能是零解.

证 根据定理 1 的证明立即可以导出. 实际上, 相当于定理 1 中 C 和 D 点重合于 P 点, B 和 A 点重合于 Q 点, 因此, 不再需要周期性条件(26).

附注 3 这里我们不需要在 Γ^+ 上或 Γ^- 的一段(例如 l_1) 上给任何条件, 就能导出唯一性, 因此, 我们称之为变态 Tricomi 问题.

同样, 令(38)成立, 我们也可以得到相应的曲面变形问题的结论.

定理 4 设曲面 $S_0 (= S_0^+ \cup S_0^-)$ 是混合曲率旋转曲面 S 上的一块, 其经线 $z = z(\rho)$ 满足条件(8), (9) 和 (39), 设 S_0^+ 的外边界为 Σ^+ (对应于 σ), 其切线除两端点外处处不与 z

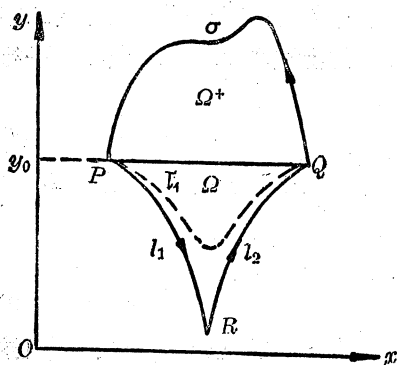


图 2

轴相交(对应于条件(46)); S_0^- 的外边界为 Σ^- , 或者由两条渐近曲线 L_1 和 L_2 (对应于特征线 l_1 和 l_2) 组成, 或者是一条两端连接 Σ^+ 的逐段光滑曲线, 其斜率满足条件(47). 若在边界 Σ^+ 处不允许有平行于旋转轴 z 轴方向的变形, 而 Σ^- 上不给任何约束, 则曲面块 S_0 是刚的.

(B) 问题 F

设 σ' 为在 $y > y_0$ 上半平面中从蛻型线 $y = y_0$ 上一点 Q 到 y 轴上一点 D 的逐段光滑曲线, 满足条件

$$dx \leq 0, \text{ 在 } \sigma' \text{ 上}, \quad (46')$$

$\overline{DD'}$ 为 y 轴上一直线段, $y_D > y_0$, $y_{D'} < y_0$. 特征线 l_2 连接 D' 点和蛻型线 $y = y_0$ 上一点 P .

我们提类似于 Франкль 问题^[5]的边界条件

$$\begin{cases} w|_{\sigma'} = 0, & (49') \\ w|_{\overline{DD'}} = 0 \text{ 或 } w_x|_{\overline{DD'}} = 0. & (50) \end{cases}$$

如果 P 点落在 Q 点的外面(右边), 则还要加条件

$$w|_{\overline{QP}} = 0. \quad (51)$$

于是, 我们有

定理 5. 设混合型方程(12)的系数满足条件(13)和(19), Ω 的边界如图 3 所示. 且设 Ω^+ 的部分边界 σ' 满足条件(46'), 则在域 $\Omega (= \Omega^+ \cup \Omega^-)$ 中的问题 $F(49')(50)$ (当 P 点在 Q 点外面时还要加条件(51))的解只有零解.

证 我们只要证 $I_2 > 0$ 就行了. 对问题 F 我们有

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{\sigma' + \overline{DD'} + l_1 + \overline{PQ}} c(w_x^2 - kw_y^2) dx + 2cw_x w_y dy = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \quad (52)$$

考虑到(50), 在 $\overline{DD'}$ 上有

$$dx = 0, \quad w = w_y = 0 \text{ (或 } w_x = 0), \text{ 在 } \overline{DD'} \text{ 上}, \quad (50')$$

所以

$$J_2 = 0. \quad (53)$$

又, 考虑到在 $\overline{PQ}$ 上有

$$dy = 0, \quad k = 0, \quad dx > 0, \text{ 在 } \overline{PQ} \text{ 上}, \quad (54)$$

(若 P 点在 Q 点右边, 这时 $dx < 0$, 因此还需要条件(51))所以

$$J_4 > 0. \quad (55)$$

和前一一样, 有 $J_1 > 0$, $J_3 > 0$. 因此, 和(53)(55)一起立即导出 $I_2 > 0$.

我们也可以得到曲面变形论的相应结论, 由于和定理 4 相类似, 因此不再赘述. 需要注意的一点, 这时除了在 Ω^+ 的边界上给条件外, 还需要在 Ω^- 的边界上给条件(50).

附注 4 对第二类退化的混合型方程的边值问题还研究得不多, [6]研究了 $k=y$, $a=\text{const.}$ 的情形, [7]研究了 $k=\text{sgn}y|y|^m$, $1 \leq m < 2$; $a=\alpha|y|^{m-1}$, $m-1 < \alpha < 1$ 的情形. 我们对方程(12)研究了上面三个问题的唯一性. 所设置的条件(19)具有确定的几何意义.

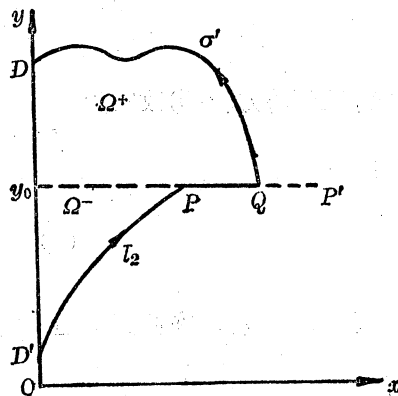


图 3

5. 对另一类方程的问题 T 和 T'

现在设曲面 $\tilde{S}$ 的经线 $z=z(\rho)$ 满足条件

$$z'(\rho_0) \neq 0, \quad z'(\rho) < 0 (> 0), \quad \rho_2 \leq \rho \leq \rho_1, \quad (56)$$

$$z''(\rho) \begin{cases} < 0 (> 0), & \rho_2 \leq \rho < \rho_0, \\ = 0, & \rho = \rho_0, \\ > 0 (< 0), & \rho_0 < \rho \leq \rho_1. \end{cases} \quad (57)$$

于是, 我们将方程(5)改写为

$$\tilde{k}(\rho)w_{\theta\theta} + w_{\rho\rho} + \rho\tilde{k}(\rho)w_{\rho} = 0, \quad (5')$$

其中

$$\tilde{k}(\rho) = (k(\rho))^{-1} \begin{cases} > 0, & \rho_2 \leq \rho < \rho_0, \\ = 0, & \rho = \rho_0, \\ < 0, & \rho_0 < \rho \leq \rho_1. \end{cases} \quad (58)$$

和前节一样, 在曲面 $\tilde{S}$ 上取下一块 $\tilde{S}_1 (= \tilde{S}_1^+ \cup \tilde{S}_1^-)$, 在 (θ, ρ) 平面上的投影为 Ω_1

($= \Omega_1^+ \cup \Omega_1^-$), Ω_1^+ 的边界由满足内锥条件的逐段光滑曲线 $\tilde{\sigma}$ 和直线 $\rho = \rho_0$ 的一段 $\overline{PQ}$ 所组成; Ω_1^- 的边界由直线段 $\overline{PQ}$, $\tilde{l}_1$ (或 $\tilde{l}_1$) 和 $\tilde{l}_2$ 所组成 (见图 4), 这里 $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2$ 为特征线, 而 $\tilde{l}_1$ 为从 $\tilde{P}$ 点出发的落在特征三角形内的逐段光滑曲线, 它与 $\tilde{l}_2$ 的交点为 $\tilde{R}'$. $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2$ 和 $\tilde{l}_1$ 由下列各式定义

$$\begin{cases} \tilde{l}_1: d\theta = \sqrt{-\tilde{k}}d\rho, \\ \tilde{l}_2: d\theta = -\sqrt{-\tilde{k}}d\rho, \end{cases} \quad (59)$$

$$\tilde{l}_1: d\theta = \alpha d\rho, \quad \alpha \geq \sqrt{-\tilde{k}}. \quad (60)$$

对方程(5')我们考虑广义 Tricomi 问题 T' (Tricomi 问题 T)

$$w \equiv 0, \quad \text{在 } \tilde{\sigma} + \tilde{l}_1 (\tilde{l}_1) \text{ 上}. \quad (61)$$

设 w 是方程(5')在单连通域 $\Omega_1 (= \Omega_1^+ \cup \Omega_1^-)$ 内的解. 在 Ω_1 上考虑函数

$$T(\theta, \rho) = \int_{(\theta_0, \rho_0)}^{(\theta, \rho)} (-z'w_{\theta}w_{\rho})d\theta + \frac{1}{2}z'(\tilde{k}w_{\theta}^2 - w_{\rho}^2)d\rho. \quad (62)$$

考虑到 w 满足方程(5'), 容易验证(62)中所定义的函数与积分线路无关. 由于

$$T_{\theta} = -z'w_{\theta}w_{\rho}, \quad T_{\rho} = \frac{1}{2}z'(\tilde{k}w_{\theta}^2 - w_{\rho}^2), \quad (63)$$

并考虑到 w 满足(5'), 我们有

$$\tilde{k}T_{\theta\theta} + T_{\rho\rho} + \rho\tilde{k}T_{\rho} = \frac{1}{2}z'(\tilde{k}' + 2\rho\tilde{k}^2)w_{\theta}^2. \quad (64)$$

现在我们假定

$$\Psi \equiv \tilde{k}' + 2\rho\tilde{k}^2 \leq 0, \quad \text{在 } \Omega_1^+ \text{ 内}. \quad (65)$$

(若(56)中 $z'(\rho) > 0$, 则我们假定 $\Psi \geq 0$) 于是, 由(56)和(65)导出

$$\tilde{k}T_{\theta\theta} + T_{\rho\rho} + \rho\tilde{k}T_{\rho} \geq 0, \quad \text{在 } \Omega_1^+ \text{ 内}. \quad (66)$$

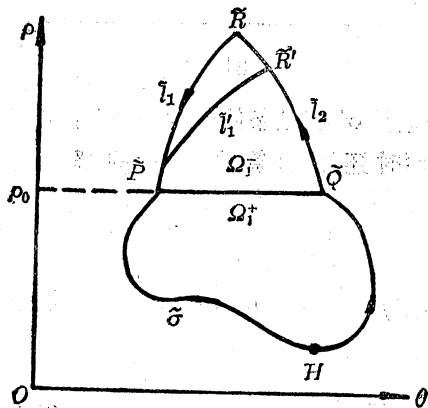


图 4

由于(66)的左边在 Ω_1^+ 域内为椭圆型的, 因此, 根据极值原理, T 在 Ω_1^+ 的正的极大值只能取在边界 $\tilde{\sigma}$ 和 $\overline{PQ}$ 上.

根据(63), 我们有

$$T_\rho > 0, \quad \text{在 } \Omega_1^- \text{ 内.} \quad (67)$$

因此, 在 Ω_1^- 内, T 的极值只能取在边界 $\bar{l}_1(\bar{l}_1)$ 和 $\bar{l}_2$ 上.

考虑边界条件(61), 我们有

$$w_\theta d\theta + w_\rho d\rho = 0, \quad \text{在 } \tilde{\sigma} + \bar{l}_1(\bar{l}_1) \text{ 上.} \quad (68)$$

因此, 由(62)并考虑到(68), 我们有

$$\frac{\partial T}{\partial S} = \frac{1}{2} z' \left[\left(\frac{d\theta}{d\rho} \right)^2 + \tilde{k} \right] w_\theta^2 \frac{d\rho}{dS}, \quad \text{在 } \tilde{\sigma} + \bar{l}_1(\bar{l}_1) \text{ 上,} \quad (69)$$

这里 S 为边界弧长, 以逆时针方向为正.

现在假定极大值取在 $\bar{l}_2$ 上, 由(59)和(56)我们有

$$\frac{\partial T}{\partial S} = -\frac{1}{2} z' (w_\rho - \sqrt{-\tilde{k} w_\theta})^2 \frac{d\rho}{dS} > 0, \quad \text{在 } \bar{l}_2 \text{ 上.} \quad (70)$$

这说明 T 在 $\bar{l}_2$ 上的极值应取在 $\bar{l}_2$ 和 $\bar{l}_1(\bar{l}_1)$ 的交点 $\bar{R}'(\bar{R})$ 处, 亦即在 $\bar{l}_1(\bar{l}_1)$ 上. 再由(69)并考虑到(60), 有

$$\frac{\partial T}{\partial s} \geq 0, \quad \text{在 } \bar{l}_1(\bar{l}_1) \text{ 上,} \quad (71)$$

这说明 T 在 $\bar{l}_1(\bar{l}_1)$ 上的极值应取在 $\bar{l}_1(\bar{l}_1)$ 和 $\tilde{\sigma}$ 的交点 $\bar{P}$ 处, 亦即在 $\tilde{\sigma}$ 上.

我们令 $\tilde{\sigma}$ 上的切线(从 $\bar{P}$ 点开始以 s 增加的方向为正)和 θ 轴的交角为 τ , 假设 $\tilde{\sigma}$ 满足条件

$$-\pi \leq \tau \leq \pi, \quad (72)$$

并设 $\tau=0$ 的最低点(ρ 最小)为 H . 由(69)我们有

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial s} > 0, & \text{当 } \frac{d\rho}{ds} < 0 \text{ 时,} \\ \frac{\partial T}{\partial s} < 0, & \text{当 } \frac{d\rho}{ds} > 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad \text{在 } \tilde{\sigma} \text{ 上.} \quad (73)$$

因此, T 在 $\tilde{\sigma}$ 上的极值应取在最低点 H 点. 但是, 在 H 点如果曲线 $\tilde{\sigma}$ 在这点是光滑的, 则有 $d\rho=0$, 由(68)导出 $w_\theta=0$, 于是

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -T_\rho = -\frac{1}{2} z' w_\rho^2 \leq 0, \quad \text{在 } H \text{ 点,} \quad (74)$$

这里 n 为曲线 $\tilde{\sigma}$ 的外法线方向. 如果 H 点是角点, 我们假定当 $\tilde{k} > 2$ 时

$$-\frac{1}{\sqrt{\tilde{k}-2}} \leq \frac{d\rho}{d\theta} \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}-2}}, \quad \text{在 } H \text{ 点,} \quad (75)$$

则由(63)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n} &= \frac{\partial \rho}{\partial n} T_\rho + \frac{\partial \theta}{\partial n} T_\theta = -T_\rho \frac{\partial \theta}{\partial s} + T_\theta \frac{\partial \rho}{\partial s} \\ &= -\frac{1}{2} z' \left[\tilde{k} \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 - 1 \right] w_\rho^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} + z' \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 w_\rho^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} \leq 0, \quad \text{在 } H \text{ 点.} \end{aligned} \quad (76)$$

这里 $\frac{\partial T}{\partial n}$ 是指在 H 点的左边或右边的极限值.

另一方面, 根据椭圆型性质及 $\tilde{\sigma}$ 满足内锥条件, 若 T 在边界点取极大值, 则在此点应有 $\frac{\partial T}{\partial n} > 0$ (见 [8]), 这导出矛盾. 于是导出

$$T = \text{const}, \quad \text{在 } \Omega_1^+ \text{ 内}, \quad (77)$$

由 (63) 导出

$$w_\theta = w_\rho = 0, \quad \text{在 } \Omega_1^+ \text{ 内}, \quad (78)$$

再由边界条件导出

$$w = 0, \quad \text{在 } \Omega_1^+ \text{ 内}. \quad (79)$$

由上述的讨论知

$$0 = w|_{(\bar{P}, \bar{\varphi})} \leq w|_{\bar{\Omega}_1^-} < w|_{\bar{\Gamma}_2} < w|_{\bar{\Gamma}_1(\bar{\Gamma}_1)} < w|_{\bar{P}} = 0, \quad (80)$$

因此, 必须导出

$$w = 0, \quad \text{在 } \Omega_1^- \text{ 内}. \quad (81)$$

定理 6 设方程 (5') 的系数 $\tilde{k}$ 满足条件 (56), (58) 和 (65), 椭圆型域的边界 $\tilde{\sigma}$ 满足条件 (72) 和 (75). 于是广义 Tricomi 问题 T' (Tricomi 问题 T) (61) 只有零解.

定理 7 设混合曲率旋转曲面 $\tilde{S}$ 上一块 $\tilde{S}_1$ 包含有正曲率曲面 $\tilde{S}_1^+$ (其边界为满足条件 (72), (75) 的逐段光滑曲线 Σ_1 和蜕型线段 γ) 和负曲率曲面 $\tilde{S}_1^-$ (其边界为蜕型线段 γ , 一条渐近曲线 $\tilde{L}_2$ 和一条其斜率满足 (60) ((59)) 的逐段光滑曲线 $\tilde{L}_1'(\tilde{L}_1)$). 设曲面 $\tilde{S}$ 的经线满足条件 (56), (58) 和 (62). 若在边界 Σ_1 和 $\tilde{L}_1'(\tilde{L}_1)$ 处不允许曲面有平行于 z 轴方向的变形, 边界 $\tilde{L}_2$ 自由, 则曲面是刚的.

附注 5. 如果曲面 $\tilde{S}$ 的经线 $z=z(\rho)$ 满足条件

$$z'(\rho_0) \neq 0, \quad (56')$$

$$\tilde{k}_1(\rho) \begin{cases} < 0, & \rho_2 \leq \rho < \rho_0, \\ = 0, & \rho = \rho_0, \\ > 0, & \rho_0 < \rho \leq \rho_1, \end{cases} \quad (58')$$

则只要在定理的条件 (65) 中将 $\tilde{k}$ 换成 $-\tilde{k}_1$, $\tilde{k}'$ 换成 $-\tilde{k}_1'$ 就行了.

例 3 满足条件 (56), (58) 的曲面是很多的, 主要限制条件是 (65). 举出如下一类:

$$z(\rho) = A - C \int_0^\rho e^{\frac{B}{2}\rho_0\rho^2 - \frac{B}{3}\rho^3} d\rho, \quad (82)$$

其中 A, C 为任意正常数, B 为满足

$$0 < B < \frac{1}{2\rho_0(\rho_0 - \rho_2)^2} \quad (83)$$

的常数. 显见, 满足所有条件.

6. 几点说明

(1) 第 3 节中定理 1 和 2 的结果好象有点出乎意料之外, 事实上, 却并不意外. 因为方程 (5) 是属于第二类退化情形. 例如, 对非常光滑的曲面 (譬如例 1 和例 2 中的曲面) 来说, 在退化线 $\rho = \rho_0$ 附近有

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \frac{k(\rho)}{\rho - \rho_0} = \lambda \rho_0, \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (84)$$

因此, 对应于 Келдыш [4] 中

$$m=1, \quad a(\theta, \rho_0) = \frac{1}{\lambda} \geq 1 \quad (85)$$

的情形. 这时, 在椭圆型域中按 Келдыш 理论, 问题 E 是适定的. 所以, 当我们在非退化线 Γ^+ 上给条件 (30) 时, 唯一地可定出在椭圆型区域 Ω^+ 中 $w \equiv 0$. 再由在蜕型线 Γ_0 上的函数及其一阶微商的连续性就可推出, 在双曲型区域 Ω^- 中 $w \equiv 0$.

但是, 对方程 (5') 说来, 是属于第一类退化情形, 这时, 不仅问题 E 不适定, 而且问题 D (Dirichlet 问题) 在混合型域上也并非总是成立的, 见 [2].

(2) 定理 6, 7 中的条件 (65) 是与条件 (39) 有联系的, 考虑到 (58), 我们有

$$\Psi(\rho) \equiv \tilde{k}' + 2\rho\tilde{k}^2 = \tilde{k}^2\Phi(\rho). \quad (86)$$

只是我们对 Φ 和 Ψ 的要求, 符号刚好相反, 即在 (39) 中要求 $\Phi > 0$, 而在 (65) 中要求 $\Psi \leq 0$. 这种要求是完全合理的. 因为在第 3, 4 节中所讨论的方程和曲面与第 5 节中所讨论的方程和曲面是完全不同的两种类型. 它们并非是互为补充, 而是互相独立的. 对每种类型的曲面, 这样的条件不光是充分条件, 而且也是必要的. 例如, 对 (39) 或 (40), 因为随着 ρ 的增长, 通过蜕型线 $\rho = \rho_0$ 时曲面是从负曲率 ($K < 0$) 变到正曲率 ($K > 0$), 因此, 在蜕型线附近必须有 $K' > 0$. 反之, 对第 5 节中的曲面说来, 随着 ρ 的增长, 通过蜕型线 $\rho = \rho_0$ 时曲面是从正曲率到负曲率, 因此, 在蜕型线附近必须有 $K' < 0$.

(3) 对方程 (5') 的条件 (65) 是与 [9] 中“条件 A”的第一个条件一致的. 由于对 $\tilde{\sigma}$ 稍微加了些条件 (这种条件一般是能够得到满足的), 放宽了 $\tilde{l}_1$ 是特征线的条件, 同时用的方法也不同, 所以不需要 [9] 中第二个条件. 如果对方程 (5') 也象第 2 节那样用能量积分法来证唯一性 (这时对 $\tilde{\sigma}$ 的要求可放宽, 但 $\tilde{l}_1$ 要是特征线, 且待选函数 a, b, c 都用上) 则可得到除第一个条件外, 还需要和 [9] 中第二个条件一致的条件, 在我们这里的形式为

$$\frac{\tilde{k}'}{\tilde{k}' + 2\rho\tilde{k}^2} + 2\left(\frac{\tilde{k}}{\tilde{k}' + 2\rho\tilde{k}^2}\right)' \geq 0, \quad \text{在 } \Omega_1^- \text{ 内}. \quad (87)$$

特别, 当

$$\tilde{k}'' \geq 0, \quad \text{在 } \Omega_1^- \text{ 内} \quad (88)$$

时 (87) 显见成立. 由于推导比较繁, 我们从略. 条件 (87) (加上条件 (65)) 是 [10, 11] 中对 Чаплыгин 方程的问题 T 的唯一性条件 (注意到这里的 ρ 轴与他们的 y 轴方向相反)

$$\tilde{k}' < 0, \quad F \equiv 1 + 2\left(\frac{\tilde{k}}{\tilde{k}'}\right)' \geq 0, \quad \text{在 } \Omega_1^- \text{ 内} \quad (89)$$

对方程 (5') 的演化.

容易验证, 例 3 中的曲面是满足条件 (87) 的.

(4) 在第 1 节中我们规定 $z''(\rho)$ 除在 $\rho = \rho_0$ 可以有零点外, 别无其它的零点, 这是因为: 若 $z''(\rho_0) = 0$, 则会导出 $\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} k(\rho) = -\infty$. 这样, 在应用 Green 公式时就会产生麻烦, 如果这个困难能克服 (例如, 它的奇异性小于一阶), 那末就可在 $\rho = \rho_0$ 处光滑地任意接出另一块或正或负曲率的曲面, 而且不需添加任何条件就可使这添加的曲面也是刚的. 例如, 两个满足条件 (8) 和 (9) 的曲面所拼成的闭环面, 甚至在 Γ^+ 处都不给条件的情形下也是刚的 (见 [1] 中文版 443—445 页).

参 考 文 献

- [1] Веква, И. Н., Обобщенные аналитические функции, Москва, 1959 (中译本: 广义解析函数, 下册, 人民教育出版社 1960 年).
- [2] 孙和生, 关于混合型方程 $w_{\eta\eta} + \operatorname{sgn} \eta w_{\xi\xi} + \frac{M(\eta)}{\eta^2} w = 0$, (待发表)
- [3] 孙和生, 从几何中提出的一些偏微分方程问题, 数学学报, **10**: 3 (1960), 288—315.
- [4] Келдыш, М. В., О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. ДАН СССР, **77**: 2 (1951), 181—183.
- [5] Франкль, Ф. И., Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения. Прикл. матем. и мех., **20**: 2 (1956), 196—202.
- [6] Кароль, И. Л., О краевых задачах для уравнения смешанного типа, Вестн. ЛГУ сер. матем., мех. и астр., **1**: 1 (1956), 177—181.
- [7] Смирнов, М. М., Краевая задача для уравнения смешанного типа 2-го рода со смещением. Дифф. ур., **13**: 5 (1977), 931—943.
- [8] Gilbarg, D., Trudinger, N., S., Elliptic partial differential equations of second order. 1977.
- [9] Agmon, S., Nirenberg, L., Protter, M. H., A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type. Comm. Pure Appl. Math., **6** (1953), 455—470.
- [10] Франкль, Ф. И., О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений, Изв. АН СССР, сер. матем., **9**: 2 (1945), 121—142.
- [11] Protter, M. H., Uniqueness theorems for the Tricomi problem, J. Rational Mech. and Analysis, Part I, **2**: 1 (1953), 107—114; Part II, **4**: 5 (1955), 721—733.

ON THE PROBLEMS OF THE INFINITESIMAL DEFORMATION OF THE SURFACES OF REVOLUTION WITH MIXED CURVATURE

SUN HE SHENG

ABSTRACT

In this paper the problem of the infinitesimal deformation of the surfaces of revolution with mixed Gauss curvature is studied. In connection with this problem a differential equation of mixed type, which belongs to the second degenerate type, in the form

$$k(\rho)w_{\rho\rho} + w_{\theta\theta} + \rho w_{\rho} = 0 \quad (\rho_1 < \rho < \rho_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

is obtained, where w is the component of the displacement vector of the infinitesimal deformation in the direction of the rotation axis, and $k(\rho) = \rho z'(\rho)/z''(\rho)$, $z(\rho)$ being the meridian curve of the surface of revolution.

Suppose a surface of revolution S has two holes $L_1(\rho = \rho_1)$ and $L_2(\rho = \rho_2)$, then the meridian of the surface satisfies the condition $z'(\rho) = 0$ on $\rho = \rho_0$ ($\rho_1 < \rho_0 < \rho_2$).

If the Gauss curvature K of the surface is a strictly monotone increasing function of ρ , $K'(\rho) > 0$, $\rho_1 < \rho < \rho_2$, then the surface S does not permit of the non-trivial sliding on the plane containing the boundary L_2 of the surface. The rigidity of the surface is proved by the energy integral method.

Moreover, the uniqueness of the Tricomi problem, the generalized Tricomi problem, the degenerate Tricomi problem and the Frankl's problem for a piece of surface with mixed curvature are studied.