数 学 年 刊
2 (2) 1981

二阶非线性椭圆型方程组的复形式与某些边值问题

闻国椿　　方爱农
(北京大学)　　(湖南大学)

§1. 二阶非线性椭圆型方程组的复形式

设实变量 $x, y, x_1, \cdots, x_{12}$ 的实变函数 $\Phi_j(x, y, x_1, \cdots, x_{12})$, $j=1, 2$ 对区域 G 内任意的 x, y 和任意的实数 $x_1, \cdots, x_{12}$ 都有定义并且连续，又对任意的实数 $x_7, \cdots, x_{12}$ 都有一阶连续偏导数，而且没有实数 λ, 使以下行列式为 0, 即

$$I=|A+2B\lambda+C\lambda^2|=0, \tag{1.1}$$

则称二阶非线性偏微分方程组

$$\Phi_j(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy})=0, \quad j=1, 2, \tag{1.2}$$

为 Петровский, И. Г. 意义下的椭圆型方程组，简称为二阶 П-椭圆型方程组，其中 A、B、C 分别为下列二阶实方阵

$$A=\begin{pmatrix}\Phi_{1u_{xx}} & \Phi_{1v_{xx}}\\ \Phi_{2u_{xx}} & \Phi_{2v_{xx}}\end{pmatrix},\quad 2B=\begin{pmatrix}\Phi_{1u_{xy}} & \Phi_{1v_{xy}}\\ \Phi_{2u_{xy}} & \Phi_{2v_{xy}}\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}\Phi_{1u_{yy}} & \Phi_{1v_{yy}}\\ \Phi_{2u_{yy}} & \Phi_{2u_{yy}}\end{pmatrix},$$

关于一阶线性、非线性 П-椭圆型方程组的复变函数，不论是几何函数论、解析函数论还是边值问题，已有相当深入的研究[1,2,3,4]，而二阶 П-椭圆型方程组则不然，它的理论尚不完整，Iwaniec, T. 在 1976 年指出：至今似乎还不存在一种理论，可以有力的处理可测系数情形下的二阶一致椭圆型方程组方面的一些问题[11]． 1960 年，丁夏畦等从代数角度，对二阶 П-椭圆型方程组加以限制，引进了强椭圆型的概念，也就是说，如果对任意实数 $\beta, \gamma, \beta^2<\gamma$, 恒有

$$|A+2\beta B+\gamma C|\neq 0, \tag{1.3}$$

则称方程组(1.1)是 П-强椭圆型的[5]． 1965 年，华罗庚等从代数角度指出二阶线性常系数 П-椭圆型方程组可分为$(I_0)-(IV_0)$等四类，利用这四类标准型证明了丁夏畦等的强椭圆型与 Вишик, М. И. 强椭圆型的等价性，并且还证明了对于丁夏畦等所研究的强椭圆型方程组，Dirichlet 问题的唯一性定理是存在的[6]． 这显示了标准型的重要性．下面，我们从另外的角度，建立了二阶 П-椭圆型方程组的一个统一的标准型，即建立了以下的定理：

定理 1.1 (1) 对于在前述条件下的二阶 П-强椭圆型方程组 (1.1)，均可解出 $w_{z\bar z}$, 而得复形式的方程

本文 1979 年 11 月 17 日收到.

$$W_{z\bar{z}}=F(z,\ W,\ z,\ \overline{W}_z,\ W_{zz},\ \overline{W}_{zz}),\tag{1.4}$$

其中
$$W=u+iv,\ z=x+iy.$$

(2) 若二阶 Π-椭圆型方程组(1.1)适合下列条件: 有正常数 δ 与 K, 使

$$|\Phi_{ju_{xx}}|、|\Phi_{ju_{xy}}|、|\Phi_{ju_{yy}}|、|\Phi_{jv_{xx}}|、|\Phi_{jv_{xy}}|、|\Phi_{jv_{yy}}|\leqslant K,\quad j=1,\ 2,$$

$$\text{行列式}|A|\text{的绝对值}\geqslant\delta>0.$$

则恒可作一自变数 $(x,\ y)$ 的线性变换, 使对新自变数 $(\xi,\ \eta)$, 方程组 (1.1) 关于 $W_{\zeta\bar{\zeta}}$($\zeta=\xi+i\eta$)可解, 得到复形式的方程

$$W_{\zeta\bar{\zeta}}=F(\zeta,\ W,\ W_\zeta,\ \overline{W}_\zeta,\ W_{\zeta\zeta},\ \overline{W}_{\zeta\zeta})\tag{1.5}$$

证 (1) 将方程组(1.1)中的广义实导数用广义复导数表示出来, 也就是将

$$(\ )_x=(\ )_{\bar{z}}+(\ )_z,\quad (\ )_y=-i(\ )_{\bar{z}}+i(\ )_z,\quad (\ )_{xy}=-i(\ )_{\bar{z}\bar{z}}+i(\ )_{zz},$$

$$(\ )_{xx}=(\ )_{\bar{z}\bar{z}}+2(\ )_{z\bar{z}}+(\ )_{zz},\quad (\ )_{yy}=-(\ )_{\bar{z}\bar{z}}+2(\ )_{z\bar{z}}-(\ )_{zz}$$

代入方程组(1.1), 注意到

$$\Phi_{juz\bar{z}}=2(\Phi_{ju_{xx}}+\Phi_{ju_{yy}}),\quad \Phi_{jvz\bar{z}}=2(\Phi_{jv_{xx}}+\Phi_{jv_{yy}}),\quad j=1,\ 2,$$

易知有

$$\begin{pmatrix}\Phi_1u_{z\bar{z}} & \Phi_1v_{z\bar{z}}\\ \Phi_2u_{z\bar{z}} & \Phi_2v_{z\bar{z}}\end{pmatrix}=2(A+C).\tag{1.6}$$

在条件(1.3)中, 取 $\beta=0,\ \gamma=1$, 可得行列式

$$|A+C|\neq0.$$

因此, 根据(1.6), 方程组(1.1)关于 $u_{z\bar{z}}$、$v_{z\bar{z}}$ 恒可解, 得到如下的方程组

$$u_{z\bar{z}}=F_1(z,\ u,\ v,\ u_z,\ v_z,\ u_{zz},\ v_{zz}),\quad v_{z\bar{z}}=F_2(z,\ u,\ v,\ u_z,\ v_z,\ u_{zz},\ v_{zz}).$$

令 $W(z)=u(z)+iv(z)$, 则以上方程组可写成(1.4)式.

(2) 作线性变换

$$\xi=x-\sqrt{t}\,y,\quad \eta=x+\sqrt{t}\,y,$$

其中 t 是待定正常数, 则

$$(\ )_{xx}=(\ )_{\xi\xi}+2(\ )_{\xi\eta}+(\ )_{\eta\eta},$$
$$(\ )_{xy}=-\sqrt{t}(\ )_{\xi\xi}+\sqrt{t}(\ )_{\eta\eta},$$
$$(\ )_{yy}=-2t(\ )_{\xi\eta}+t(\ )_{\xi\xi}+t(\ )_{\eta\eta},$$

因而有

$$\Phi_{ju_{\xi\xi}}=\Phi_{ju_{xx}}-\Phi_{ju_{xy}}\sqrt{t}+\Phi_{ju_{yy}}t,\quad \Phi_{ju_{\eta\eta}}=\Phi_{ju_{xx}}+\Phi_{ju_{xy}}\sqrt{t}+\Phi_{ju_{yy}}t,$$
$$\Phi_{jv_{\xi\xi}}=\Phi_{jv_{xx}}-\Phi_{jv_{xy}}\sqrt{t}+\Phi_{jv_{yy}}t,\quad \Phi_{jv_{\eta\eta}}=\Phi_{jv_{xx}}+\Phi_{jv_{xy}}\sqrt{t}+\Phi_{jv_{yy}}t,$$

$j=1,\ 2$, 于是有以下矩阵公式

$$\begin{pmatrix}\Phi_{1u_{\xi\xi}} & \Phi_{1v_{\eta\eta}}\\ \Phi_{2u_{\xi\xi}} & \Phi_{2v_{\eta\eta}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Phi_{1u_{\eta\eta}} & \Phi_{1v_{\xi\xi}}\\ \Phi_{2u_{\eta\eta}} & \Phi_{2v_{\xi\xi}}\end{pmatrix}=2(A+tC),\tag{1.7}$$

经计算得到等式

$$|A+tC|=|A|+(|D_{ac}|+|D_{ca}|)t+|C|t^2,\tag{1.8}$$

其中
$$D_{ac}=\begin{pmatrix}\Phi_{1u_{xx}} & \Phi_{1v_{yy}}\\ \Phi_{2u_{xx}} & \Phi_{2v_{yy}}\end{pmatrix},\quad D_{ca}=\begin{pmatrix}\Phi_{1u_{yy}} & \Phi_{1v_{xx}}\\ \Phi_{2u_{yy}} & \Phi_{2v_{xx}}\end{pmatrix}.$$

根据假设, $|A|\geqslant\delta>0$, $|C|$、$|D_{ac}|$、$|D_{ca}|$ 有界, 其绝对值不超过 $2K^2$. 因此可取 t 充分

小，使(1.8)的右端大于 $\frac{1}{2}\delta>0$，即

$$|A+iC|\geqslant\frac{1}{2}\delta>0.$$

由此，利用(1.7)，如(1)的证明一样，可证明经上述线性变换后的方程组(1.2)，对于新自变数关于 $W_{\zeta\bar\zeta}$ 可解，而得复形式的方程(1.5)．　　证毕.

根据 Петровский, И. Г. 椭圆型的定义，在(1.1)中，取 $\lambda=0$ 得到 $|A|\neq0$ 在 G 内成立，并不妨设 $|A|>0$. 因此定理 1.1 第二部分中设 $|A|\geqslant\delta>0$ 是 П-椭圆型定义的自然加强，不是不可能实现的.

类似于一阶一致椭圆型复方程(见[3, 4])，对于二阶非线性复方程(1.4)，它在区域 G 内的一致椭圆型，用以下不等式来定义

$$|F_{W_{zz}}|+|F_{\overline{W}_{\bar z\bar z}}|+|F_{\overline{W}_{zz}}|+|F_{W_{\bar z\bar z}}|\leqslant q_0<1,\tag{1.9}$$

这里 q_0 是常数，而华罗庚等在[6]中建立的第 IV_0 种标准型的复形式为

$$W_{z\bar z}+\frac{1-\mu}{4(1+\mu)}(W_{zz}-\overline{W}_{zz})+\frac{1-\mu}{4(1+\mu)}(W_{\bar z\bar z}-\overline{W}_{\bar z\bar z})=0,\quad \mu>0,$$

显然满足

$$|F_{W_{zz}}|+|F_{\overline{W}_{\bar z\bar z}}|+|F_{\overline{W}_{zz}}|+|F_{W_{\bar z\bar z}}|\leqslant q_0=\frac{|1-\mu|}{1+\mu}<1.$$

但其余三种标准型都是仅当 α、λ、μ 满足一定条件时，才满足相应的不等式.

本文中，所考虑的区域 G 是 z 平面上的有界单连通区域，其边界 $\Gamma\in C^2_\mu$, $0<\mu\leqslant1$，不失一般性，可以认为 G 是单位圆 $|z|<1$. 下面讨论形如下的二阶非线性复方程，即

$$\begin{cases}W_{z\bar z}=F(z, W, W_z, \overline{W}_z, W_{zz}, \overline{W}_{zz}),\\ F=Q_1W_{zz}+Q_2\overline{W}_{\bar z\bar z}+Q_3\overline{W}_{zz}+Q_4W_{\bar z\bar z}+F_0(z, W, W_z, \overline{W}_z),\\ F_0=A_1W_z+A_2\overline{W}_{\bar z}+A_3\overline{W}_z+A_4W_{\bar z}+A_5W+A_6\overline{W}+A_7.\end{cases}\tag{1.10}$$

其中

$$Q_j=Q_j(z, W, W_z, \overline{W}_z, W_{zz}, \overline{W}_{zz}),\quad j=1, \cdots, 4,$$
$$A_j=A_j(z, W, W_z, \overline{W}_z),\quad j=1, \cdots, 7.$$

并设方程(1.10)满足条件 C.

1) $Q_j(z, W, W_1, W_2, U, V)$, $j=1, \cdots, 4$, $A_j(z, W, W_1, W_2)$, $j=1, \cdots, 7$, 对 $z\in G$ 及任意的复数 W, W_1, W_2, U, V 有定义，且

$$Q_j(z, W, W_1, W_2, U, V)=0,\quad A_j(z, W, W_1, W_2)=0,\quad 当 z\overline{\in}G 时;$$

2) 对于 G 内任意具有一阶连续偏导数的函数 $W(z)$ 与可测函数 $U(z)$、$V(z)$, $Q_j(z, W, W_z, \overline{W}_z, U, V)$ $j=1, \cdots, 4$, $A_j(z, W, W_z, \overline{W}_z)$, $j=1, \cdots, 7$ 在 G 内可测;

3) 方程(1.9)在 G 内满足一致椭圆条件，即对任意于 G 内具有一阶连续偏导数的函数 $W(z)$ 与复数 $U, U_1, U_2, V, V_1, V_2\in E$，在 G 内几乎处处有

$$\begin{cases}|Q_1|+|Q_2|\leqslant q_0,\quad |Q_3|+|Q_4|\leqslant q_0',\quad q_0+q_0'<1,\\ |F(z, W, W_z, \overline{W}_z, U_1, V_1)-F(z, W, W_z, \overline{W}_z, U_2, V_2)|\\ \quad\leqslant q_0|U_1-U_2|+q_0'|V_1-V_2|,\end{cases}\tag{1.11}$$

其中 q_0, q_0' 都是非负常数;

4) 将 3)中所述的函数 $W(z)$代入 A_j. $A_j(z, W, W_z, \overline{W}_z)$ $(j=1, \cdots, 7)$ 均满足条件

$$\begin{cases} \|A_j\|_{L_p(\overline{G})} \leqslant k_1 < k_0, & j=1,\ 2,\ 7, \\ \|A_j\|_{L_p(\overline{G})} \leqslant k_2 < k_0, & j=3,\ \cdots,\ 6, \end{cases} \tag{1.12}$$

这里 $p(>2)$、$k_j(j=0,\ 1,\ 2)$都是常数;

5) 函数 $Q_j(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ U,\ V)(j=1,\ \cdots,\ 4)$, $A_j(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z)(j=1,\ \cdots,\ 7)$ 一致的对 $z\in G_0$(G_0 是 G 内任一闭集)与 $U,\ V\in E$ 关于 W、W_z、$\overline{W}_z$ 连续.

本文中,我们讨论二阶复方程(1.10)(满足条件 C)的 Riemann-Hilbert 边值问题与一种斜微商边值问题,给出在一定条件下的这两种边值问题解的表示式与估计式,然后用 Leray-Schauder 定理证明了这两种边值问题的可解性.

§2. 方程(1.10) Riemann-Hilbert 问题解的表示式与估计式

先叙述二阶非线性复方程(1.10)的 Riemann-Hilbert 边值问题(问题 R-H).

问题 R-H 求二阶非线性一致椭圆型复方程(1.10)(满足条件 C)在单位圆 $\overline{G}$ 上的连续可微解 $W(z)$,使它适合边界条件

$$\mathrm{Re}[\bar{t}^{\varkappa_1}\overline{W(t)}]=r_1(t),\quad \mathrm{Re}[\bar{t}^{\varkappa_2}W_t]=r_2(t),\quad t\in\Gamma:\ |t|=1, \tag{2.1}$$

其中 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ 都是整数, $C^1_\nu[r_1(t),\ \Gamma]\leqslant l, C_\nu[r_2(t),\Gamma]\leqslant l$, 这里 $\nu\left(\frac{1}{2}<\nu<1\right), l(0<l<\infty)$ 都是常数.

方程(1.10)问题 R-H 的可解性与标数 $\varkappa_1$、$\varkappa_2$ 有关,下面我们分四种情形进行讨论:

1) $\varkappa_1\geqslant 0,\ \varkappa_2\geqslant 0$, 2) $\varkappa_1\geqslant 0,\ \varkappa_2<0$;

3) $\varkappa_1<0,\ \varkappa_2\geqslant 0$; 4) $\varkappa_1<0,\ \varkappa_2<0$.

当标数 $\varkappa_1\geqslant 0$ 时,还设

$$\int_\Gamma[\overline{W(z)}-\Phi_1(z)]z^{-m-1}dz=0,\quad m=0,\ 1,\ \cdots,\ 2\varkappa_1,$$

而当 $\varkappa_2\geqslant 0$ 时,则设

$$\int_\Gamma[W_z-\Phi_2(z)]z^{-m-1}dz=0,\quad m=0,\ 1,\ \cdots,\ 2\varkappa_2,$$

这里 $\Phi_j(z)$ 是满足边界条件

$$\mathrm{Re}[\bar{z}^{\varkappa_j}\Phi_j(z)]=r_j(z),\quad z\in\Gamma,\ j=1,\ 2 \tag{2.2}$$

的解析函数.当 $\varkappa_1<0$ 或 $\varkappa_2<0$ 时,以上边值问题不一定可解,因此考虑这样的变态问题,即将边界条件(2.1)改为

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,[\bar{t}^{\varkappa_1}\,\overline{W(t)}]=r_1(t)+h_1(t), \\ \mathrm{Re}\,[\bar{t}^{\varkappa_2}W_t]=r_2(t)+h_2(t), \\ h_j(t)=\begin{cases} 0, & \text{当 } \varkappa_j\geqslant 0 \text{ 时},\ j=1,\ 2,\ t\in\Gamma, \\ \lambda_0^{(j)}+\mathrm{Re}\sum\limits_{m=1}^{|\varkappa_j|-1}(\lambda_m^{(j)}+i\lambda_{-m}^{(j)})t^m, & \text{当 } \varkappa_j<0 \text{ 时}, \end{cases} \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $\lambda^{(j)}_{\pm m}(m=0,\ 1,\ \cdots,\ |\varkappa_j|-1,\ j=1$ 或 $2)$都是待定常数.

问题 R－H* 求二阶非线性复方程(1.10)(满足条件 C)在单位圆 $\overline{G}$ 上的连续可微解

$W(z)$，使它适合边界条件(2.3)，特别，当(2.3)中的待定常数 $\lambda_{\pm m}^{(j)}=0(m=0, 1, \cdots, |\varkappa_j|-1, j=1, 2)$ 时，则问题 $R-H^*$ 就是问题 $R-H$.

为了给出方程(1.10)问题 $R-H$、问题 $R-H^*$ 解的表示式，先引进适合齐次边界条件

$$\operatorname{Re}[\bar{t}^{\varkappa}(H\rho)_t]=0, \quad t\in\Gamma \tag{2.4}$$

的积分算子，即

$$H\rho=\frac{2}{\pi}\iint_G \rho(\zeta)\ln|\zeta-z|d\sigma_\zeta+\int_0^z P_0\rho\,dz+\int_0^{\bar{z}}\overline{P_0\rho}\,d\bar{z}, \quad \rho(z)\in L_p(\overline{G}),\ p>2, \tag{2.5}$$

其中

$$P_0\rho=-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{z^{2\varkappa+1}\overline{\rho(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}z}d\sigma_\zeta \quad (\varkappa\geqslant 0),$$

$$P_0\rho=-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\bar{\zeta}^{-2\varkappa-1}\overline{\rho(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}z}d\sigma_\zeta \quad (\varkappa<0).$$

并记 $P\rho=P_0\rho-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\rho(\zeta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta$，则有

引理 2.1 (1) 设 $\rho(z)\in L_p(\overline{G})$, $p>1$, 则

$$\begin{cases}(H\rho)_z=P\rho, \quad (H\rho)_{\bar{z}}=\overline{P\rho}, \quad (H\rho)_{z\bar{z}}=\rho(z),\\ (H\rho)_{zz}=S_\varkappa\rho=\hat{S}_\varkappa\rho+\tilde{S}_\varkappa\rho, \quad (H\rho)_{\bar{z}\bar{z}}=\overline{S_\varkappa\rho}=\overline{\hat{S}_\varkappa\rho}+\overline{\tilde{S}_\varkappa\rho},\end{cases} \tag{2.6}$$

其中

$$\hat{S}_\varkappa\rho=\begin{cases}-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_G\left[\frac{\rho(\zeta)}{(\zeta-z)^2}+\frac{z^{2\varkappa+1}\bar{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{(1-\bar{\zeta}z)^2}\right]d\sigma_\zeta, & \varkappa\geqslant 0,\\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_G\left[\frac{\rho(\zeta)}{(\zeta-z)^2}+\frac{\bar{\zeta}^{-2\varkappa}\overline{\rho(\zeta)}}{(1-\bar{\zeta}z)^2}\right]d\sigma_\zeta, & \varkappa<0,\end{cases}$$

$$\tilde{S}_\varkappa\rho=\begin{cases}-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_G\frac{(2\varkappa+1)z^{2\varkappa}\overline{\rho(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}z}d\sigma_\zeta, & \varkappa\geqslant 0,\\ 0, & \varkappa<0.\end{cases}$$

(2) 在上述条件下，$S\rho$ 是将 $L_p(\overline{G})$ 映射到自身的线性有界算子，并满足

$$\|S_\varkappa\rho\|_{L_p(\overline{G})}\leqslant\Lambda_p\|\rho\|_{L_p(\overline{G})}, \quad \hat{\Lambda}_2=1(\varkappa>0), \quad \Lambda_2=\hat{\Lambda}_2=1 \quad (\varkappa<0), \tag{2.7}$$

这里

$$\Lambda_p=\sup_{\rho(z)\in L_p(\overline{G})}\frac{\|S_\varkappa\rho\|_{L_p(\overline{G})}}{\|\rho\|_{L_p(\overline{G})}},$$

$$\hat{\Lambda}_p=\sup_{\rho(z)\in L_p(\overline{G})}\frac{\|\hat{S}_\varkappa\rho\|_{L_p(\overline{G})}}{\|\rho\|_{L_p(\overline{G})}},$$

当常数 $q_0+q_0'<1$，则存在正数 $p_0\left(2<p_0<\min\left(p, \frac{1}{1-\nu}\right)\right)$，使

$$(q_0+q_0')\Lambda_{p_0}<1 \quad (\varkappa\leqslant 0), \quad (q_0+q_0')\hat{\Lambda}_{p_0}<1 \quad (\varkappa>0). \tag{2.8}$$

(3) 若 $\rho(z)\in L_p(\overline{G})$, $p>2$, 则

$$C_\alpha^1[H\rho, \overline{G}]\leqslant M_1\|\rho\|_{L_p(\overline{G})}, \quad \alpha=\frac{p_0-2}{p_0}, \quad M_1=M_1(p), \tag{2.9}$$

且当 $\varkappa\geqslant 0$ 时，$H\rho$ 适合边界条件(2.4)，而当 $\varkappa<0$ 时，$H\rho$ 适合边界条件(2.4)的充要条件是

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_G \zeta^{-\varkappa-1}\rho(\zeta)d\sigma_\zeta - ic = 0,\\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_G [\zeta^{-\varkappa-j-1}\rho(\zeta)+\bar{\zeta}^{-\varkappa+j-1}\overline{\rho(\zeta)}]d\sigma_\zeta = 0, \quad j=1, \cdots, -\varkappa-1.\end{cases} \tag{2.10}$$

自然，$\overline{S_\varkappa\bar{\rho}}$、$H\bar{\rho}$ 也分别适合(2.7)、(2.9)中的不等式.

证　(2.6)的前两式通过直接计算而得，其余各式与(2.7)式由[1]第四章§9中可知. (2.8)式由 Riesz 凸性定理可得. 而(2.9)式也可由(2.5)及[1]定理1.23导出. 至于当 $\varkappa<0$ 时，$H\rho$ 适合边界条件(2.4)的充要条件为(2.10)式成立，这可仿[1]第四章§7中的方法得到.

现在用积分算子 $H\rho$ 表示方程(1.10)问题 $R-H^*$(当(2.3)中的 $h_j(t)\equiv 0$ 时，则为问题 $R-H$)的解 $W(z)$.

定理 2.1　设 $W(z)$ 是二阶非线性椭圆型方程(1.10)的问题 $R-H^*$ 的解，则它可表示成

$$W(z)=\overline{\Phi(z)}+\int_0^z \Phi_2(z)dz+H\rho, \quad \rho(z)=W_{z\bar{z}}\in L_{p_0}(\bar{G}), \tag{2.11}$$

其中 $\varkappa=\varkappa_2$, $\Phi(z)$, $\Phi_2(z)$ 都是 G 内的解析函数，具有形式

$$\Phi_j(z)=\begin{cases}\dfrac{z^{\varkappa_j}}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma r_j(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}+\sum_{m=0}^{2\varkappa_j}C_m^{(j)}z^m,\\ C_{2\varkappa_j-m}^{(j)}=-\bar{C}_m^{(j)}, \quad m=0, \cdots, \varkappa_j, \ \varkappa_j\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{r_j(t)}{t^{-\varkappa_j}(t-z)}dt, \quad \varkappa_j<0, \ j=1, 2,\end{cases} \tag{2.12}$$

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)+\begin{cases}\dfrac{z^{\varkappa_1}}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma r(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}, \quad \varkappa_1\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{r(t)}{t^{-\varkappa_1}(t-z)}dt, \quad \varkappa_1<0,\end{cases} \tag{2.13}$$

这里
$$r(t)=-\operatorname{Re}\left\{\bar{t}^{\varkappa_1}\overline{\left[\int_0^t \Phi_2(z)dz+H\rho\right]}\right\}.$$

不难看出：以上定理可不限于方程(1.10)问题 $R-H^*$ 的解 $W(z)$，只要 $W_{z\bar{z}}\in L_{p_0}(\bar{G})$，又 $W(z)$、W_z 满足边界条件(2.3)，则 $W(z)$ 就可表示成(2.11)式. 证毕.

为了给出方程(1.10)问题 $R-H^*$ 的解 $W(z)$ 的估计式，我们可先固定(2.12)，(2.13)式中的任意复常数 $C_m^{(j)}(m=0, 1, \cdots, \varkappa_j, j=1, 2)$.

定理 2.2　设 $W(z)$ 是二阶非线性椭圆型方程(1.10)问题 $R-H^*$ 满足 $\|W_{z\bar{z}}\|_{L_{p_0}(\bar{G})}\leqslant M$(待定常数)的解，如果条件 C 中的常数 q_0'、k_2 适当小，则此解 $W(z)$ 满足估计式

$$C_\alpha^1[W(z), \bar{G}]\leqslant M_2, \quad \|\rho\|=\|W_{z\bar{z}}\|_{L_{p_0}(\bar{G})}<M_3, \quad \|W_{zz}\|_{L_{p_0}(\bar{G})}\leqslant M_4, \tag{2.14}$$

其中
$$\alpha=\frac{p_0-2}{p_0}, \quad M_j=M_j(q_0, p_0, k_0, G, \Phi_1, \Phi_2), \quad j=2, 3, 4,$$

并取 $M=M_3$.

证　将定理中所述的解 $W(z)$ 代入方程(1.10)，则有

$$\begin{cases} W_{z\bar{z}}=q_1(z)W_{zz}+A_1W_z+A_2\overline{W}_{\bar{z}}+A, \\ A=A_3\overline{W}_z+A_4W_{\bar{z}}+A_5W+A_6\overline{W}+A_7+q_2(z)\overline{W}_{zz}, \\ q_1(z)=\begin{cases} \dfrac{F(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ W_{zz},\ \overline{W}_{zz})-F(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ 0,\ \overline{W}_{zz})}{W_{zz}}, & \text{当 } W_{zz}\neq 0 \text{ 时}, \\ 0, \quad \text{当 } W_{zz}=0 \text{ 时}, \end{cases} \\ q_2(z)=\begin{cases} \dfrac{F(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ 0,\ \overline{W}_{zz})-F(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ 0,\ 0)}{\overline{W}_{zz}}, & \text{当 } \overline{W}_{zz}\neq 0 \text{ 时}, \\ 0, \quad \text{当 } \overline{W}_{zz}=0 \text{ 时}. \end{cases} \end{cases} \tag{2.15}$$

我们可先设 A 满足条件

$$\|A\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant M_5<\infty, \tag{2.16}$$

这里 $M_5(k_0<M_5<10k_0)$ 是一个常数．并令 $W_z(z)=W_z$，则从(2.15)，可得一阶一致椭圆型复方程

$$W_{z\bar{z}}=q_1(z)W_{zz}+A_1W_2+A_2\overline{W}_2+A, \tag{2.17}$$

由条件 C，可知 $q_1(z)$ 在单位圆 G 上可测，且几乎处处满足 $|q_1(z)|\leqslant q_0<1$，又 $\|A_j\|_{L_p(\overline{G})}\leqslant k_1<k_0$，$j=1,\ 2$，故由[7]中的结果或[4]第三章定理 2.1，定理 2.2，可知 $W_2(z)=W_z$ 满足估计式

$$C_\alpha[W_z,\ \overline{G}]\leqslant M_6,\quad \|\rho\|=\|W_{z\bar{z}}\|_{L_{p_0}(\overline{G})}<M_3,\quad \|W_{zz}\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant M_4, \tag{2.18}$$

其中 $\alpha=\dfrac{p_0-2}{p_0}$，$M_j=M_j(q_0,\ p_0,\ k_0,\ G,\ \Phi_1,\ \Phi_2)$，$j=6,\ 3,\ 4$．又注意到 $W(z)$ 的表示式(2.11)及以下引理 2.2，那么总可选取 q_0'、k_2 适当小，使(2.16)式成立，这样从(2.18)式，便可得到估计式(2.14)．　　证毕．

引理 2.2　设 $\rho(z)\in L_{p_0}(\overline{G})$，$p_0>2$，则(2.11)式中的 $\Phi(z)$，$W(z)$ 满足估计式

$$\|\Phi''(z)\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant k_3,\quad \|W_{zz}\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant k_4, \tag{2.19}$$

这里常数 $k_j=k_j(\nu,\ l,\ \rho)$，$j=3,\ 4$，其实 k_j 还依赖于(2.12)中的任意常数 $C_m^{(j)}$，但我们可固定这些常数．

证　由书[1]定理 1.10，定理 1.11，可知(2.11)式中的 $\Phi_j(z)$ 满足

$$\|\Phi_2'(z)\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant k_5,\quad \|\Phi_1''(z)\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant k_6, \tag{2.20}$$

其中 $k_j=k_j(\nu,\ l)$，$j=5,\ 6$，而(2.13)中的积分

$$\Phi_3(z)=\int_\Gamma r(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}=\int_\Gamma\frac{zr(t)}{t-z}dt-\int_\Gamma\frac{r(t)}{t}dt\quad(\text{当 } \varkappa_1\geqslant 0 \text{ 时}),$$

且

$$\Phi_3'(z)=\int_\Gamma\frac{-i\bar{t}r_\theta'(t)}{t-z}dt,\quad r_\theta'(t)=itr_t-i\bar{t}r_{\bar{t}},$$

又

$$(H\rho)_\theta'=itP\rho-i\bar{t}\overline{P\rho},$$

$$P\rho=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\rho(\zeta)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta-\frac{z^{2\varkappa_1+1}}{\pi}\iint_{|\zeta_1|\geqslant 1}\frac{\zeta_1|\zeta_1|^{-4}\rho\left(\dfrac{1}{\overline{\zeta}_1}\right)}{\zeta_1-z}d\sigma_{\zeta_1},$$

这样可由文[8]中的方法，获得

$$\|\Phi_3''(z)\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant k_7=k_7(\nu,\ l,\ \rho), \tag{2.21}$$

对于 $\Phi_4(z)=\int_\Gamma \frac{r(t)}{t^{-\varkappa_1}(t-z)}dt$(当 $\varkappa_1<0$ 时),同理可得类似的估计式.这样就可导出(2.19)的第一式.

至于(2.19)的第二式可由(2.11),(2.20)及(2.19)的第一式得到.

§3. 方程(1.10)Riemann-Hilbert 问题的可解性

我们先用 Leray-Schauder 定理证明方程(1.10)问题 $R-H^*$ 的可解性,然后再给出方程(1.10)问题 $R-H$ 的可解条件.

定理3.1 设二阶非线性椭圆型复方程(1.10)满足条件 C;

(1) 如果方程(1.10)问题 $R-H^*$ 形如(2.11)且满足 $\|W_{z\bar z}\|_{L_{p_0}(\bar G)}\leqslant M_7$ 的所有解 $W(z)$ 也满足估计式

$$\|\rho(z)\|_{L_{p_0}(\bar G)}<M_7, \tag{3.1}$$

这里 M_7 是与 $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$有关的常数,那么方程(1.10)的问题 $R-H^*$ 具有形如(2.11)的解 $W(z)$.

(2) 如果方程(1.10)系数条件中的 q'_0、k_2 适当小,那么方程(1.10)问题 $R-H^*$ 形如(2.11)且适合 $\|W_{z\bar z}\|_{L_{p_0}(\bar G)}\leqslant M_7$ 的解 $W(z)$ 满足(2.14)的第二式,因而有(3.1)式(只要取 $M_7=M_3$),故由(1),知方程(1.10)的问题 $R-H^*$ 可解.

证 我们只要证明情形(1). 先考虑方程(1.10)的各系数在 G 内的闭子集 G_m 外等于0的情形,注意到问题 $R-H^*$ 解 $W(z)$ 的表示式(2.11),下面来求解积分方程或泛函方程

$$\begin{aligned}\rho^*(z)=tF(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ \Phi_2'(z)+\hat S_{\varkappa_2}\rho^*+\tilde S_{\varkappa_2}\rho,\ \Phi''(z)\\ +\tilde S_{\varkappa_2}\bar\rho^*+\tilde S_{\varkappa_2}\bar\rho),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $W(z)=\overline{\Phi(z)}+\int_0^z\Phi_2(z)dz+H\rho$, $W_z=\Phi_2(z)+P\rho$, $\overline{W}_z=\Phi'(z)+P\bar\rho$,

$\rho(z)\in L_{p_0}(\bar G)$, 又 $\Phi(z)$如(2.13)所示. 由引理2.2,可以证明: $\Phi_2'(z)$、$\Phi''(z)\in L_{p_0}(\bar G)$,因此由压缩映射原理,可由方程(3.2)求得唯一解 $\rho^*(z)\in L_{p_0}(\bar G)$,记 $\rho(z)$到 $\rho^*(z)$的映射为

$$\rho^*=T(\rho,\ t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

根据定理的条件,可知: 如果积分方程

$$\begin{aligned}\rho(z)=tF(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ \Phi_2'(z)+\hat S_{\varkappa_2}\rho+\tilde S_{\varkappa_2}\rho,\ \Phi''(z)\\ +\hat S_{\varkappa_2}\bar\rho+\tilde S_{\varkappa_2}\bar\rho),\quad 0\leqslant t\leqslant 1\end{aligned} \tag{3.3}$$

具有解 $\rho(z)\in L_{p_0}(\bar G)$,那么此解满足估计式(3.1). 设 R_M 是由满足不等式 $\|\rho\|_{L_{p_0}(\bar G)}<M_7$ 的可测函数 $\rho(z)$ 全体所构成的集合,它是 Banach 空间 R: $L_{p_0}(\bar G)$ 中的有界开集,记 $R_0=R_M\times[0,\ 1]$. 并可验证 $\rho^*=T(\rho,\ t)$ 满足 Leray-Schauder 定理中的三个条件:

1) 对每一个 $t\in[0,\ 1]$,算子 $T(\rho,\ t)$将 R 连续映射到自身,并在闭集 $\bar R_M$ 上完全连续,对 $t\in[0,\ 1]$一致连续.

先证 $\rho^*=T(\rho,\ t)(0\leqslant t\leqslant 1)$在 $\bar R_M$ 上的完全连续性. 任给 $\rho_n(z)\in\bar R_M$, $n=3,\ 4,\ \cdots$,且 $\rho_n^*(z)=T[\rho_n(z),\ t]$, $n=3, 4,\ \cdots$, 即

$$\rho_n^*=tF(z,\ W_n,\ W_{nz},\ \overline{W}_{nz},\ \Phi_2'(z)+\hat S_{\varkappa_2}\rho_n^*+\tilde S_{\varkappa_2}\rho_n,\ \Phi_n''(z)+\hat S_{\varkappa_2}\bar\rho_n^*+\tilde S_{\varkappa_2}\bar\rho_n)\quad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{3.4}$$

其中
$$W_n(z)=\overline{\Phi_n(z)}+\int_0^z \Phi_2'(z)dz+H\rho_n.$$

又 $\Phi_n(z)$ 如(2.13)所示，而那里 $r(t)$ 中的 $\rho(z)$ 应改为 $\rho_n(z)$. 为了书写简便，将上式改写成

$$\rho_n^*==tf(z,\ \rho_n,\ \hat{S}_{\varkappa_2}\rho_n^*,\ \hat{S}_{\varkappa_2}\bar{\rho}_n^*),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\ n=3,\ 4,\ \cdots,\tag{3.5}$$

并把对应于 $n,\ m$ 的(3.5)式相减，得

$$\rho_n^*-\rho_m^*=t[f(z,\ \rho_n,\ \hat{S}_{\varkappa_2}\rho_n^*,\ \hat{S}_{\varkappa_2}\bar{\rho}_n^*)-f(z,\ \rho_n,\ \hat{S}_{\varkappa_2}\rho_m^*,\ \hat{S}_{\varkappa_2}\bar{\rho}_m^*)+c_{n,m}],\tag{3.6}$$

这里
$$c_{n,m}=f(z,\ \rho_n,\ \hat{S}_{\varkappa_2}\rho_m^*,\ \hat{S}_{\varkappa_2}\bar{\rho}_m^*)-f(z,\ \rho_m,\ \hat{S}_{\varkappa_2}\rho_m^*,\ \hat{S}_{\varkappa_2}\bar{\rho}_m^*).$$

由于引理 2.1, 定理 2.1, 定理 2.2, 可知能从 W_n, W_{nz}, $\overline{W}_{nz}$, $\tilde{S}_{\varkappa_2}\rho_n$, $\tilde{S}_{\varkappa_2}\bar{\rho}_n$ 选取子序列(不妨设原序列) 在 $\overline{G}$ 上分别一致收敛到 $W_0(z)$, W_{0z}, $\overline{W}_{0z}$, $U_0(z)$, $V_0(z)$, 又可从 $\Phi_n''(z)$ 选取子序列(不妨设原序列)在 G 内闭一致收敛到解析函数 $\Phi_0''(z)$. 这样一来从条件 C, 便得当 $n,\ m\to\infty$ 时, $\|c_{n,m}\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\to 0$, 又由(3.6), 可得

$$\|\rho_n^*-\rho_m^*\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant\frac{\|c_{n,m}\|_{L_{p_0}(\overline{G})}}{1-(q_0+q_0')\hat{\Lambda}_{p_0}},\tag{3.7}$$

故当 $n,\ m\to\infty$ 时, 有 $\|\rho_n^*-\rho_m^*\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\to 0$. 由 $L_{p_0}(\overline{G})$ 空间的完备性, 则知存在 $\rho_0^*(z)\in L_{p_0}(\overline{G})$, 使得: 当 $n\to\infty$ 时, $\|\rho_n^*-\rho_0^*\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\to 0$. 故 $\rho^*=T(\rho,\ t)$ 对每一个 $t\in[0,\ 1]$ 在 $\overline{R}_M$ 上是完全连续的. 关于 $\rho^*=T(\rho,\ t)$ 对每一个 $t\in[0,\ 1]$ 是 R 上的连续映射, 可类似地证明, 即: 对 $\rho_n(z)\in R$, $n=0,\ 3,\ 4,\ \cdots$, 且当 $n\to\infty$ 时, $\|\rho_n-\rho_0\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\to 0$, 则有 $\|\rho_n^*-\rho_0^*\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\to 0$, 其中 $\rho_n^*=T(\rho_n,\ t)$, $0\leqslant t\leqslant 1, n=0,\ 3,\ 4,\ \cdots$. 至于 $T(\rho,\ t)$ 在 $\overline{R}_M$ 上对 $t\in[0,\ 1]$ 一致连续, 可证明如下: 任给 $\rho(z)\in\overline{R}_M$, 有 $\rho_j^*=T(\rho,\ t_j)$, $t_j\in[0,\ 1]$, $j=1,\ 2$. 相减之, 有

$$\begin{aligned}\rho_1^*-\rho_2^*=t_1[&F(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ \Phi_2'(z)+\hat{S}_{\varkappa_2}\rho_1^*+\tilde{S}_{\varkappa_2}\rho,\ \Phi''(z)+\hat{S}_{\varkappa_2}\bar{\rho}_1^*\\&+\tilde{S}_{\varkappa_2}\bar{\rho})-F(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ \Phi_2'(z)+\hat{S}_{\varkappa_2}\rho_2^*+\tilde{S}_{\varkappa_2}\rho,\ \Phi''(z)\\&+\hat{S}_{\varkappa_2}\bar{\rho}_2^*+\tilde{S}_{\varkappa_2}\bar{\rho})]+(t_1-t_2)F(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ \Phi_2'(z)\\&+\hat{S}_{\varkappa_2}\rho_2^*+\tilde{S}_{\varkappa_2}\rho,\ \Phi''(z)+\hat{S}_{\varkappa_2}\bar{\rho}_2^*+\tilde{S}_{\varkappa_2}\bar{\rho}),\end{aligned}\tag{3.8}$$

其中
$$W(z)=\overline{\Phi(z)}+\int_0^z \Phi_2(z)dz+H\rho,$$

$\Phi(z)$ 如(2.13)式所示. 由于 $\rho(z)\in\overline{R}_M$, 从引理 2.2, 可证

$$\|\rho_j^*\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant(t_1+t_2)M_8,\quad M_8=M_8(q_0,\ p_0,\ k_0,\ G,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ M_7),\quad j=1,\ 2,$$

因而(3.8)的最后一项记作 $d(z)$, 满足

$$\|d(z)\|\leqslant M_9=M_9(q_0,\ p_0,\ k_0,\ G,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ M_7),$$

这样, 从(3.8)可得

$$\|\rho_1^*-\rho_2^*\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant\frac{|t_1-t_2|M_9}{1-(q_0+q_0')\hat{\Lambda}_{p_0}},$$

2) 当 $t=0$ 时, 从(3.4)知: 对所有的 $\rho(z)\in R$, 均有 $\rho^*=T(\rho,\ 0)=0\in R_M$.

3) 从估计式(3.1)可知: 泛函方程(3.3)即 $\rho=T(\rho,\ t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 不具有 $\|\rho\|_{L_{p_0}(\overline{G})}=M_7$ 的解, 即在 R_0 的边界 $fR_0=\overline{R}_0\backslash R_0$ 上不包含泛函方程(3.3)的解.

因此, 由 Leray-Schauder 定理 [9], 可知泛函方程(3.3)对每一个 $t\in[0,\ 1]$ 从而对 $t=1$ 在 R_M 内存在着解 $\rho(z)\in L_{p_0}(\overline{G})$, 故形如 (2.11) 的函数 $W(z)$ 就是二阶非线性椭圆型方程(1.10)问题 $R-H^*$ 的解.

现在我们不妨设 G_m 是 G 内距边界 Γ 不小于 $\frac{1}{m}(m\geqslant 2)$ 的点集，并记系数在 G_m 外等于0的方程(1.10)为

$$\begin{cases} W_{z\bar{z}}=F_m,\ F_m=Q_{m1}W_{zz}+Q_{m2}\overline{W}_{\bar{z}\bar{z}}+Q_{m3}\overline{W}_{zz}+Q_{m4}\overline{W}_{\bar{z}\bar{z}}+F_{m0}, \\ F_{m0}=A_{m1}W_z+A_{m2}\overline{W}_{\bar{z}}+A_{m3}\overline{W}_z+A_{m4}W_{\bar{z}}+A_{m5}W+A_{m6}\overline{W}+A_{m7}, \end{cases} \tag{3.9}$$

这里 F_{m0}, $Q_{mj}(j=1,\cdots,4)$, $A_{mj}(j=1,\cdots,7)$ 均在 G_m 外等于0，又记 $W_m(z)$ 为以上方程问题 $R-H^*$ 的解. 为了求得原方程(1.10)问题 $R-H^*$ 的解，我们不难选取在 G 内具有二阶连续偏微商的函数 $\sigma_n(z)$，使

$$\begin{cases} \sigma_n(z)=1, & \text{当 } z\in G_n \text{ 时;} \\ \sigma_n(z)=0, & \text{当 } z\overline{\in} G_{2n} \text{ 时;} \\ 0\leqslant\sigma_n(z)\leqslant 1, & \text{当 } z\in G_{2n}-G_n \text{ 时;} \end{cases} \tag{3.10}$$

$n\geqslant 2$. 将 $\sigma_n(z)$ 乘方程(3.9)的两边，记 $w_{nm}(z)=\sigma_n(z)W_m(z)$，注意到:

$$(w_{nm})_{z\bar{z}}=\sigma_nW_{mz\bar{z}}+\sigma_{nz}W_{m\bar{z}}+\sigma_{n\bar{z}}W_{mz}+\sigma_{nz\bar{z}}W_m,$$
$$(w_{nm})_{zz}=\sigma_nW_{mzz}+2\sigma_{nz}W_{mz}+\sigma_{nzz}W_m,$$

可知 $w_{nm}(z)$ 是方程

$$\begin{cases} (w_{nm})_{z\bar{z}}=Q_{m1}(w_{nm})_{zz}+Q_{m2}(\overline{w}_{nm})_{\bar{z}\bar{z}}+Q_{m3}(\overline{w}_{nm})_{zz}+Q_{m4}(w_{nm})_{\bar{z}\bar{z}}+g_{nm}(z), \\ g_{nm}=\sigma_{nz}W_{m\bar{z}}+\sigma_{n\bar{z}}W_{mz}+\sigma_{nz\bar{z}}W_m-Q_{m1}(2\sigma_{nz}W_{mz}+\sigma_{nzz}W_m) \\ \qquad -Q_{m2}(2\sigma_{n\bar{z}}\overline{W}_{m\bar{z}}+\sigma_{n\bar{z}\bar{z}}\overline{W}_m)-Q_{m3}(2\sigma_{nz}\overline{W}_{mz}+\sigma_{nzz}\overline{W}_m) \\ \qquad -Q_{m4}(2\sigma_{n\bar{z}}W_{m\bar{z}}+\sigma_{n\bar{z}\bar{z}}W_m)+\sigma_n(z)F_{m0} \end{cases} \tag{3.11}$$

于单位圆 E_1: $|z|<1$ 内的解，且适合齐次 Dirichlet 问题的边界条件: $w_{nm}(z)=0$，当 $|z|=1$ 时. 因为 $\{W_m(z)\}$ 是方程(3.9)问题 $R-H^*$ 的解，满足(2.14)的第一式，故可从 $\{W_m(z)\}$ 选取子序列(不妨设原序列)在 $\overline{G}$ 上一致收敛到 $W_0(z)$，而 $W_0(z)$ 仍适合问题 $R-H^*$ 的边界条件. 余下要证明 $W_0(z)$ 是原方程(1.10)于 G 内的解. 由于 $g_{nm}(z)$ 满足

$$\|g_{nm}(z)\|_{L_{p_0}(\overline{E}_1)}\leqslant R_1=R_1(q_0,p_0,k_0,G,\Phi_1,\Phi_2,M_7,\sigma_n), \tag{3.12}$$

上式右边的常数 R_1 与 m 无关，于是易得 $w_{nm}(z)$ 所满足的估计式

$$C_\alpha^1[w_{nm}(z),\overline{E}_1]\leqslant R_2,\qquad \||w_{nmz\bar{z}}|+|w_{nmzz}|+|w_{nm\bar{z}\bar{z}}|\|_{L_{p_0}(\overline{E}_1)}\leqslant R_3, \tag{3.13}$$

这里，$\alpha=\dfrac{p_0-2}{p_0}$, $R_j=R_j(q_0,p_0,k_0,G,\Phi_1,\Phi_2,M_7,\sigma_n)$, $j=2,3$.

我们先固定 $n=2$，并可从 $\{w_{2m}(z)\}$, $\{w_{2mz}\}$, $\{w_{2m\bar{z}}\}$ 选取子序列 $\{w^*_{2m}(z)\}$, $\{w^*_{2mz}\}$, $\{w^*_{2m\bar{z}}\}$ 在 $\overline{G}$ 上一致收敛到 $w_0(z)$, w_{0z}, $w_{0\bar{z}}$，容易看出: $w_0(z)=\sigma_2(z)W_0(z)$，且当 $z\in G_2$ 时，$w_0(z)=W_0(z)$. 由条件 C 及(3.12)，可证: $w_0(z)=W_0(z)$ 是原方程(1.10)于 G_2 上的解. 然后固定 $n=3$，则可从 $\{w^*_{2m}(z)\}$ 对应的 $\{W^*_m(z)\}$ 出发，类似地选取子序列 $\{w^*_{3m}(z)\}$, $\{w^*_{3mz}\}$, $\{w^*_{3m\bar{z}}\}$ 在 $\overline{G}$ 上一致收敛到 $w_0(z)$, w_{0z}, $w_{0\bar{z}}$，且 $w_0(z)=W_0(z)$ 是原方程(1.10)于 G_3 上的解. 这样继续下去，可得 $\{w^*_{2m}(z)\}$, $\{w^*_{3m}(z)\}$, $\cdots$, $\{w^*_{nm}(z)\}$, $\cdots$，再选取对角线序列: $\{w^*_{mm}(z)\}$，它及 $\{w^*_{mmz}\}$、$\{w^*_{mm\bar{z}}\}$ 在区域 G 内闭(任一闭子集上)一致收敛到 $w_0(z)$, w_{0z}, $w_{0\bar{z}}$，而且在区域 G 内，$w_0(z)$ 是原方程(1.10)的解，又 $w_0(z)=W_0(z)$，当 $z\in G$ 时. 证毕.

从以上定理，并使用[1]第四章§7.§9中的方法，不难得到方程(1.10)问题 $R-H$ 的可解条件.

定理 3.2　对于满足条件 C 的二阶非线性椭圆型方程(1.10),在定理 3.1 的条件下,其问题 $R-H$ 的可解性如下:

1) 当标数 $\varkappa_1\geqslant 0$, $\varkappa_2\geqslant 0$ 时,无条件可解.

2) 当 $\varkappa_1\geqslant 0$, $\varkappa_2<0$ 时,则有 $2|\varkappa_2|-1$ 个可解条件

$$\begin{cases}\operatorname{Re}\left[\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{r_2(t)}{t}dt-\frac{1}{\pi}\iint_G\zeta^{-\varkappa_2-1}\rho(\zeta)d\sigma_\zeta\right]=0,\\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{r_2(t)}{t^{j+1}}dt-\frac{1}{\pi}\iint_G[\zeta^{-\varkappa_2-j-1}\rho(\zeta)+\bar\zeta^{-\varkappa_2+j-1}\overline{\rho(\zeta)}]d\sigma_\zeta=0,\quad j=1,\cdots,|\varkappa_2|-1.\end{cases}\tag{3.14}$$

3) 当 $\varkappa_1<0$, $\varkappa_2\geqslant 0$ 时,则有 $2|\varkappa_1|-1$ 个可解条件

$$\begin{cases}\operatorname{Re}\left[\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{r_1(t)}{t}dt-\frac{1}{\pi}\iint_G\zeta^{-\varkappa_1-1}\omega(\zeta)d\sigma_\zeta\right]=0,\quad \omega(z)=\overline{W}_{\bar z},\\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{r_1(t)}{t^{j+1}}dt-\frac{1}{\pi}\iint_G[\zeta^{-\varkappa_1-j-1}\omega(\zeta)+\bar\zeta^{-\varkappa_1+j-1}\overline{\omega(\zeta)}]d\sigma_\zeta=0,\quad j=1,\cdots,|\varkappa_1|-1.\end{cases}\tag{3.15}$$

4) 当 $\varkappa_1<0$, $\varkappa_2<0$ 时,则有 $2|\varkappa_1|+2|\varkappa_2|-2$ 个可解条件,如(3.14), (3.15)所示.

§4. 方程(1.10)的一类斜微商边值问题

本节中,我们讨论二阶非线性一致椭圆型复方程 (1.10) 的一类斜微商边值问题(问题 P).

问题 P　求二阶非线性椭圆型复方程 (1.10)(满足条件 C) 在单位圆 $\overline{G}$ 上的连续可微解 $W(z)$, 使它适合边界条件

$$\operatorname{Re}[\bar t^{\varkappa_1}W_t]=r_1(t),\quad \operatorname{Re}[\bar t^{\varkappa_2}\overline{W}_t]=r_2(t),\quad t\in\Gamma\tag{4.1}$$

其中 $\varkappa_1$、$\varkappa_2$ 都是整数,

$$C_\nu[r_j(t),\ \Gamma]\leqslant l,\quad j=1,\ 2,\ \left(\frac{1}{2}<\nu<1\right),\ (0<l<\infty)$$

ν, l 都是常数.

当标数 $\varkappa_1\geqslant 0$ 时,还设

$$\int_\Gamma[W_z-\Phi_1(z)]z^{-m-1}dz=0,\quad m=0,\ \cdots,\ 2\varkappa_1;$$

当 $\varkappa_2\geqslant 0$ 时,则设

$$\int_\Gamma[\overline{W}_z-\Phi_2(z)]z^{-m-1}dz=0,\quad m=0,\ \cdots,\ 2\varkappa_2;$$

$\Phi_j(z)\,(j=1,\ 2)$ 如(2.12)所示. 当 $\varkappa_1<0$ 或 $\varkappa_2<0$ 时, 以上边值问题不一定可解, 因此考虑这样的变态问题,即将边界条件(4.1)改为

$$\operatorname{Re}[\bar t^{\varkappa_1}W_t]=r_1(t)+h_1(t),\quad \operatorname{Re}[\bar t^{\varkappa_2}\overline{W}_t]=r_2(t)+h_2(t),\quad t\in\Gamma,\tag{4.2}$$

其中 $h_j(t)\,(j=1,\ 2)$ 如(2.3)式所示.

问题 P^*　求二阶非线性椭圆型复方程(1.10)(满足条件 C) 在单位圆 $\overline{G}$ 上的连续可微解 $W(z)$,使它适合边界条件(4.2). 特别, 当(4.2)式中的 $h_1(t)\equiv h_2(t)\equiv 0$ 时, 则问题

P^* 就是问题 P.

为了给出方程(1.10)问题 P^* 解的表示式，引入积分算子

$$H\rho=\frac{2}{\pi}\iint_{G}\rho(\zeta)\ln|\zeta-z|d\sigma_{\zeta}+\int_0^z P_1\rho\,dz+\overline{\int_0^{\bar z}P_2\bar\rho\,d\bar z},\quad \rho(z)\in L_p(\overline{G}),\ p>2,\tag{4.3}$$

其中 $P_j\rho$ 如(2.5)式中的 $P_0\rho$，但要将 $\varkappa_j(j=1,\ 2)$ 代替那里的 $\varkappa$. 对于积分算子 $H\rho$，类似于引理2.1，有

$$\begin{cases}(H\rho)_z=P_1\rho,\quad (\overline{H\rho})_z=P_2\bar\rho,\quad (H\rho)_{z\bar z}=\rho(z),\\ (H\rho)_{zz}=S_{\varkappa_1}\rho=\hat S_{\varkappa_1}\rho+\tilde S_{\varkappa_1}\rho,\quad (\overline{H\rho})_{zz}=S_{\varkappa_2}\bar\rho=\hat S_{\varkappa_2}\bar\rho+\tilde S_{\varkappa_2}\bar\rho,\end{cases}\tag{4.4}$$

这里 $S_{\varkappa_j}\rho$, $\hat S_{\varkappa_j}\rho$, $\tilde S_{\varkappa_j}\rho$ 如(2.6)式中所示，但要将 $\varkappa_j$ 代替那里的 $\varkappa$，并且还有类似于引理2.1的其它性质.

引理 4.1 (1) 设 $\rho(z)\in L_p(\overline{G})$, $p>1$, 则 $S_{\varkappa_j}\rho$ 是将 $L_p(\overline{G})$ 映射到自身的线性有界算子，并满足

$$\|S_{\varkappa_j}\rho\|_{L_p(\overline{G})}\leqslant \Lambda_p^{(j)}\|\rho\|_{L_p(\overline{G})},\quad \hat\Lambda_2^{(j)}=1(\varkappa_j>0),\quad \Lambda_2^{(j)}=\hat\Lambda_2^{(j)}=1\quad(\varkappa_j\leqslant 0),\tag{4.5}$$

这里 $\Lambda_p^{(j)}$ 类似于(2.7)式中所述，同样要用 $\varkappa_j$ 代替那里的 $\varkappa$. 当 $q_0+q_0'<1$ 时，则可选取常数 $p_0\left(2<p_0<\min\left(p,\ \dfrac{1}{1-\nu}\right)\right)$，使

$$\begin{cases}q_0\Lambda_{p_0}^{(1)}+q_0'\Lambda_{p_0}^{(2)}<1\quad(\varkappa_1\leqslant 0,\ \varkappa_2\leqslant 0);\\ q_0\hat\Lambda_{p_0}^{(1)}+q_0'\hat\Lambda_{p_0}^{(2)}<1\quad(\varkappa_1>0\text{ 或 }\varkappa_2>0),\end{cases}\tag{4.6}$$

(2) 若 $\rho(z)\in L_{p_0}(\overline{G})$, $p_0>2$, 则

$$C_\alpha^1[H\rho,\ \overline{G}]\leqslant M_{10}\|\rho\|_{L_p(\overline{G})},\quad \alpha=\frac{p_0-2}{p_0},\quad M_{10}=M_{10}(p),\tag{4.7}$$

适合边界条件

$$\operatorname{Re}[\bar t^{\varkappa_1}(H\rho)_t]=0\quad\text{或}\quad \operatorname{Re}[\bar t^{\varkappa_2}(\overline{H}\rho)_t]=0,\quad t\in\Gamma\tag{4.8}$$

的充要条件是

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_{G}\zeta^{-\varkappa_j-1}\rho(\zeta)d\sigma_\zeta-ic_j=0,\quad j=1\text{ 或 }2,\\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_{G}[\zeta^{-\varkappa_j-m-1}\rho(\zeta)+\bar\zeta^{-\varkappa_j+m-1}\overline{\rho(\zeta)}]d\sigma_\zeta=0,\quad m=1,\ \cdots,\ -\varkappa_j-1.\end{cases}\tag{4.9}$$

定理 4.1 设 $W_{z\bar z}\in D_{2,p_0}(G)$, $p_0>2$, 则 $W(z)$ 可表示成

$$W(z)=\Phi_0(z)+\int_0^z\Phi_1(z)dz+\overline{\int_0^z\Phi_2(z)dz}+H\rho,\quad \rho(z)=W_{z\bar z},\tag{4.10}$$

这里 $H\rho$ 如(4.3)式所示，$\Phi_0(z)=a+ib$ 是复常数，又 $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ 是(2.12)式中所示的解析函数.

以上定理对于方程(1.10)问题 P^* 的解 $W(z)$ 也成立.

其次给出方程(1.10)问题 P^* 解的估计式.

定理 4.2 设 $W(z)$ 是方程(1.10)问题 P^* 满足 $\|W_{z\bar z}\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant M$(待定常数)的解，如果条件 C 中的常数 q_0', k_2 适当小(当 $\varkappa_1\leqslant 0$, $\varkappa_2\leqslant 0$ 时，也可设 k_1, k_2 适当小)，则此解 $W(z)$ 满足估计式

$$C_\alpha^1[W(z),\ \overline{G}]\leqslant M_{11},\quad \|\rho\|=\|W_{z\bar z}\|_{L_{p_0}(\overline{G})}<M_{12},\quad \|W_{zz}\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant M_{13},\tag{4.11}$$

这里 $\alpha=\frac{p_0-2}{p_0}$, $M_j=M_j(q_0,\ p_0,\ k_0,\ G,\ \Phi)$, $\Phi=(\Phi_0,\ \Phi_1,\ \Phi_2)$, $j=11,\ 12,\ 13$, 并可取 $M=M_{12}$.

证　如果条件 C 中的常数 q_0'、k_2 适当小, 方程(1.10)问题 P^* 的解 $W(z)$ 所满足的估计式(4.11), 可与定理 2.2 类似的方法给出. 当 $\varkappa_1\leqslant 0$, $\varkappa_2\leqslant 0$ 时, 且若条件 C 中的常数 k_1、k_2 适当小, 我们也可导出方程(1.10)问题 P^* 的解 $W(z)$ 满足估计式(4.11). 事实上, 将此解 $W(z)$ 代入方程(1.10), 并注意到(4.10), 则有

$$\rho(z)-q_1(z)S_{\varkappa_1}\rho-q_2(z)S_{\varkappa_2}\bar{\rho}=A(z), \tag{4.12}$$

这里 $q_1(z)$, $q_2(z)$ 如(2.15)式所示, 又

$$A=A_1W_z+A_2\overline{W}_{\bar z}+A_3\overline{W}_z+A_4W_{\bar z}+A_5W+A_6\overline{W}+A_7+q_1\Phi_1'+q_2\Phi_2',$$

记 $M_{14}=k_0+\|\Phi_1'\|_{L_{p_0}(\overline{G})}+\|\Phi_2'\|_{L_{p_0}(\overline{G})}$, 我们可先假定

$$\|A\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant M_{15}=M_{15}(M_{14},\ \Phi), \tag{4.13}$$

其中 M_{15} 可选为 M_{14} 乘以足够大的常数. 根据(4.6), 可得

$$\|\rho(z)\|=\|W_{z\bar z}\|_{L_{p_0}(\overline{G})}<M_{12}=\frac{M_{15}+1}{1-q_0\Lambda_{p_0}^{(1)}-q_0'\Lambda_{p_0}^{(2)}}. \tag{4.14}$$

又由方程(1.10)问题 P^* 解 $W(z)$的表示式(4.10), 并固定其中的解析函数 $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, 那么只要条件 C 中的常数 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ 适当小, 就有(4.13)式. 这样由(4.10)、(4.14), 便得(4.11)式.

有了以上定理, 我们也可用 Leray-Schauder 定理证明 (1.10) 问题 P^* 的可解性.

定理 4.3　设二阶非线性椭圆型复方程(1.10)满足条件 C;

(1) 如果方程(1.10)问题 P^* 形如(4.10)且满足 $\|W_{z\bar z}\|_{L_{p_0}(\overline{G})}\leqslant M_{15}$ 的所有解, $W(z)$ 也满足估计式

$$\|\rho(z)\|_{L_{p_0}(\overline{G})}<M_{15}, \tag{4.15}$$

这里 M_{15} 是与 Φ 有关的常数, 那么方程(1.10)的问题 P^* 具有形如(4.10)的解.

(2) 如果方程(1.10)系数条件中的 q_0'、k_2 适当小(当 $\varkappa_1\leqslant 0$, $\varkappa_2\leqslant 0$ 时, 也可设 k_1, k_2 适当小), 则方程(1.10)问题 P^* 可解.

证明与定理 3.1 相仿, 但这里要用积分方程

$$\rho^*(z)=tF(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ \Phi_1'+\hat{S}_{\varkappa_1}\rho^*+S_{\varkappa_1}\rho,\ \Phi_2'+\hat{S}_{\varkappa_2}\bar{\rho}^*+\tilde{S}_{\varkappa_2}\rho),\quad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{4.16}$$

代替那里的方程(3.2), 又 $W(z)$ 如(4.10)式所示. 而当 $\varkappa_1\leqslant 0$, $\varkappa_2\leqslant 0$ 时, 则可用积分方程

$$\rho^*(z)=tF(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ \Phi_1'+S_{\varkappa_1}\rho^*,\ \Phi_2'+S_{\varkappa_2}\rho^*),\quad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{4.17}$$

代替那里的方程(3.2).

由以上定理, 还可得到方程(1.10)问题 P 的可解条件.

定理 4.4　在定理 4.3 的条件下, 方程(1.10)的可解性如下:

1) 当标数 $\varkappa_1\geqslant 0$, $\varkappa_2\geqslant 0$ 时, 无条件可解;

2) 当 $\varkappa_1\geqslant 0$, $\varkappa_2<0$ 时, 则有 $2|\varkappa_2|-1$ 个可解条件, 如 (3.14) 式, 其中 $\rho(z)$ 代以 $\overline{\rho(z)}$;

3) 当 $\varkappa_1<0$, $\varkappa_2\geqslant 0$ 时, 则有 $2|\varkappa_1|-1$ 个可解条件, 如(3.15)式, 其中 $\omega(z)$代以 $\rho(z)$;

4) 当 $\varkappa_1<0$, $\varkappa_2<0$ 时, 则有 $2(|\varkappa_1|+|\varkappa_2|-1)$ 个可解条件, 如 2), 3) 中所述.

本文中的定理 1.1 是首先由方爱农建立的, 其余的定理主要是由闻国椿证明的.

参 考 文 献

[1] Векуа, И. Н., 广义解析函数, 人民教育出版社, 1960.
[2] Bers, L., 准解析函数论, 科学出版社, 1964.
[3] 闻国椿、方爱农, 一阶非线性椭圆型方程组的复变函数论, 1978 年函数论专辑, 98—105.
[4] 闻国椿、李忠, 非线性椭圆型复方程的函数论方法, 1979 年全国广义解析函数与边值问题会议资料.
[5] 丁夏畦、王康廷、马汝念、孙家乐、张同, 常系数二阶偏微分方程组椭圆性的定义, 数学学报, **10** (1960), 276—287.
[6] 华罗庚、吴兹潜、林伟, 二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组, 科学出版社, 1979.
[7] Виноградов, В. С., Об ограниченности решений краевых задач для Линейных эллиптических систем уравнений на плоского, *ДАН СССР*, **121** (1958), 399—402.
[8] 方爱农, 非性线拟似共形映照及其某些应用, (在 1978 年全国函数论会上的报告).
[9] Leray, J., Schauder, J., Topologie et équations fonctionelles, *Ann. École Nom. Sup.*, **51** (1934), 45—78.
[10] 闻国椿, 二阶非线性椭圆型方程组的斜微商边值问题 (I), 河北化工学院学报, 1980 年数学专辑, 119—144.
[11] Iwaniec, T., Green's function of multiply connected domain and Dirichlet Problem for systems of second order in the plane; Function Theoretic Methods for Partial Differential Equations, (1976), 261—276.

THE COMPLEX FORM AND SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONLINEAR ELLIPTIC SYSTEMS OF SECOND ORDER

WEN GUOCHUN　　FANG AINONG
(*Beijing University*)　　(*Hunan University*)

ABSTRACT

The present paper is concerned with the nonlinear elliptic system of second order. Firstly, we shall establish a complex form of the system. Secondly, we shall consider the solvability of some boundary value problems for the complex equation of second order.

Let

(1) $\Phi_j(x, y, U, V, U_x, U_y, \cdots, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}, V_{xx}, V_{xy}, V_{yy})=0, \quad j=1, 2$

be the I. G. Petrovskii's nonlinear elliptic system of second order in the bounded domain G, where $\Phi_j(x, y, z_1, \cdots, z_{12})$ $(j=1, 2)$ are continuous real functions of the variables x, y $[(x, y)\in G]$, $z_1, \cdots, z_{12}\in R$ (the real axis), and continuously differentiable for $z_1, \cdots, z_{12}\in R$. The solutions $[U(x, y), V(x, y)]$ of the system are understood in the generalized sense.

THEOREM I. i) If the I. G. Petrovskii's nonlinear system of equations (1) satisfies the M. I. Visik-D. Xiaqi's uniformly elliptic condition for any solutions $U(x, y), V(x, y)$ of (1) in G, then it can be written as the following complex equation

(2) $$W_{z\bar{z}}=F(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ W_{zz},\ \overline{W}_{zz}),$$

where $$W=U+iV,\quad z=x+iy,\quad W_z=\frac{1}{2}[W_x-iW_y],\ \cdots;$$

ii) If the I. G. Petrovskii's nonlinear elliptic system (1) satisfies the condition that there exist two positive constants δ and K, such that

(3) $$|\Phi_{jU_{xx}}|,\ |\Phi_{jU_{xy}}|,\ |\Phi_{jU_{yy}}|,\ |\Phi_{jV_{xx}}|,\ |\Phi_{jV_{xy}}|,\ |\Phi_{jV_{yy}}|\leqslant K,\quad j=1,\ 2,$$

$|\det A|\geqslant\delta>0$, in G, then by a suitable linear trans-formation of the variables $(x,\ y)$ into variables $(\xi,\ \eta)$, system (1) can be written as the following complex equation

(4) $$W_{\zeta\bar{\zeta}}=F(\zeta,\ W,\ W_\zeta,\ \overline{W}_\zeta,\ W_{\zeta\zeta},\ \overline{W}_{\zeta\zeta}),\quad \zeta=\xi+i\eta.$$

In the following section, we discuss the complex equation (2) of the following form:

(5) $$\begin{cases} W_{z\bar{z}}=F(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ W_{zz},\ \overline{W}_{zz}),\\ F=Q_1W_{zz}+Q_2\overline{W}_{\bar{z}\bar{z}}+Q_3\overline{W}_{zz}+Q_4W_{zz}+A_1W_z+A_2\overline{W}_{\bar{z}}\\ \qquad +A_3\overline{W}_z+A_4W_{\bar{z}}+A_5W+A_6\overline{W}+A_7,\\ Q_j=Q_j(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ W_{zz},\ \overline{W}_{zz}),\quad j=1,\ \cdots,\ 4,\\ A_j=A_j(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z),\quad j=1,\ \cdots,\ 7 \end{cases}$$

and suppose that Eq. (5) satisfies the condition C:

1) $Q_j(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ U,\ V)$, $j=1,\ \cdots,\ 4$. $A_j(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z)$, $j=1,\ \cdots,\ 7$ are measurable functions of z for any continuously differentiable functions $W(z)$ and measurable functions $U(z)$, $V(z)$ in G, Furthermore they satisfy

(6) $$\|A_j\|_{L_p(\overline{G})}\leqslant K_0,\quad j=1,\ 2,\quad \|A_j\|_{L_p(\overline{G})}\leqslant K_1,\quad j=3,\ \cdots,\ 7.$$

where K_0, $K_1\ (\leqslant K_0)$, $P(>2)$ are constants;

2) Q_j, A_j are continuous for $W, W_z, \overline{W}_z\in E$ (the whole plane), and the continuity is uniform with respect to almost every point $z\in G$ and $U,\ V\in E$;

3) $F(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ U,\ V)$ satisfies the following Lipschitz's condition, i.e. for almost every point $z\in G$, and for all $W,\ W_z,\ \overline{W}_z\ U_1,\ U_2,\ V_1,\ V_2\in E$, the inequality

(7) $$|F(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ U_1,\ V_1)-F(z,\ W,\ W_z,\ \overline{W}_z,\ U_2,\ V_2)|$$
$$\leqslant q_0|U_1-U_2|+q_0'|V_1-V_2|,\quad q_0+q_0'<1$$

holds, where q_0, q_0' are two nonnegative constants.

In this paper, let G be a simply connected domain with boundary $\Gamma\in C_\mu^2$ $(0<\mu<1)$. Without loss of generality, we may assume that G is the unit disk $|z|<1$. Now we describe the results of the solvability of Riemann-Hilbert boundary value problem (Problem R-H) and the oblique derivative problem (Problem P) for Eq. (5) in the unit disk G: $|z|<1$.

Problem R-H. We try to find a solution $W(z)$ of Eq. (5) which is continuously differentiable on $\overline{G}$, and satisfies the boundary conditions:

(8) $$\operatorname{Re}[\bar{z}^{\varkappa_1},\ W_z]=r_1(z),\quad \operatorname{Re}[\bar{z}^{\varkappa_2}\overline{W(z)}]=r_2(z),\quad z\in\Gamma,$$

where $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ are two integers, and $r_j \in C_\nu^{j-1}(\Gamma)$, $j=1, 2$, $\frac{1}{2}<\nu<1$.

Problem P. We try to find a solution $W(z)$ of Eq. (5) which is continuously differentiable on $\bar{G}$ and satisfies the boundary conditions:

(9) $$\operatorname{Re}[\bar{z}^{\varkappa_1} W_z] = r_1(z), \quad \operatorname{Re}[\bar{z}^{\varkappa_2} \overline{W_z}] = r_2(z), \quad z \in \Gamma,$$

Where $\varkappa_1$, $\varkappa$, $r_1(z)$, $r_2(z)$ are the same as in (8), but $r_2(z) \in C_\nu(\Gamma)$.

Theorem II. Suppose that Eq. (5) satisfies the condition C and the constants q_0' and K_1 are adequately small, then the solvability of Problem R-H is as follows:

1) When $\varkappa_1 \geqslant 0$, $\varkappa_2 \geqslant 0$, Problem R-H is solvable;

2) When $\varkappa_1 < 0$, $\varkappa_2 \geqslant 0$ (or $\varkappa_1 \geqslant 0$, $\varkappa_2 < 0$), there are $2|\varkappa_1|-1$ (or $2|\varkappa_2|-1$) solvable conditions for Problem R-H;

3) When $\varkappa_1<0$, $\varkappa_2<0$, there are $2(|\varkappa_1|+|\varkappa_2|-1)$ solvable conditions for Problem R-H.

Theorem III. Let Eq. (5) satisf the condition C and the constants q_0' and K_1 are adequately small, then the solvability of Problem P is as follows:

1) When $\varkappa_1 \geqslant 0$, $\varkappa_2 \geqslant 0$, Problem P is solvable;

2) When $\varkappa_1<0$, $\varkappa_2 \geqslant 0$ (or $\varkappa_1 \geqslant 0$, $\varkappa_2<0$), there are $2\{\varkappa_1|-1$ (or $2|\varkappa_2|-1$) solvable conditions for Problem P;

3) When $\varkappa_1<0$, $\varkappa_2<0$, there are $2(|\varkappa_1|+|\varkappa_2|-1)$ solvable conditions for Problem P.

Furthermore, the solution $W(z)$ of Problem P for Eq. (5) may be expressed as

$$W(z) = \Phi_0(z) + \int_0^z \Phi_1(z)dz + \overline{\int_0^z \Phi_2(z)dz} + H\rho,$$

$$H\rho = \frac{2}{\pi} \iint_G \{\ln|\zeta - z|\rho(\zeta) + [g_1(\zeta, z) + \overline{g_2(\zeta, z)}]\overline{\rho(\zeta)}\} d\sigma_\zeta,$$

$$g_j(\zeta, z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^z \frac{z^{2\varkappa_j+1}}{1-\bar{\zeta}z} dz, & \text{for } \varkappa_j \geqslant 0, \\ \displaystyle\int_0^z \frac{\bar{\zeta}^{-2\varkappa_j-1}}{1-\bar{\zeta}z} dz, & \text{for } \varkappa_j < 0, \end{cases} \quad j=1, 2,$$

where $\Phi_0(z) = a + ib$ is a complex constant, and $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ are two analytic functions.

The proofs of the above stated theorems are based on a prior estimâtes for the bounded solutions of these boundary value problems and Leray-Schauder theorem.

Besides, we have considered also the solvability of Problem R-H and Problem P for Eq. (5) in the multiply connected domain.