数 学 年 刊
2 (2) 1981

关于拟不变测度存在的充要条件

张 荫 南
(复旦大学数学研究所)

设 E 是一个实的可分的 Banach 空间，E_0 是 E 的一个线性子空间，求出存在 E 上的某一个几率测度 μ. 关于 E_0 拟不变的充要条件是拟不变测度理论中的一个基本问题. 到目前为止，只对 E 是 Hilbert 空间的情况给出了充要条件，本文利用 Banach 空间上的独立随机变量的方法给出了 type-2 空间上的充要条件. 这些初步的结果表明，无限维空间上的测度的研究和 Banach 空间的结构理论是紧密相关的.

1. 记号与定义

E：实的可分的 Banach 空间，E 上的范数为 $\|\cdot\|$.

$B(E)$：E 上由强拓扑确定的开集张成的 σ-代数.

$\mathscr{P}(E)$：$B(E)$ 上的几率测度全体.

H：实的可分的 Hilbert 空间，H 上的内积为 $(\ ,\ )$.

$r(\cdot)$：H 上用内积 $(\ ,\ )$ 定义的 Gauss 柱测度.

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$：基本几率空间，$(\Omega, \mathscr{F})\to(E, B(E))$ 的可测映照称为 E-值随机变量.

$e_n(\omega)$：$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的独立同分布的实随机变量，每个 e_n 的分布都是正态 $N(0,1)$.

$\varepsilon_n(\omega)$：$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的独立同分布的随机变量，$P\{\varepsilon_n=+1\}=P\{\varepsilon_n=-1\}=1/2$.

$a.s.$ 收敛：几乎处处收敛.

Pr 收敛：依几率收敛.

定义 1 设 $\varphi_n(\omega)$, $n=1, 2\cdots$ 是一列独立同分布的实随机变量，定义

$$\mathscr{F}(\varphi_n;\ E)=\{(x_n):\ x_n\in E,\ \sum\varphi_n(\omega)x_n\ a.s.\ \text{收敛}\}.$$

2. 命题与定理

命题 1 设 $\varphi_n(\omega)$, $n=1, 2, \cdots$ 是一列同分布的实随机变量，$P\{|\varphi_1(\omega)|>0\}=r>0$, 若 $\{x_n\}\subset E$, $\varphi_n(\omega)x_n \xrightarrow[a.s.]{} 0$, 则

$$\sup_n\|x_n\|<\infty.$$

证 由于 $\varphi_n(\omega)x_n \xrightarrow[a.s.]{} 0$, 故存在正整数 N, 当 $n>N$ 时

本文 1979 年 12 月 3 日收到，1979 年 12 月 20 日修改.

$$P\{|\varphi_n(\omega)|\,\|x_n\|<r/2\}\geqslant 1-r/2,$$

取正数 a, 使 $P\{|\varphi_1(\omega)|\geqslant a>0\}\geqslant 2r/3$ 成立, 那么当 $n>N$ 时

$$\{|\varphi_n(\omega)|\,\|x_n\|<r/2\}\cap\{|\varphi_n(\omega)|\geqslant a>0\}\neq\text{空集},$$

即, 当 $n>N$ 时 $\|x_n\|\leqslant r/2a$, 自然有 $\sup\limits_m\|x_n\|<\infty$.

命题 2 设 E 是一个 Hilbert 空间, 则

$$\mathscr{F}(\varepsilon_n,\ E)=\mathscr{F}(e_n,\ E)=\{(x_n):\ \sum\|x_n\|^2<\infty\},$$

证 必要性可由 Gross-Sazanov 定理证明. 另外, 若 $\sum\|x_n\|^2<\infty$ 则从

$$E\left(\left\|\sum_r^n e_k(\omega)x_k\right\|^2\right)=\sum_r^n\|x_k\|^2$$

知 $\sum e_kx_k$ 是 Pr 收敛的, 从[1]知 $\sum e_kx_k$ $a.\ s.$ 收敛.

命题 3 若 $(x_n)\subset E$, $\sum\|x_n\|<\infty$, 则 $(x_n)\in\mathscr{F}(e_n;\ E)$.

证 从 $E\left(\left\|\sum\limits_r^n e_kx_k\right\|\right)\leqslant E(|e_1|)\sum\limits_r^n\|x_k\|$ 即可证明.

命题 4 设 $E=C[0,\ 1]$, $\|x\|=\sup|x(t)|$, $\forall x\in C[0,\ 1]$. $\varphi_n(\omega)$ 是一列实的对称的独立同分布的随机变量, 具有性质

存在常数 $c>0$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, 当 $|t|<c$ 时成立

$$e^{-\alpha_2t^2}\leqslant E(\exp(it\varphi_1(\omega)))\leqslant e^{-\alpha_1t^2},$$

则对于任一 $(x_n(t))\in\mathscr{F}(\varphi_n;\ C[0,\ 1])$, 映照 $t\mapsto(x_n(t))$, $\forall t\in[0,\ 1]$ 是$[0,\ 1]$到 l_2 中的连续映照.

证 若 $(x_n)\in\mathscr{F}(\varphi_n;\ E)$, 则由命题 1 知 $\sup\limits_n\|x_n\|<\infty$ 我们不妨设 $\sup\limits_n\|x_n\|<c$. 于是成立下式

$$e^{-\alpha_2\sum x_n(t)^2}\leqslant\prod_{n=1}^{\infty}E(\exp(i\varphi_1(\omega)x_n(t)))\leqslant e^{-\alpha_1\sum x_n(t)^2},\quad \forall t\in[0,\ 1].$$

记 $S(\omega)=\sum\varphi_n(\omega)x_n$ 在 $C[0,\ 1]$上的几率分布为 μ, f_t 为 $C[0,\ 1]$上的连续泛函, $f_t(x)=x(t)$, $\forall t\in[0,\ 1]$, 则对实数 u, $|u|\leqslant 1$, 成立

$$\int e^{iu\langle f_t,y\rangle}\mu(dy)=E\left(\exp\left(i\sum_1^{\infty}\varphi_n(\omega)x_n(t)u\right)\right)\leqslant e^{-\alpha_1\left(\sum\limits_1^{\infty}x_n(t)^2\right)u^2}.$$

由于 $\int e^{iu\langle f_t,y\rangle}\mu(dy)$ 在 $u=0$ 处连续, 故 $\forall t\in[0,\ 1]$, 成立 $\sum x_n(t)^2<\infty$.

另外, 从对 $\varphi_1(\omega)$的特征函数的假设知, 若 $(a_n)\in l_2$, 则 $\sum\varphi_n(\omega)a_n$ 是 $a.s.$ 收敛的. 故若 $0\leqslant t_0\leqslant 1$, 则 $y_n(t)=x_n(t)-x_n(t_0)\in\mathscr{F}(\varphi_n;E)$. 记 $S_1(\omega)=\sum\varphi_n(\omega)y_n$, 由于这个级数关于 $C[0,\ 1]$ 中的范数是收敛的, 所以对于几乎一切 ω, 成立

$$\lim_{t\to t_0}S_1(\omega,\ t)=0.$$

由于

$$\prod_{n=1}^{\infty}E(\exp(i\varphi_1(\omega)y_n))=\int e^{iS_1(\omega,t)}P(d\omega),$$

从控制收敛定理知

$$\lim_{t\to t_0}\prod_{n=1}^{\infty}E(\exp(i\varphi_1(\omega)y_n(t)))=\lim_{t\to t_0}\int e^{iS_1(\omega,t)}P(d\omega)=1.$$

于是

$$\lim_{t\to t_0}e^{-\alpha_1\sum y_n^2(t)}=1,$$

即
$$\lim_{t\to t_0}\sum y_n^2(t)=\lim_{t\to t_0}\sum(x_n(t)-x_n(t_0))^2=0.$$
所以 $t\mapsto(x_n(t))$ 是 $[0,1]\to l_2$ 中的连续映照.

推论 当 $\varphi_n=e_n$ 或 $\varphi_n=\varepsilon_n$ 时命题4是成立的.

定理1 设 E 是一个实的可分的 Banach 空间, $\varphi_n(\omega)$ 满足命题4的条件, 若 $(x_n)\in\mathscr{F}(\varphi_n;E)$, 则

(i) $\forall(\lambda_n)\in l_2$, $\sum\lambda_n x_n$ 是按 $\|\cdot\|$ 收敛的.

(ii) $(\lambda_n)\mapsto\sum\lambda_n x_n$, $\forall(\lambda_n)\in l_2$, 是一个紧的映照.

证 因为每一个实的可分的 Banach 空间都和 $C[0,1]$ 空间中的某一闭子空间线性等距同构, 所以我们不妨将 E 看作是 $C[0,1]$ 中的一个闭子空间. 设 $(x_n(t))\in\mathscr{F}(\varphi_n;E)\subset\mathscr{F}(\varphi_n;C[0,1])$, 由命题4知, $t\mapsto(x_n(t))$ 是 $[0,1]\to l_2$ 中的连续映照. 记
$$K=\{x(t):x(t)\in C[0,1],\ |x(0)|\leqslant(\sum\lambda_n^2)^{1/2}(\sum x_n(0)^2)^{1/2},$$
$$|x(t)-x(s)|\leqslant(\sum\lambda_n^2)^{1/2}(\sum(x_n(t)-x_n(s))^2)^{1/2},\ \forall t、s\in[0,1]\},$$
这里 $(\lambda_n)\in l_2$. 容易知道 K 是 $C[0,1]$ 中的紧集. 由于
$$\left|\sum_1^n\lambda_k x_k(t)-\sum_1^n\lambda_n x_k(s)\right|\leqslant\left(\sum_1^\infty\lambda_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_1^\infty|x_n(t)-x_n(s)|^2\right)^{1/2}.$$
所以, $\sum_1^n\lambda_k x_k\in K$. 下面证明 $\sum_n\lambda_n x_n$ 按 $C[0,1]$ 范数收敛, 用反证法, 若 $\sum\lambda_n x_n$ 不收敛, 则必有 $n_k\to\infty$, 使
$$\left\|\sum_{n_k}^{n_k+r_k}\lambda_i x_i(t)\right\|\geqslant\delta>0,$$
但 K 是紧集, 故必有 $y(t)\in C[0,1]$, 使 $\sum_{n_k}^{n_k+r_k}\lambda_i x_i(t)$ 的子列收敛于 $y(t)$, 不妨设
$$\left\|y(t)-\sum_{n_k}^{n_k+r_k}\lambda_i x_i(t)\right\|\to0,\quad n_k\to\infty,$$
但是对每一个固定的 $0\leqslant s\leqslant1$, $\sum_{n_k}^{n_k+r_k}\lambda_i x_i(s)\to0$, 故 $y(t)=0$, 产生矛盾, 因此 $\sum\lambda_n x_n(t)$ 按 $C[0,1]$ 中的范数收敛. 从 K 的紧性自然可推得(ii).

推论 当 $\varphi_n=e_n$ 或 $\varphi_n=\varepsilon_n$ 时定理1成立.

下面我们仅在 $\varphi_n=e_n$ 的条件下研究 $\mathscr{F}(\varphi_n;E)$, 并以此为工具研究 E 上的 Gauss 测度和拟不变测度.

[2]中提出了抽象 Wiener 空间的概念, Gross, L. 利用可测范数来研究 Gauss 柱测度的扩张, 我们将说明这个扩张的问题本质上是一个与 Banach 空间结构有关的问题.

设 H 是一个实的可分的 Hilhert 空间, $(,)$ 是它的内积, $\|\cdot\|$ 是在 H 上给定的一个范数, 它关于内积连续, 记 E 为 H 按 $\|\cdot\|$ 完备化后得到的 Banach 空间, 则 $E^*\subset H\subset E$. $r(\cdot)$ 是 H 上用内积定义的 Gauss 柱测度, 用 i 表示 $H\to E$ 的嵌入映照, 我们在 E 的柱集 $\mathscr{C}(E)$ 上可定义柱测度 $\tilde{r}(\cdot)$
$$\tilde{r}(B)=r(i^{-1}(B)),\quad\forall B\in\mathscr{C}(E)$$
在[2]证明了 $\tilde{r}(\cdot)$ 在 $B(E)$ 上可列可加的充要条件是 $\|\cdot\|$ 关于 $r(\cdot)$ 是可测的.

定理2 上述的范数 $\|\cdot\|$ 关于 $r(\cdot)$ 是可测的充要条件是, 对于 H 中的任一列完备的就范正交系 (x_n), 成立

$$(x_n)\in\mathscr{F}(e_n;\ E).$$

证 若(x_n)是 H 中的一列完备的就范正交系，$(x_n)\in\mathscr{F}(e_n; E)$. 记由 E-值随机变量$S(\omega)=\sum e_n(\omega)x_n$ 在 E 上导出的几率分析为 μ, 那么，对任 $f\in E^*$, $\langle f,\ \cdot\rangle$ 是几率空间 $(E,\ B(E),\ \mu)$ 上的一个 Gauss 随机变量，而且 $E(\langle f,\ \cdot\rangle)=0$,

$$\int|\langle f,\ y\rangle|^2\mu(dy)=\sum|\langle f,\ x_n\rangle|^2.$$

记 i 是 $H\to E$ 的嵌入映照，则 $E^*\subset H$, 而且对 $f\in E^*$, $\forall x\in H$

$$\langle f,\ x\rangle=(i^*(f),\ x),$$

所以，对 $f\in E^*$, $\langle f,\ \cdot\rangle$ 关于 H 上用内积定义的 Gauss 柱测度 $r(\cdot)$ 的分布是一个 Gauss 分布，它的期望为 0, 方差为 $(i^*(f),\ i^*(f))$, 由 (x_n) 的完备性知

$$\int|\langle f,\ y\rangle|^2\mu(dy)=\sum|\langle f,\ x_n\rangle|^2=(i^*(f),\ i^*(f)).$$

从而知 μ 即是 $\tilde{r}(\cdot)$ 在 $B(E)$ 上的可列可加的扩张，于是 $\|\cdot\|$ 关于 $r(\cdot)$ 是可测的.

另外，若 $\|\cdot\|$ 关于 $r(\cdot)$ 是可测的，由 [2] 知，必有 H 中的一组完备就范正交系 $\varphi_n\in H$, 使 $(\varphi_n)\in\mathscr{F}(e_n;\ E)$. 下面证明对于 H 中的任一组完备就范正交系 x_n, 成立 $(x_n)\in\mathscr{F}(e_n;\ E)$

对 $\forall f\in E^*$,

$$E\left(\exp\left(i\sum_1^n e_k(\omega)\langle f,\ x_k\rangle\right)\right)=e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n|\langle f,x_n\rangle|^2}\longrightarrow e^{-\frac{1}{2}\sum_1^\infty|\langle f,x_k\rangle|^2},$$

但是

$$e^{-\frac{1}{2}\sum_1^\infty|\langle f,x_k\rangle|^2}=e^{-\frac{1}{2}\sum_1^\infty(i^*(f),i^*(f))}=e^{-\frac{1}{2}\sum_1^\infty\langle f,\varphi_n\rangle^2}.$$

记 $S(\omega)=\sum e_n(\omega)\varphi_n$, $S(\omega)$ 在 E 上的几率分布为 μ, 则

$$e^{-\frac{1}{2}\sum_1^\infty\langle f,\varphi_n\rangle^2}=\int e^{i\langle f,y\rangle}\mu(dy).$$

从[1]知 $\sum e_n(\omega)x_n$ $a.s.$ 收敛.

定义 2 若$(x_n)\in\mathscr{F}(e_n; E)$, 称 $S(\omega)=\sum e_n(\omega)x_n$ 是由(x_n)导出的 Gauss 变量，$S(\omega)$ 在 E 上的几率分布是由 (x_n) 导出的 Gauss 测度.

定义 3 设 $\mu\in\mathscr{P}(E)$, $\forall z\in E^*$, $\langle z,\ \cdot\rangle$ 作为 $(E,\ B(E),\ \mu)$ 上的随机变量是一个期望为 0 的 Gauss 随机变量，则称 μ 是一个 Gauss 测度.

关于实的可分的 Banach 空间上的 Gauss 测度的分解在[3]中已有研究，本文下面的定理 3 和他的结果类似，所以并不是新的结果，而只是给出一个不同的证明，然而，明确地用 $\mathscr{F}(e_n; E)$ 的概念研究 Gauss 测度似乎还没有多少工作，因此为了叙述的完整和今后的需要，我们仍给出定理 3 的证明.

定理 3 设 E 是一个实的可分的 Banach 空间，μ 是 E 上的一个 Gauss 测度，则必存在 $(x_n)\in\mathscr{F}(e_n;\ E)$, 使 μ 是由(x_n)导出的 Gauss 测度.

证 由于 E 是一个实的可分的 Banach 空间，故必有一列 $z_n'\in E^*$, $\|z_n'\|=1$, $\|x\|=\sup\limits_n|\langle z_n',\ x\rangle|$, $\forall x\in E$, 而且 $B(E)$ 是使 $\langle z_n',\ \cdot\rangle$ 可测的最小 σ-代数. 我们在 E^* 中定义内积[,]

$$[z,\ z]=\int\langle z,\ y\rangle^2\mu(dy),\quad \forall z\in E^*,$$

则$(z'_n)=(z''_n)\cup(\hat{z}_m)$，这里$[z''_n, z''_n]>0$, $\forall n\geqslant 1$, $[\hat{z}_m, \hat{z}_m]=0$, $\forall m\geqslant 1$. 从(z''_n)中按$[,]$进行正交化得(z_n)，于是$[z_i, z_j]=\delta_{ij}$，而且每个z''_m都可由(z_n)的有限线性组合表出. 因此$B(E)$是使$(z_n)\cup(\hat{z}_m)$可测的最小σ-代数. 设$z\in E^*$, $[z, z_n]=0$对一切n成立，则$\langle z, \cdot\rangle$对于$\langle z_n, \cdot\rangle$, $\langle\hat{z}_m, \cdot\rangle$都是独立的，所以随机变量$\langle z, \cdot\rangle$关于测度$\mu$几乎处处为0。所以，对$\forall z\in E^*$，都存在$(\lambda_n)\in l_2$，使$\langle z, \cdot\rangle=\sum\lambda_n\langle z_n, \cdot\rangle$关于$\mu$几乎处处成立，级数$z=\sum\limits_n\lambda_n z_n$是按$[,]$收敛的.

记$R^\infty=\{(t_n): n=1, 2, \cdots\}$在$R^\infty$上定义乘积拓扑，作$E$到$R^\infty\otimes R^\infty$上的映照$T$

$$T:\ x\mapsto\{(\langle z_n, x\rangle), (\langle\hat{z}_n, x\rangle)\},$$

则T是一个一一映照而且是连续的. 对于$\forall\Sigma\in B(R^\infty)\otimes B(R^\infty)$，定义

$$P(\Sigma)=\mu\{x: Tx\in\Sigma\},$$

这里$B(R^\infty)$是指R^∞上的Borel集全体.

那么，P是$B(R^\infty)\otimes B(R^\infty)$上的一个乘积测度

$$\rho=r\otimes\delta(0),$$

r是R^∞上的一个标准的Gauss乘积测度

$$dr=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t_n^2}{2}\right)dt_n.$$

显然，对于ρ它的拟不变点全体是$\{(a_n), 0\}$, $(a_n)\in l_2$.

由于μ是E上的对称测度，且E是可分的Banach空间，所以我们必可找到一列对称的紧集K_n, $\mu(K_n)\geqslant 1-1/n$，记

$$K_0=\cup K_n,\quad \overline{K}=K_0\cup(K_0+K_0)\cup\cdots\cup(K_0+K_0+\cdots+K_0)\cup\cdots,$$

则$\overline{K}\in B(E)$而且$\overline{K}$是可列个紧集之和，$\mu(\overline{K})=1$，另外，若$x, y\in\overline{K}$则$x-y\in\overline{K}$.

由于对E中的任一紧集K, $\forall G\in B(E)$，都有$T(K\cap G)\in B(R^\infty)\otimes B(R^\infty)$，故$T(G\cap\overline{K})\in B(R^\infty)\otimes B(R^\infty)$.

对$\forall(a_n)\in l_2$，使

$$P(\{(a_n), 0\}+T(\overline{K}))=1,$$

于是$(\{(a_n), 0\}+T(\overline{K}))\cap T\overline{K}\neq$空集. 于是必有$x_1, x_2\in\overline{K}$使

$$\{(a_n), 0\}+Tx_1=Tx_2.$$

记$x=x_2-x_1\in\overline{K}$，那么对$\forall z_n, \hat{z}_n$成立

$$a_n=\langle z_n, x\rangle,\quad \langle\hat{z}_n, x\rangle=0.$$

下面说明x是μ的拟不变点，设$\sigma\in B(E)$, $\mu(\sigma)=0$，则

$$\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2,\quad \sigma_1=\sigma\cap\overline{K},\quad \sigma_2=\sigma\cap\overline{K}^c.$$

由于$x\in\overline{K}$，故

$$(\sigma_2+x)\cap\overline{K}=\text{空集},$$

所以　$\mu(\sigma+x)=\mu((\sigma_1+x)\cup(\sigma_2+x))=\mu(\sigma_1+x)=P(T(\sigma_1)+Tx).$

由于$\mu(\sigma_1)=P(T\sigma_1)=0$, $Tx=\{(a_n), 0\}$，故$P(T(\sigma_1)+Tx)=0$，即$\mu(\sigma+x)=0$，从而x是μ的拟不变点.

记$T_\mu=\{x: x$是μ的拟不变点$\}$. 则从[4]知，对$\forall x\in T_\mu$存在常数C，对一切$z\in E^*$成立

$$|\langle z, x\rangle|^2\leqslant C\int|\langle z, y\rangle|^2\mu(dy)=C[z,z].$$

从前面的证明知,对任 $z\in E^*$, 存在 $(\lambda_n)\in l_2$ 使

$$z=\sum\lambda_n z_n.$$

关于 μ 几乎处处成立,而且 $\sum\lambda_n z_n$ 按[,]收敛. 所以

$$\langle z, x\rangle=\sum\lambda_n\langle z_n, x\rangle, \quad \forall x\in T_\mu,$$

因为对 $\forall(x_n)\in l_2$, 都存在 $x\in T_\mu$, 使 $\langle z_n, x\rangle=a_n$. 所以取 $x_n\in T_\mu$ 满足 $\langle z_i, x_j\rangle=\delta_{ij}$, 则 $z=\sum\langle z, x_n\rangle z_n$ 关于 μ 几乎处处成立. 记

$$S_n(\omega)=\sum_1^n e_k(\omega)x_k,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}E(\exp(i\langle z, S_n(\omega)\rangle))=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n\langle z,x_k\rangle^2}=e^{-\frac{1}{2}\sum_1^\infty|\langle z,x_n\rangle|^2}$$
$$=e^{-\frac{1}{2}[z,z]}=\int e^{i\langle z,y\rangle}\mu(dy),$$

对一切 $z\in E^*$ 成立, 从[1]知 $\sum e_n(\omega)x_n$ 是 $a.s.$ 收敛的. 显然, μ 是由 (x_n) 导出的 Gauss 测度.

定义 4 设 $\mu\in\mathscr{P}(E)$ 定义

$$T_\mu=\{x: x\in E,\ x \text{ 是 } \mu \text{ 的拟不变点}\},$$

$$H_\mu=\{x: x\in E, \text{ 存在常数 } C,\ \varepsilon>0, \text{ 使对 } \forall z\in E^* \text{ 成立 } |\langle z, x\rangle|\leqslant CJ_\varepsilon(|\langle z, y\rangle|, \mu(dy))\}.$$

这里

$$J_\varepsilon(|\langle z, y\rangle|, \mu(dy))=\inf\{t: t\geqslant 0,\ \mu\{|\langle z, y\rangle|>t\}\leqslant\varepsilon\}.$$

定理 4 设 μ 是 E 上的 Gauss 测度,则必有 $(x_n)\subset\mathscr{F}(e_n;\ E)$, 使

$$T_\mu=H_\mu=\{x:\ x=\sum\lambda_n x_n,\ (\lambda_n)\in l_2\}.$$

证 设 $x\in T_\mu$, 则由于一列 Gauss 随机变量的 Pr 收敛等价于均方收敛, 所以

$$H_\mu=\left\{x: \text{存在常数 } C, \text{ 使 } |\langle z, x\rangle|\leqslant C\left(\int|\langle z, y\rangle|^2\mu(dy)\right)^{1/2},\ \forall z\in E'\right\}$$

记 z_n, x_n 是定理 3 的证明中所出现的向量, 则 $\forall z\in E^*$,

$$z=\sum\langle z, x_n\rangle z_n$$

级数是按[,]收敛的, 由于 $x\in H_\mu$, 故 $\langle z, x\rangle$ 按[,]连续, 从而 $(\langle z_n, x\rangle)\in l_2$, 而且 $\langle z, x\rangle=\sum\langle z, x_n\rangle\langle z_n, x\rangle$, 由于 $(\langle z_n, x\rangle)\in l_2$ 从定理 1 知 $\sum\langle z_n, x\rangle x_n$ 按 E 中的范数收敛, 故

$$\langle z, x\rangle=\langle z, \sum\langle z_n, x\rangle x_n\rangle,$$

上式对一切 $z\in E^*$ 成立, 即 $x=\sum\langle z_n, x\rangle x_n$.

另外, 若 $x\in E$, $x=\sum\lambda_n x_n$, $(\lambda_n)\in l_2$, 由定理 1 知这个级数是收敛的, 所以上式有意义, 而且

$$|\langle z, x\rangle|\leqslant(\sum\lambda_n^2)^{1/2}(\sum\langle z, x_n\rangle^2)^{1/2}=(\sum\lambda_n^2)^{1/2}\left[\int|\langle z, y\rangle|^2\mu(dy)\right]^{1/2}.$$

从而, $x\in H_\mu$, 从[4]知道, $T_\mu\subset H_\mu$, 所以 $T_\mu\subset\{x: x=\sum\lambda_n x_n,\ (\lambda_n)\in l_2\}$, 另外若 $x=\sum\lambda_n x_n$, $(\lambda_n)\in l_2$, 则从定理 3 的证明知, 必有 $x'\in T_\mu$, 使对一切 n, $\langle z_n, x\rangle=\langle z_n, x'\rangle$, $\langle\hat{z}_n, x\rangle=\langle\hat{z}_n, x'\rangle$, 所以 $x=x'$. 证毕.

利用上述的定理可很容易导出抽象 Wiener 空间的一些结果, 例如

推论　若 μ 是 E 上的一个 Gauss 测度，则必存在 E 的一个闭子空间 E_0, $\mu(E_0)=1$ 和 $H\subset E_0$, H 是 E_0 的稠密的线性子空间，在 H 上可定义内积 $(,)$ 使 H 成为一个 Hilbert 空间，记 $H\to E$ 的嵌入映照为 i，则 $(i,\ H,\ E_0)$ 成为一个抽象的 Wiener 空间，μ 是 H 上的 $r(\cdot)$ 的可列可加扩张.

证　取定理 3 证明中的 (x_n), $H=\{\sum\lambda_n x_n:\ (\lambda_n)\in l_2\}$，在 H 上定义内积，$(\sum\alpha_n x_n,\ \sum\beta_n x_n)=\sum\alpha_n\bar{\beta}_n$, (α_n), $(\beta_n)\in l_2$. 利用定理 2 即可证明这个推论.

推论　μ 是 E 上的 Gauss 测度的充要条件是存在 $E^*\to E$ 的一个线性有界算子

$$S:\ Sy=\sum\langle y,\ x_n\rangle x_n,\quad \forall y\in E^*,$$

这里 $(x_n)\in\mathscr{F}(e_n,\ E)$，使 μ 的特征函数

$$\hat{\mu}(y)=\exp\left(-\frac{1}{2}\langle y,\ Sy\rangle\right).$$

本文的最终目的是要研究拟不变测度的存在性问题，主要想法是利用 Banach 空间上随机变量的中心极限定理.

定义 5　设 E 是一个实的可分的 Banach 空间，若

$$\{(x_n):(x_n)\subset E,\ \sum\|x_n\|^2<\infty\}\subset\mathscr{F}(e_n;\ E),$$

则称 E 是 type-2 空间.

定义 6　设 $x(\omega)$ 是一个 E-值的随机变量，对 $\forall z\in E^*$, $E(\langle z,\ x\rangle)=0$, $E(\|x\|^2)<\infty$，而且作 $\{x_n(\omega)\}$ 是一列 E-值的独立的同分布的随机变量，

$$x_1(\omega)=x(\omega),\quad S_n(\omega)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n x_k(\omega),$$

S_n 在 E 上的几率分布为 μ_n，如果，μ_n 弱收敛于 $\nu\in\mathscr{P}(E)$，则称 $x(\omega)$ 具有中心极限性质，简称具有 CTL 性质.

这里 μ_n 弱收敛于 ν，是指对 E 上的任一有界连续函数 $\varphi(x)$ 成立

$$\int\varphi(x)\mu_n(dx)\longrightarrow\int\varphi(x)\nu(dx).$$

从[5]知，在一个实的可分的 Banach 空间 E 上下列命题等价：

(i) E 是 type-2 空间；

(ii) 若 $x(\omega)$ 是 E-值随机变量 $E(x)=0$, $E(\|x\|^2)<\infty$，则 x 具有 CTL 性质.

定理 5　设 E 是一个实的可分的 Banach 空间，E 是 type-2 空间，E_0 是 E 的一个线性子空间，则下列命题等价：

(i) 存在 $\mu\in\mathscr{P}(E)$, μ 关于 E_0 是拟不变的；

(ii) 存在 $(x_n)\in\mathscr{F}(e_n,\ E)$，使

$$E_0\subset\{x:\ x=\sum\lambda_n x_n,\ (\lambda_n)\in l_2\};$$

(iii) E_0 关于 E 上的一个 Gauss 测度 ν 是拟不变的.

证　设 (i) 成立，则作 $\mu_1(A)=\frac{1}{2}(\mu(A)+\mu(-A))$, $\forall A\in B(E)$，自然 $E_0\subset T_{\mu_1}$, μ_1 是对称测度. 作 $\mu_2(A)=\int_A e^{-\|x\|}\mu_1(dx)$，则 μ_2 是对称的，$\int\|x\|^2\mu_2(dx)<\infty$, $E_0\subset T_{\mu_2}$，因为 E 是 type-2 空间，从[5]知道，故必有 E 上的 Gaussν 测度，使

$$\int\langle z, y\rangle^2\mu_2(dy)=\int\langle z, y\rangle^2\nu(dy).$$

从[4]知道, $T_{\mu_2}\subset H_{\mu_2}$, 从上式知 $H_{\mu_2}\subset H_\nu$, 故 $T_{\mu_2}\subset H_\nu=T_\nu$, 但从定理 4 知, 存在 $(x_n)\in\mathscr{F}(e_n; E)$, 使 $T_\nu=\{x: x=\sum\lambda_n x_n,\ \forall(\lambda_n)\in l_2\}$, 故

$$E_0\subset T_{\mu_2}\subset\{x: x=\sum\lambda_n x_n,\ (\lambda_n)\in l_2\},$$

于是(i)⇒(ii).

另外, 设(ii)成立, 记 ν 是由 (x_n) 导出的 Gauss 测度, 则从定理 1 知, 对 $\forall(\lambda_n)\in l_2$, $\sum\lambda_n x_n$ 有意义, 而且 $E_0\subset H_\nu$, 但是 $H_\nu=T_\nu$, 故 E_0 关于 ν 是拟不变的. 于是(ii)⇒(iii).

参 考 文 献

[1] Itô, K., Nisio, M., *Osaka. Math. Jour.* **5** (1968), 35—48.

[2] Kuo, H. H., Gaussian measures in Banach spaces, *Lecture Notes in Math.*, **463**, Spring Verlag, N. Y., (1975).

[3] Kuelbs, J., *Tour. Functional Analysis*, **14** (1973), 28—43.

[4] 夏道行, 无限维空间上测度和积分论, 上海科学技术出版社, 1965.

[5] Jain, N. C., *Lectare notes in Math.*, **526**, Springer Verlag, N. Y., (1976), 113—13.

ON THE NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION OF THE EXISTENCE OF QUASI-INVARIANT MEASURES

ZHANG YINNAN

(*Research Institute of Mathematics, Fudan University*)

ABSTRACT

If E is a separable type-2 Banach space and E_0 is a linear subspace of E, then the following are equivalent:

(a) There exists a probability measure μ on E, Which is E_0-quasi-invariant.

(b) There exists a sequence $(X_n)\subset E$ such that $\sum e_n(\omega)X_n$ converges a.s., where $e_n(\omega)$ are independend identically distributed symmetric stable random variables of index 2, i.e. $E(\exp(it\, e_n(\omega)))=\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ for all real t, and

$$E_0\subset\{x: x=\sum\lambda_n x_n,\ \forall(\lambda_n)\in l_2\}.$$

In this note we prove that $\sum\lambda_n x_n$ is convergent.