数 学 年 刊
2 (2) 1981

极小化与最佳逼近

史 应 光
(中国科学院计算中心)

1. 引 言

设 $C(X)$ 是紧集 $X\subset[a, b]$ 上的实值连续函数空间, $M\subset C(X)$ 为 n 维子空间, 其中 n 为自然数. 对 X 上的任意实值函数 f, 定义 $\|f\|=\sup\limits_{x\in X}|f(x)|$. 又设 $F(x, y)$ 为从 $X\times(-\infty, \infty)$ 到 $[-\infty, \infty]$ 上的非负二元函数, 且至少存在一个 $P\in M$ 使 $\|F(x, P)\|<\infty$, 这里 $F(x, P)\equiv F(x, P(x))$.

现在我们提出如下的极小化问题: 寻找一个 $P\in M$ 使它满足

$$\|F(x, P)\|=e\equiv\inf_{Q\in M}\|F(x, Q)\|. \tag{1}$$

称这样一个 P(若存在的话)为 F 在 M 中的极小函数或极小点, 我们也说 P 使 F 达极小.

下面举若干例子来说明极小化问题(1)与最佳逼近问题之间的关系.

(I) $F(x, y)=W(x, f(x)-y)$, 其中 $W(x, y)$ 同 $F(x, y)$ 之定义, $f\in C(X)$. 这就是广义权函数逼近, [1] 中研究了其中的一个特例.

(II) $F(x, y)=\left\{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\lambda_j|f_j(x)-y|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$, 其中每一个 $f_j\in C(X)$, $1\leqslant p<\infty$, $\lambda_j\geqslant0$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\lambda_j=1$, 且满足条件 $\|F(x, 0)\|<\infty$. 这称为加权联合逼近, 是 [2] 的推广.

(III) $F(x, y)=\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}|f(x)-y|$, 其中 $\mathscr{F}$ 为 X 上有界函数 f 的一个集合且 $\|F(x, 0)\|<\infty$. 这笼统地叫作联合逼近, 在 [3, 4] 中首先对此问题的一个等价形式作了研究.

(IV) $F(x, y)=|f(x)-y|+w(x)$, 其中 f 及 $w\geqslant0$ 都是 X 上的有界函数. [5] 中将它称为加性权逼近(*approximation with an additive weight*).

可见, 极小化问题(1)包含了多种形式的逼近问题, 特别是包含了各种联合逼近问题. 而这些逼近问题迄今还是分别地进行讨论的. 现在, 问题(1)给我们提供了一个统一的模式, 以便能够进行综合的研究.

对于问题(1)自然要问及它的极小点是否存在? 是否唯一? 以及如何刻划其特征? 等等. 本文讨论了这些问题, 对 F 作一定限制后得到了一系列结果, 从而推广了经典的切比雪夫理论.

2. 存 在 性

定理1 若 $F(x, y)$ 满足条件:

本文1979年12月10日收到.

(a) $\lim\limits_{|y|\to\infty} F(x, y)=\infty,\ \forall x\in X,$

(b) 对每一个 $x\in X$ 及每一个 y,

$$\lim_{\substack{\eta\to y\\ F(x,\eta)\leqslant F(x,y)}} F(x, \eta)=F(x, y),$$

则 F 之极小点存在.

证 设 $\{P_k\}\subset M$ 使 $\lim\limits_{k\to\infty}\|F(x, P_k)\|=e$. 可以用类似于[1]中定理2的论证方法来证明 $\{P_k\}$ 有界，因为那里的论证仅用到该文中的条件(1.3)的(c)，此即这里的条件(a). 既然 $\{P_k\}$ 有界，故存在收敛子列. 不妨设 $P_k\to P\in M$. 我们来证明 $\|F(x, P)\|=e$. 显然 $\|F(x, P)\|\geqslant e$. 今假定 $\|F(x, P)\|>e$. 则存在 $\varepsilon>0$ 及一点 $\xi\in X$, 使 $F(\xi, P)\geqslant e+\varepsilon$. 另一方面，存在自然数 N, 使当 $k\geqslant N$ 时 $\|F(x, P_k)\|\leqslant e+\frac{\varepsilon}{2}$, 更有

$$F(\xi, P_k)\leqslant e+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant F(\xi, P).$$

但由(b)，应当成立

$$\lim_{k\to\infty} F(\xi, P_k)=F(\xi, P)\geqslant e+\varepsilon.$$

这就发生了矛盾. 证毕.

定理2 若 $F(x, y)$ 满足条件：

(c) 对每一个 $x\in X$ 及任意三点 $y_1\leqslant y_2\leqslant y_3$ 都成立

$$F(x, y_2)\leqslant\max\{F(x, y_1),\ F(x, y_3)\},$$

则 F 的极小点集(若非空)是凸的.

证 设 $P_1, P_2\in M$ 是 F 之极小点及 $\lambda\in[0, 1]$. 由于对每一个固定点 $x\in X$, 至少成立下述两式之一

$$P_1(x)\leqslant\lambda P_1(x)+(1-\lambda)P_2(x)\leqslant P_2(x),$$
$$P_2(x)\leqslant\lambda P_1(x)+(1-\lambda)P_2(x)\leqslant P_1(x),$$

因此，根据定理的条件，恒有

$$F(x, \lambda P_1+(1-\lambda)P_2)\leqslant\max\{F(x, P_1),\ F(x, P_2)\}\leqslant e.$$

即 $\|F(x, \lambda P_1+(1-\lambda)P_2)\|\leqslant e$, 故 $\lambda P_1+(1-\lambda)P_2$ 也是 F 之极小点.

3. 特 征

为了得出类似于经典的切比雪夫理论那样的结果，在这一节和下一节，我们假定 $M\subset C[a, b]$ 为 n 维 Haar 子空间，同时假定 F 满足条件：

(d) 对每一个 $x\in X$ 及每一个 y,

$$\varlimsup_{\substack{\xi\to x\\ \eta\to y}} F(\xi, \eta)\leqslant F(x, y),$$

(e) 对每一个 $x\in X$, 都存在两个广义实数 $f^-(x)$ 及 $f^+(x)$, $-\infty\leqslant f^-(x)\leqslant f^+(x)\leqslant+\infty$, 使 $F(x, y)$ 在区间 $(-\infty, f^-(x)\rangle$ 上严格递减，在区间 $\langle f^+(x), +\infty)$ 上严格递增，及在区间 $\langle f^-(x), f^+(x)\rangle$ 上恒成立 $F(x, y)=F^*(x)=\inf\limits_{y} F(x, y)$, 其中尖括号的区间

记号表示当区间端点为有穷时端点属于该区间,反之则不属于.

注　条件(e)蕴含条件(c). 此外,若对每一个 x, $F(x, y)$ 都是 y 的凸函数,则必满足条件(e).

引理 1　若 $S\in M$ 在 $n+1$ 个有序点

$$x_1<x_2<\cdots<x_{n+1} \tag{2}$$

上满足

$$\mu_i\equiv(-1)^i S(x_i)\geqslant 0\quad(\leqslant 0),\ i=1, \cdots, n+1, \tag{3}$$

则

$$S=0.$$

证　设 $S=\sum_{j=1}^{n}c_j\phi_j$, 其中 $\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$ 为 M 的任一基底. 则

$$\sum_{j=1}^{n}c_j\phi_j(x_i)+(-1)^{i-1}\mu_i=0,\quad i=1, \cdots, n+1.$$

它有非零解 $(c_1, \cdots, c_n, 1)$, 故系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}\phi_1(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) & \mu_1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \phi_1(x_{n+1}) & \cdots & \phi_n(x_{n+1}) & (-1)^n\mu_{n+1}\end{vmatrix}=0.$$

按最后一列展开

$$\Delta=(-1)^n\sum_{i=1}^{n+1}\mu_i D[x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}],$$

其中 $D[x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}]$ 为对应于元素 $(-1)^{i-1}\mu_i$ 之余子式. 按 Haar 条件及(2)式, 这些余子式恒同号[6, p. 74]. 因而从 $\Delta=0$ 得出 $\mu_1=\cdots=\mu_{n+1}=0$. 按 Haar 条件, $S=0$.

对任一 $P\in M$, 令

$$X_P=\{\xi\in X:F(\xi, P)=\|F(x, P)\|\},$$
$$X_+=\{x\in X_P:f^-(x)>P(x)\},\quad X_-=\{x\in X_P:f^+(x)<P(x)\},$$
$$\overline{X}_+=\{x\in X_P:f^-(x)\geqslant P(x)\},\quad \overline{X}_-=\{x\in X_P:f^+(x)\leqslant P(x)\},$$
$$X_0=\{x\in X_P:f^-(x)\leqslant P(x)\leqslant f^+(x)\}.$$

$$\sigma(x)=\begin{cases}1, & x\in\overline{X}_+,\\ -1, & x\in\overline{X}_-.\end{cases}$$

若在 $X_+\cup X_-(\overline{X}_+\cup\overline{X}_-)$ 中存在一组 $n+1$ 个有序点(2)满足

$$\sigma(x_{i+1})=-\sigma(x_i)\quad(i=1, \cdots, n),$$

则称该点组为 P 对 F 之交错组(广义交错组). 下面来证明一个很有用的引理.

引理 2　若 $P\in M$ 对 F 存在广义交错组,则 P 是 F 之唯一的极小点.

证　设此广义交错组为(2). 今假定 $Q\in M$ 满足 $\|F(x, Q)\|\leqslant\|F(x, P)\|$. 当 $x_i\in\overline{X}_+$ 时, $f^-(x_i)\geqslant P(x_i)$, 从而 $Q(x_i)\geqslant P(x_i)$, 因为相反的话,据条件(e)将有

$$F(x_i, Q)>F(x_i, P)=\|F(x, P)\|.$$

类似地,当 $x_i\in\overline{X}_-$ 时,有 $Q(x_i)\leqslant P(x_i)$. 于是 $S=Q-P$ 在点组(2)上满足(3)式, 由引理 1, $S=0$, 即 $Q=P$. 这就证明了 P 是 F 之唯一的极小点.

定理 3　设 $P\in M$. 若 $X_0\neq\phi$, 则 P 是 F 之极小点,且 $\|F(x, P)\|=\|F^*\|$.

证　设 $\xi\in X_0$, 这时 $\|F(x, P)\|=F(\xi, P)=F^*(\xi)\leqslant\|F^*\|$. 另一方面, 对任何 $Q\in M$, 有 $F(x, Q)\geqslant F^*(x)$, 故 $\|F(x, Q)\|\geqslant\|F^*\|$. 因而 $\|F(x, P)\|\leqslant\|F(x, Q)\|$, 且

$\|F(x, P)\| = \|F^*\|$.

定理4 设 $P \in M$. 若 $X_0 = \phi$, 则下列三个结论等价:

(a) P 是 F 之极小点,

(b) $O \in \mathscr{K}\{\sigma(x)\hat{x}: x \in X_P\}$, 其中 $\mathscr{K}$ 表示凸包, $\hat{x} = (\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x))$, $\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$ 为 M 的任一基底,

(c) 存在交错组.

证 (a)$\Rightarrow$(b). 假设 $O \overline{\in} \mathscr{K}\{\sigma(x)\hat{x}: x \in X_P\}$. 因为 X_P 显然是紧集, 则按线性不等式定理 [6, p. 19], 存在 $Q \in M$, 使 $\sigma(x)Q(x) > 0$, $\forall x \in X_P$. 我们来证明存在 $\lambda > 0$, 使 $R = P + \lambda Q$ 满足 $\|F(x, R)\| < e \equiv \|F(x, P)\|$.

首先设 $\xi \in X_+$, 这时 $f^-(\xi) > P(\xi)$, $Q(\xi) > 0$. 取 $\lambda_\xi > 0$, 使 $R^* = P + \lambda_\xi Q$ 满足

$$f^-(\xi) \geqslant R^*(\xi) > P(\xi).$$

按条件(e), $F(\xi, R^*) < F(\xi, P) = e$. 据条件(d), 存在 ξ 之邻域 Δ_ξ, 使对每一个 $x \in \Delta_\xi$ 成立 $F(x, R^*) < e$, 同时 $Q(x) > 0$. 注意到

$$R^*(x) \geqslant R(x) \equiv P(x) + \lambda Q(x) > P(x), \quad 0 < \lambda \leqslant \lambda_\xi,\ x \in \Delta_\xi,$$

我们断定

$$F(x, R) < e, \quad 0 < \lambda \leqslant \lambda_\xi,\ x \in \Delta_\xi. \tag{4}$$

因为若对某一数偶 (x, λ) 此式不成立, 这时 $F(x, R^*) < F(x, R) \geqslant e \geqslant F(x, P)$, 从而与条件(e)发生矛盾.

设 $\xi \in X_-$, 同样可证, 存在 ξ 之邻域 Δ_ξ 及正数 λ_ξ, 使(4)式成立.

其次设 $\xi \overline{\in} X_P$, 则 $F(\xi, P) < e$. 据条件(d), 存在 ξ 之邻域 Δ_ξ 及正数 λ_ξ, 使(4)式成立.

因 $X_0 = \phi$, 如此 $\bigcup_{\xi \in X} \Delta_\xi \supset X$. 据有限覆盖定理, 存在有限个邻域 $\Delta_\xi, \cdots, \Delta_\eta$ 覆盖 X, 取对应之正数 $\lambda_\xi, \cdots, \lambda_\eta$ 中之最小者, 记为 λ. 则对此 λ 及所有 $x \in X$ 应恒成立 $F(x, R) < e$. 于是 $\|F(x, R)\| < e$. 这个矛盾就证明了蕴含关系(a)$\Rightarrow$(b).

(b)$\Rightarrow$(c). 证明是标准的, 例如可见[6, p. 75].

(c)$\Rightarrow$(a). 直接由引理2推出.

由定理3和定理4可得下述极小点的完全的特征.

定理5 $P \in M$ 为 F 之极小点当且仅当 $X_0 \neq \phi$ 或存在交错组.

4. 唯一性及其它结果

定理6 若 $P \in M$ 在 X 的一组 $n+1$ 个有序点(2)上交替满足下式:

$$f^-(x_i) > P(x_i), \quad f^+(x_i) < P(x_i),$$

则

$$e \geqslant \min_i F(x_i, P).$$

证 假定 $e < \min_i F(x_i, P)$. 根据 e 之定义, 我们可以选取一个 $Q \in M$, 使得

$$\|F(x, Q)\| < \min_i F(x_i, P) \leqslant F(x_i, P).$$

然后同引理2之讨论, 仍然会得出结果 $Q = P$. 而这是不可能的.

定理 7 设 $P\in M$ 是 F 之极小点. 若 P 满足下列诸条件之一:

(a) $X_0=\phi$,

(b) 存在广义交错组,

(c) $\|F(x, P)\|>\|F^*\|$, 则 P 是 F 之唯一的极小点.

证 (a) 据定理 4, $X_0=\phi$ 及 P 是极小点一起蕴含存在交错组. 由引理 2, P 是 F 之唯一的极小点.

(b) 由引理 2 直接得出.

(c) $\|F(x, P)\|>\|F^*\|$ 蕴含 $X_0=\phi$, 因为若 $\xi\in X_0$, 则 $\|F(x,P)\|=F(\xi,P)\leqslant\|F^*\|$ (见定理 3 之证明).

定理 8 设 $P\in M$. 若 $\overline{X}_+\cap\overline{X}_-=\phi$, f^+, $f^-\in C(X)$, 则 P 是 F 之唯一的极小点当且仅当存在广义交错组.

证 充分性由引理 2 得出. 现证必要性. 我们用点组

$$\xi_0=a<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_m=b$$

分割区间 $[a, b]$, 使在每个小区间 $\Delta_i\equiv[\xi_{i-1}, \xi_i]$ $(i=1, \cdots, m)$ 上交替满足 (a) $\overline{X}_+\cap\Delta_i\neq\phi$, $\overline{X}_-\cap\Delta_i=\phi$, 及 (b) $\overline{X}_-\cap\Delta_i\neq\phi$, $\overline{X}_+\cap\Delta_i=\phi$. 如此, 要证必要性, 只须证明 $m>n$. 今假定 $m\leqslant n$. 由 Haar 条件, 存在 $Q\in M$, 使 $Q(x)$ 在点 $\xi_1, \cdots, \xi_{m-1}$ 上为零且变号, 同时 $Q(x)\neq 0$, $\forall x\in(a, b)\backslash\{\xi_1, \cdots, \xi_{m-1}\}$ [7, p. 30]. 这样, 适当选择 Q 之符号, 可使 $\sigma(x)Q(x)>0$, $\forall x\in\overline{X}_+\cup\overline{X}_-$.

当 $\xi\overline{\in}X_0$ 时, 定理 4 的证明中 (a)⇒(b) 的部分已经断言, 存在 ξ 之邻域 Δ_ξ 及正数 λ_ξ, 使 (4) 式成立, 其中 $R=P+\lambda Q$.

当 $\xi\in X_0\cap(\overline{X}_+\cup\overline{X}_-)$ 时, 考虑到 $\overline{X}_+\cap\overline{X}_-=\phi$, 若记 $f=(f^++f^-)/2$, 这时有 $\sigma(\xi)[f(\xi)-P(\xi)]>0$, $\sigma(\xi)Q(\xi)>0$. 据连续性, 存在 ξ 之邻域 Δ_ξ, 使对所有 $x\in\Delta_\xi$ 有 $\sigma(\xi)[f(x)-P(x)]\geqslant\varepsilon>0$ 及 $\sigma(\xi)Q(x)>0$. 若取 $\lambda_\xi=\varepsilon/\|Q\|$, 则当 $0<\lambda\leqslant\lambda_\xi$ 时有

$$\sigma(\xi)[f(x)-P(x)]\geqslant\sigma(\xi)[f(x)-R(x)]\geqslant 0.$$

据条件 (e), 我们有

$$F(x, R)\leqslant e, \quad 0<\lambda\leqslant\lambda_\xi, \ x\in\Delta_\xi.$$

当 $\xi\in X_0\backslash(\overline{X}_+\cap\overline{X}_-)$ 时, 自然有 $f^-(\xi)<P(\xi)<f^+(\xi)$, 从而存在 ξ 之邻域 Δ_ξ (5) 及正数 λ_ξ, 使当 $0<\lambda\leqslant\lambda_\xi$, $x\in\Delta_\xi$ 时成立 $f^-(x)\leqslant R(x)\leqslant f^+(x)$, 由此 (5) 式也成立. 再应用有限覆盖定理, 求得 $\lambda>0$, 使 $\|F(x, R)\|\leqslant e$. 注意到 $R=P+\lambda Q\neq P$, 故 R 是 F 之另一个极小点. 这个矛盾就证明了 $m>n$.

5. 应　用

为了将上述结果应用于第 1 节中的那些例子, 我们只须对每个例子中的函数 $F(x,y)$ 讨论和验证诸条件 (a)—(e).

(I) 若 $W(x, y)$ 分别满足诸条件 (a)—(e), 则不难验证 $F(x, y)=W(x, f(x)-y)$ 也同样分别满足对应的条件.

(II) 不难看出, $F(x, y)$ 满足诸条件 (a)—(e), 其中条件 (e) 之验证需要用到

Minkowski 不等式，事实上 $F(x, y)$ 是 y 之凸函数.

(III, IV) [5] 中证明了(IV)型的逼近问题等价于对某两个有界函数的(III)型的逼近问题. 而[4]中则证明了(III)型的逼近问题等价于对某两个有界函数 $F^+(x)$, $F^-(x)$ 的(III)型的逼近问题，在该问题中 $F(x, y)=\sup\{|F^+(x)-y, F^-(x)-y\}$, 这里 $F^+\geqslant F^-$ 且 F^+ 和 $-F^-$ 都是上半连续的. 这时 $F(x, y)$ 能满足全部条件(a)—(e). 诸条件(a), (b), (c)和(e)的验证是容易的，关于条件(d)则有下述引理 3.

引理 3 函数 $F(x, y)$ 满足条件(d).

证 假设在某一点 (x, y) 成立

$$\varlimsup_{\substack{\xi\to x\\ \eta\to y}} F(\xi, \eta) > F(x, y).$$

这时应存在点列 $\xi_k\to x$, $\eta_k\to y$ 及常数 λ, 使

$$F(\xi_k, \eta_k)\geqslant\lambda>F(x, y),\ \forall k.$$

据定义，
$$F(\xi_k, \eta_k)=\sup\{|F^+(\xi_k)-\eta_k|,\ |F^-(\xi_k)-\eta_k|\}.$$

这时，若存在一无穷指标序列 $\{k_i\}$ 使

$$|F^+(\xi_{k_i})-\eta_{k_i}|\geqslant|F^-(\xi_{k_i})-\eta_{k_i}|,\quad i=1, 2, \cdots$$

恒成立，考虑到 $F^+\geqslant F^-$, 那末应当有 $\eta_{k_i}\leqslant F^+(\xi_{k_i})$, $i=1, 2, \cdots$. 从而

$$F^+(\xi_{k_i})-\eta_{k_i}=F(\xi_{k_i}, \eta_{k_i})\geqslant\lambda>F(x, y)\geqslant F^+(x)-y.$$

让 $i\to\infty$, 由 F^+ 之上半连续性，从上式得到

$$F^+(x)-y\geqslant\lambda>F^+(x)-y.$$

这发生矛盾. 对于存在一无穷指标序列 $\{k_i\}$ 使

$$|F^+(\xi_{k_i})-\eta_{k_i}|\leqslant|F^-(\xi_{k_i})-\eta_{k_i}|,\quad i=1, 2, \cdots$$

恒成立之情形同样也将发生矛盾. 证毕.

参考文献

[1] Moursund, D. G., Chebyshev approximation using a generalized weight function, *SIAM J. Numer. Anal.*, **3**: 3 (1966), 435—450.

[2] Ling, W. H., On simultaneous Chebyshev approximation in the "sum" norm, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **48**: 1 (1975), 185—188.

[3] Dunham, C. B., Simultaneous Chebyshev approximation of functions on an interval, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18**: 3 (1967), 472—477.

[4] Diaz, J. B., McLaughlin, H. W., Simultaneous approximation of a set of bounded real functions, *Math. Comp.*, **23**: 107 (1969), 583—594.

[5] Diaz, J. B., McLaughlin, H. W., On simultaneous Chebyshev approximation and Chebyshev approximation with an additive weight, J. Approximation Theory **6**: 1 (1972), 68—71.

[6] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, *McGraw-Hill, New York*, 1966.

[7] Karlin, S., Studden, W. J., Tchebycheff systems: with applications in analysis and statistics, Interscience, New York, 1966.

MINIMIZATION AND BEST APPROXIMATION

SHI YINGGUANG
(*The Computing Center, Chinese Academy of Sciences*)

ABSTRACT

In this paper we discuss the problem of minimization of a nonnegative function $F(x, y)$ of two variables, i.e., we wish to find an element $P \in M$, $M \subset C(X)$ being n subspace, to minimize $\|F(X, P)\|_\infty$. For such a problem we have established the theorems of existence, alternation and uniqueness. The results obtained here may be effectively applied to the problems of approximation using a generalized weight function, of simultaneous approximation, of approximation with an additive weight, etc.