数 学 年 刊
2 (2) 1981

从球面到欧氏空间的连续映射*

何 伯 和
(吉林大学数学研究所)

§1. 引 言

由 Knaster, B., 提出[1], 并被 Borsuk, Kakutani, Heller, Fernander, Floyd, Yamabe-Yujobo 等人研究过的问题是:

给定一个从 $m+n-2$ 维球面到 m 维欧氏空间的连续映射 $f: S^{m+n-2}\to R^m$, 以及球面上 n 个不同的点 $u_1, \cdots, u_n\in S^{m+n-2}$, 是否存在一个旋转 r, 使得 $f(ru_1)=\cdots=f(ru_n)$?

当 $m=1$, $n=3$ 时, Floyd 给出了证明, 当 $m=1$, $u_1, \cdots, u_n$(作为单位向量)互相垂直时, Yamabe-Yujobo 给出了证明. 本文应用 Smith 周期变换的理论, 根据 Stiefel 流形在周期变换下的指数, 在 $n=2$ 时, 给出了 Knaster 问题的证明, 在 n 为 >2 的素数时, 在球面维数较原先假定的 $m+n-2$ 为大, 单位向量 $u_1, \cdots, u_n$ 满足 $u_iu_j=u_{i+1}u_{j+1}$, $i, j\in I_n$ 的情况下, 也给出了 Knaster, B., 问题的证明, 从而推广了古典的 Borsuk-Ulam 定理.

§2. Smith 周期变换

根据本文需要, 我们将扼要的叙述一下 Smith 关于周期变换的理论, 详细情况可参阅[2]或[3].

定义 1 设 X 是 Hausdorff 空间, T 是有限巡回群, 若对于每个 $t\in T$, t 确定 X 到自身的拓朴变换, 而且

1. 对于 $x\in X$, $t_1, t_2\in T$, 有 $t_2(t_1x)=(t_2t_1)x$;
2. 对于 $x\in X$ 以及 T 的单位元素 1, 有 $1x=x$;
3. 对于任 $x\in X$ 以及 $t\neq 1$, 有 $tx\neq x$,

则称 T 为空间 X 的无定点周期变换群.

例 $X=S^n$, t: $S^n\to S^n$, $tx=-x$, 把 x 变为它的对径点, 则 $t^2=1$, $T=\{t, 1\}$ 便是球面 S^n 的周期为 2 的无定点周期变换群.

设 t 是 X 的任一无定点变换, $S(X)=\{C_n(X), \partial_n\}$ 是 X 的奇异链复合形, 于 n 维奇异单纯形 $\sigma_n\in C_n(X)$.

令 $t_\#\sigma_n=t\sigma_n$: $\Delta_n\to X$, 则 $t_\#$ 诱导链变换 $t_\#$: $S(X)\to S(X)$, 与上链变换

$$t^\#: S^*(X)\to S^*(X).$$

本文 1979 年 12 月 14 日 收到.

* 本文是 79 年 8 月作者在科学院数所学听了杨忠道教授的同名讲演后写的.

此处 $S^*(X)=\{C^q(X, G), \delta\}$, $t^\# u\sigma_q=ut_\#\sigma_q$, $u\in C^q(X, G)$. 若 t 是周期为 n 的生成元(即 $t^n=1$, $t^i\neq 1$, $0<i<n$), 令

$$d=1-t,\quad S=1+t+\cdots+t^{n-1},$$

则它们诱导 $d^\#\colon S^*(X)\to S^*(X)$, $S^\#\colon S^*(X)\to S^*(X)$,

显然 $S^\# d^\#=(dS)^\#=0$, $d^\# S^\#=(Sd)^\#=0$.

命题1 若 T 是无定点周期变换,则

$$C^q(X, G)\xrightarrow{d^\#}C^q(X, G)\xrightarrow{S^\#}C^q(X, G)\xrightarrow{d^\#}C^q(X, G),\quad q\geqslant 0$$

是正合序列.

证 根据 d, S 的定义以及无定点变换的性质可以直接推出, 也可以参看 [2] 第二章 §2 命题1或[3]13章引理3.1.

由命题1, 令

$$\begin{aligned}C_d^q(X, G)&=\operatorname{Ker}[d^\#\colon C^q(X, G)\to C^q(X, G)]\\&=\operatorname{Im}[S^\#\colon C^q(X, G)\to C^q(X, G)],\quad q\geqslant 0,\\C_s^q(X, G)&=\operatorname{Ker}[S^\#\colon C^q(X, G)\to C^q(X, G)]\\&=\operatorname{Im}[d^\#\colon C^q(X, G)\to C^q(X, G)],\quad q\geqslant 0,\end{aligned}$$

则 $S_d^*=\{C_d^q(X, G), \delta\}$, $S_s^*=\{C_s^q(X, G), \delta\}$ 均为上链复合形.

令 $i\colon S_\rho^*\to S^*$ 是内射变换, $\lambda_{\bar\rho}\colon S^*\to S_{\bar\rho}^*$, $\lambda_{\bar\rho}u=\rho^\# u$, 其中 $\rho=d$ 时, $\bar\rho=s$, 而 $\rho=s$ 时, $\bar\rho=d$. 由命题1

$$0\longrightarrow S_\rho^*\xrightarrow{i}S^*\xrightarrow{\lambda_{\bar\rho}}S_{\bar\rho}^*\longrightarrow 0$$

是上链复合形的正合序列,从而诱导上同调正合序列

$$H_\rho^0(X, G)\xrightarrow{i^*}H^0(X, G)\xrightarrow{\lambda_{\bar\rho}^*}H_{\bar\rho}^0(X, G)\xrightarrow{\mu^1}H_\rho^1(X, G)\longrightarrow\cdots,\tag{1}$$

今把正合序列(1)中 μ^i 诱导出来的同态

$$\mu_{\rho,k}=\mu^k\cdots\mu^1;\quad H_\rho^0(X, G)\to H_{\rho_k}^k(X, G),$$

称为Smith特殊同态. 显然,当 k 为偶数时, $\rho_k=\rho$, 当 k 为奇数时, $\rho_k=\bar\rho$.

定义2 设 X 是弧连通的Hausdorff空间, 在 X 的每一点取值为 $1\in G$ 的0维上链 1_X 是 d 闭上链,我们称

$$A^k(X, G)=\mu_{d,k}\{1_X\}\in H_{d_k}^k(X, G)$$

为 X 关于周期变换 t 与系数群 G 的特殊上类,而使 $A^k(X, G)=0$ 之最小整数 k,称为Smith特殊指数,记作 $I(X, G)$, 若这样的整数不存在,则称 $I(X, G)=+\infty$.

由定义,当 k 为偶数, $A^k(X, G)\in H_d^k(X,G)$, 当 k 为奇数, $A^k(X,G)\in H_s^k(X, G)$. 若 $I(X, G)=n$, 意即 $A^n(X, G)=0$, 而 $A^{n-1}(X,G)\neq 0$, 当然更有 $A^i(X,G)\neq 0$, $i<n-1$. 一般来说,特殊指数与系数群有关.

对于整数 $p>1$, 令 I_p 是整数 $\bmod p$ 群.

命题2 若 t 是球面 S^k 上周期为 n 的无定点周期变换, 素数 p 整除 n, 则 $I(S^k, I_p)=k+1$.

证 若 $k=0$, 显然 $I(S^0, I_p)=1$, 当 $k>0$ 时, 对于 $H_\rho^r=H_\rho^r(S^k, I_p)$, $H^r=H^r(S^k, I_p)$ 有正合序列

$$H_d^0\to H^0\to H_s^0\to H_d^1\to H^1\to H_s^1\to H_d^2\to\cdots$$
$$\to H^{k-1}\to H_s^{k-1}\to H_d^k\to H^k\to H_s^k\to H_d^{k+1}=0,$$
$$H_s^0\to H^0\to H_d^0\to H_s^1\to H^1\to H_d^1\to H_s^2\to\cdots$$
$$\to H^{k-1}\to H_s^{k-1}\to H_d^k\to H^k\to H_s^k\to H_d^{k+1}=0.$$

设 z^0 是每点取值为 $1\in I_p$ 的闭上链，则 z^0 也是 d 闭上链与 s 闭上链，并且生成 $H^0=H_d^0=H_s^0=I_p$.

$$\lambda_s^*:\ H^0\to H_s^0,\ \lambda_s^*z^0=d^*z^0=0,$$
$$\lambda_d^*:\ H^0\to H_d^0,\ \lambda_d^*z^0=S^*z^0=nz^0=0,\ \bmod p,$$

所以 λ_s^*, λ_d^* 都是 0 同态. 当 $k=1$ 时，有正合序列

$$0\to H_s^0\to H_d^1\to H^1\to H_s^1\to H_d^2=0,$$
$$0\to H_d^0\to H_s^1\to H^1\to H_d^1\to H_s^2=0.$$

由于 $H_s^0=H_d^0=I_p$, 所以 H_d^1, H_s^1 以 I_p 作为子群，由于 $I_p=H^1\to H_s^1\to 0$, $I_p=H^1\to H_d^1\to 0$ 正合，H_s^1, H_d^1 只能是 0 或 I_p(因 p 是素数)，因此 $H_s^1=H_d^1=I_p$, $\mu_{d,1}=\mu^1$: $H_d^0\to H_s^1$ 是同构，$I(S^1, I_p)=2$.

当 $k>1$ 时，$H^1=\cdots=H^{k-1}=0$, 由上述正合序列 $I_p=H_s^0\approx H_d^1\approx\cdots\approx H_{s_{k-1}}^{k-1}$, $I_p=H_d^0\approx H_s^1\approx\cdots\approx H_{d_{k-1}}^{k-1}$, 从而有正合序列

$$0\to H_s^{k-1}(=I_p)\to H_d^k\to H^k\to H_s^k\to H_d^{k+1}=0,$$
$$0\to H_d^{k-1}(=I_p)\to H_s^k\to H^k\to H_d^k\to H_s^{k+1}=0,$$

把当 $k=1$ 时的论证重复一遍，即知 $H_d^k=H_s^k=I_p$, 而 μ^k: $H_s^{k-1}\to H_d^k$, μ^k: $H_d^{k-1}\to H_s^k$ 都是同构，因此 $\mu_{d,k}$: $H_d^0\to H_{d_k}^k$ 是同构，$A^k(S^k, I_p)=\mu_{d,k}z^0\neq 0$, 所以 $I(S^k, I_p)=kH$.

定义 3　设 X, Y 是 Hausdorff 空间，T 是它们上面的无定点周期变换群，f: $X\to Y$ 连续，若对于任意 $t\in T$, $tf=ft$, 则称 f 为关于变换群 T 的协变(equisariant)映射.

对于协变映射 f: $X\to Y$, 显然诱导 $f_\rho^\#$: $S_\rho^*(Y)\to S_\rho^*(X)$, $f^\#$: $S^*(Y)\to S^*(X)$, $f_{\bar\rho}^\#$: $S_{\bar\rho}^*(Y)\to S_{\bar\rho}^*(X)$, 而图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S_\rho^*(Y) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_\rho^\#"'] & S^*(Y) \arrow[r, "\lambda_{\bar\rho}"] \arrow[d, "f^\#"'] & S_{\bar\rho}^*(Y) \arrow[r] \arrow[d, "f_{\bar\rho}^\#"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & S_\rho^*(X) \arrow[r] & S^*(X) \arrow[r] & S_{\bar\rho}^*(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

可交换，从而诱导上同调正合序列的图表也可交换，于是关于 Smith 特殊同态的图表可交换，即

$$\begin{tikzcd} H_d^0(Y, G) \arrow[r, "\mu_{d,k}"] \arrow[d, "f_d^*"'] & H_{d_k}^k(Y, G) \arrow[d, "f_{d_k}^*"] \\ H_d^0(X, G) \arrow[r, "\mu_{d,k}"'] & H_{d_k}^k(X, G) \end{tikzcd}$$

可交换，特别当 X, Y 弧连通，1_Y, 1_X 代表每点取值为 1 的 Y, X 上的 d 闭上链时，因为 $f^\# 1_Y=1_X$, 所以

$$f_{d_k}^*A^k(Y, G)=f_{d_k}^*\mu_{d,k}\{1_Y\}=\mu_{d,k}f_d^*\{1_Y\}=\mu_{d,k}\{1_X\}=A^k(X, G).$$

这样就得到一个重要的结论，即当 $A^k(X, G)\neq 0$ 时，$A^k(Y, G)\neq 0$, 故有

命题 3　设 X, Y 是弧连通 Hausdorff 空间，T 是 X, Y 上无定点周期变换群，

$f: X \to Y$ 是关于 T 的协变映射，则 $I(Y, G) \geqslant I(X, G)$.

换言之，若 $I(Y, G) < I(X, G)$，则任何 X 到 Y 关于 T 协变的映射便不可能存在.

§3. Stiefel 流 形

设 $u_1, \cdots, u_n$ 是 k 维欧氏空间 $R^k(n<k)$ 中 n 个不同的单位向量，SO_k 表示 R^k 上的 k 阶旋转群，即 R^k 上行列式为 1 的正交变换构成的乘法群，于 $r \in SO_k$，$ru_1, \cdots, ru_n$ 又是 R^k 上 n 个不同的单位向量，把这种 n 标架记作 $\langle ru_1, \cdots, ru_n\rangle = r\langle u_1, \cdots, u_n\rangle$，令

$$V'_{k,n}(u_1, \cdots, u_n) = \{r\langle u_1, \cdots, u_n\rangle \mid r \in SO_k\},$$

其拓朴规定为 $R^{k,n} = R^k \times \cdots \times R^k$ 的子拓朴，则它是一个紧致 Hausdorff 空间，而当 $u_1, \cdots, u_n$ 互相垂直时，它就是通常的 Stiefel 流形.

命题 4 R^k 上的 n 标架 $\langle u'_1, \cdots, u'_n\rangle \in V'_{k,n}(u_1, \cdots, u_n)$，当且仅当 $u'_i u'_j = u_i u_j$，$1 \leqslant i, j \leqslant n$，其中 uv 表示向量 u, v 的内积.

证 对于 $\langle ru_1, \cdots, ru_n\rangle \in V'_{k,n}(u_1, \cdots, u_n)$，因为正交变换不改变向量的内积，所以 $ru_i ru_j = u_i u_j$，$1 \leqslant i, j \leqslant n$.

反之，对于单位向量 $u'_1, \cdots, u'_n$，$u'_i u'_j = u_i u_j$，$1 \leqslant i, j \leqslant n$，先假定 $u_1, \cdots, u_n$ 线性无关，这时易知 $u'_1, \cdots, u'_n$ 也是线性无关，作 Gram-Schmidt 正交化

$$G: v_1 = u_1,\ v_2 = \frac{u_2 - (u_2 \cdot v_1) v_1}{|u_2 - (u_2 \cdot v_1) v_1|}, \cdots,$$

$$v_n = \frac{u_n - (u_n \cdot v_1) v_1 - \cdots - (u_n \cdot v_{n-1}) v_{n-1}}{|u_n - (u_n \cdot v_1) v_1 - \cdots - (u_n \cdot v_{n-1}) v_{n-1}|},$$

$$G: v'_1 = u'_1,\ v'_2 = \frac{u'_2 - (u'_2 \cdot v'_1) v'_1}{|u'_2 - (u'_2 \cdot v'_1) v'_1|}, \cdots,$$

$$v'_n = \frac{u'_n - (u'_n \cdot v'_1) v'_1 - \cdots - (u'_n \cdot v'_{n-1}) v'_{n-1}}{|u'_n - (u'_n \cdot v'_1) v'_1 - \cdots - (u'_n \cdot v'_{n-1}) v'_{n-1}|},$$

则

$$G\langle u_1, \cdots, u_n\rangle = \langle v_1, \cdots, v_n\rangle, \quad G\langle u'_1, \cdots, u'_n\rangle = \langle v'_1, \cdots, v'_n\rangle$$

是正交标架，而 G 是可逆变换，但是对于正交向量组 $v_1, \cdots, v_n$ 与 $v'_1, \cdots, v'_n$，易知存在旋转 $r \in SO_k$，(因 $n<k$)，使得

$$\langle v'_1, \cdots, v'_n\rangle = r\langle v_1, \cdots, v_n\rangle,$$

从而

$$\langle v'_1, \cdots, u'_n\rangle = G^{-1}\langle v'_1, \cdots, v'_n\rangle = G^{-1}r\langle v_1, \cdots, v_n\rangle = G^{-1}rG\langle u_1, \cdots, u_n\rangle$$
$$= G^{-1}Gr\langle u_1, \cdots, u_n\rangle = r\langle u_1, \cdots, u_n\rangle.$$

其次，对于 $u_1, \cdots, u_n$ 相关的情形，不妨设

$$u_n = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{n-1} u_{n-1},$$

而 $u_1, \cdots, u_{n-1}$ 线性无关，于是

$$(u'_n - (\lambda_1 u'_1 + \cdots + \lambda_{n-1} u'_{n-1}))^2 = (u_n - (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{n-1} u_{n-1}))^2 = 0,$$

$$u'_n = \lambda_1 u'_1 + \cdots + \lambda_{n-1} u'_{n-1},$$

而 $u'_1, \cdots, u'_{n-1}$ 也是线性无关的，因此与上同理，有 $r \in SO_k$，使得

$$r\langle u_1, \cdots, u_{n-1}\rangle = \langle u'_1, \cdots, u'_{n-1}\rangle,$$

从而

$$ru_n = r(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{n-1} u_{n-1}) = \lambda_1 u'_1 + \cdots + \lambda_{n-1} u'_{n-1} = u'_n,$$

所以 $$r\langle u_1,\ \cdots,\ u_n\rangle=\langle u_1',\ \cdots,\ u_n'\rangle.$$

对于欧氏空间 R^l, $l<k$, 视 $x\in R^l$, $x=(x_1,\ \cdots,\ x_l)$ 为 $x=(x_1,\ \cdots,\ x_l,\ x_{l+1},\ \cdots,\ x_k)$, $x_{l+1}=\cdots=x_k=0$, R^l 就是 R^k 的子空间, 于是有

命题5 若单位向量组 $u_1,\ \cdots,\ u_n\in R^k$ 的秩数为 l, 则必可选择单位向量 $v_1,\ \cdots,\ v_n\in R^l$, 使得 $V'_{k,n}(v_1,\ \cdots,\ v_n)=V'_{k,n}(u_1,\ \cdots,\ u_n)$.

证　因为 $u_1,\ \cdots,\ u_n$ 的秩数是 l, 所以它们属于 R^k 的一个 l 维子空间 L, 在 L 中取单位正交基

$$w_j=(a_{i1},\ \cdots,\ a_{ik})\quad 1\leqslant i\leqslant l,$$

在 L 的正交补子空间中取单位正交基

$$w_i=(a_{j1},\ \cdots,\ a_{jn}),\quad l+1\leqslant j\leqslant k,$$

则适当调整 w_j 的方向, 便有

$$r=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}\end{pmatrix}$$

是旋转矩阵, 而 $ru_i=v_i=(x_{i1},\ \cdots,\ x_{il},\ 0,\ \cdots,\ 0)\in R^l$, $1\leqslant i\leqslant n$, (由于 u_i 与 $w_{l+1},\ \cdots,\ w_k$ 正交), $r\langle u_1,\ \cdots,\ u_n\rangle=\langle v_1,\ \cdots,\ v_n\rangle\in V'_{k,n}(u_1,\ \cdots,\ u_n)$. 反之, $\langle u_1,\ \cdots,\ u_n\rangle=r^{-1}\langle v_1,\ \cdots,\ v_n\rangle\in V'_{k,n}(v_1,\ \cdots,\ v_n)$, 所以 $V'_{k,n}(v_1,\ \cdots,\ v_n)=V'_{k,n}(u_1,\ \cdots,\ u_n)$.

命题6 若单位向量 $u_1,\ \cdots,\ u_n\in R^k$ 的秩数是 l, 则 $V'_{k,n}(u_1,\ \cdots,\ u_n)$ 与 Stiefel 流形 $V_{k,l}$ 同胚.

证　由命题5, 可以选择 $v_1,\ \cdots,\ v_n\in R^l$, 使得 $V'_{k,n}(u_1,\ \cdots,\ u_n)=V'_{k,n}(v_1,\ \cdots,\ v_n)$, 对于 $V'_{k,n}(v_1,\ \cdots,\ v_n)$ 中的两个点 $Q_1=r_1\langle v_1,\ \cdots,\ v_n\rangle$, $Q_2=r_2\langle v_1,\ \cdots,\ v_n\rangle$, 设 $r_1=(a_{ij})$, $r_2=(b_{ij})$, 若它们的前 l 列全等, 即 $a_{ij}=b_{ij}$, $1\leqslant i\leqslant k$, $1\leqslant j\leqslant l$, 则 $Q_1=Q_2$. 反之, 若 $Q_1=Q_2$, 不妨设 $v_1,\ \cdots,\ v_n$ 中线性无关的 l 个向量是 $v_1=(x_{11},\ \cdots,\ x_{l1},\ 0,\ \cdots,\ 0)'$, $\cdots$, $v_l=(x_{1l},\ \cdots,\ x_{ll},\ 0,\ \cdots,\ 0)'$, 则 $r_1\langle v_1,\ \cdots,\ v_n\rangle=r_2\langle v_1,\ \cdots,\ v_n\rangle$ 便有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kl}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1l}\\ \vdots & & \vdots\\ x_{l1} & \cdots & x_{ll}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{k1} & \cdots & b_{kl}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1l}\\ \vdots & & \vdots\\ x_{l1} & \cdots & x_{ll}\end{pmatrix}.$$

因为 $v_1,\ \cdots,\ v_l$ 线性无关, 故矩阵 (x_{ij}) 可逆, 两端乘以 $(x_{ij})^{-1}$, 即知 r_1, r_2 的前 l 列全等, 所以 $V'_{k,n}(v_1,\ \cdots,\ v_n)$ 中的点与旋转矩阵的前 l 列一一对应.

另一方面, Stiefel 流形 $V_{k,l}=\{r\langle e_1,\ \cdots,\ e_l\rangle 1,\ r\in SO_k\}$, 其中 $e_i=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 0,\cdots,\ 0)'$, 所以 $V_{k,l}$ 中的点也由矩阵 r 的前 l 列完全确定. 如此, 如令

$$\varphi\colon V_{k,l}\to V'_{k,l}(v_1,\ \cdots,\ v_n),$$
$$\varphi(r\langle e_1,\ \cdots,\ e_l\rangle)=r\langle v_1,\ \cdots,\ v_n\rangle,$$

便是它们之间的一个同胚.

由命题6, 若互不相同的单位向量 $u_1,\ \cdots,\ u_n\in R^k$ 的秩数为 l, 也记 $V'_{k,n}(u_1,\ \cdots,\ u_n)$ 为 $V_{k,l}(u_1,\ \cdots,\ u_n)$, 它表示 $u_1,\ \cdots,\ u_n\in R^k$, 而向量组的秩数为 l.

设 $u_1,\ \cdots,\ u_n$ 是一组互不相同的单位向量, 我们用 $u_iu_j=u_{i+1}u_{j+1}$, $i,\ j\in I_n$, 表示这些向量的内积相等, 而下标的值按 $\bmod n$ 计算, 例如由此即知 $u_{n-1}u_n=u_nu_1$, $u_nu_2=u_1u_3$ 等等.

这个条件在 $n=2$ 时是平凡的，在 $n=3$ 时，表示向量 u_1, u_2, u_3 的交角相等，等等．在这个条件下，令

$$t(r\langle u_1, \cdots, u_n\rangle)=r\langle u_2, \cdots, u_n, u_1\rangle,$$

则因 $ru_{i+1}ru_{j+1}=u_{i+1}u_{j+1}=u_iu_j$, $i, j\in I_n$, 故由命题 4, $r\langle u_2, \cdots, u_nu_1\rangle\in V_{k,l}(u_1, \cdots, u_n)$, 又因为 $ru_1ru_2=u_1u_2\neq 1$, 所以 $t(r\langle u_1, \cdots, u_n\rangle)\neq r\langle u_1, \cdots, u_n\rangle$, 即

$$t: V_{k,l}(u_1, \cdots, u_n)\to V_{k,l}(u_1, \cdots, u_n).$$

同理 t^i, $0<i<n$ 是无定点变换，而 $t^n=1$, 故 t 是 $V_{k,l}(u_1, \cdots, u_n)$ 上周期为 n 的无定点变换．为计算其指数，由命题 6, 只须计算 Stiefel 流形在周期变换下的指数即可．

由 Borel 的计算[4], Stiefel 流形的上同调：

（一）当 p 是奇素数，$\bar{n}$ 是 $\leqslant n$ 的最大奇数，$\bar{q}$ 是 $\geqslant q$ 的最小奇数时，则 $H^*(V_{n,n-q}, I_p)$ 同构于下列空间的上同调：$S^{2\bar{n}-3}\times\cdots\times S^{2\bar{q}+1}$ 再乘以 S^{n-1}, 当 n 是偶数时，再乘以 S^q, 当 q 是偶数时；

（二）代数 $H^*(V_{n,n-q}, I_2)$ 有生成元简单系 $h_q, h_{q+1}, \cdots, h_{n-1}$, 其中 h_i 的维数是 i.

据此，参照球面的情形，便有

命题 7 若 p 是奇素数，整除 n, 则 Stiefel 流形 $V_{k,l}$ 上周期为 n 的无定点周期变换的指数 $I(V_{k,l}, I_p)$:

1° 当 k 是奇数，l 是偶数时，$I(V_{k,l}, I_p)\geqslant 2(k-l+1)$

2° 当 k 是偶数，l 是奇数，$l\geqslant\dfrac{k}{2}+1$ 时，$I(V_{k,l}, I_p)\geqslant 2(k-l+1)$

3° 当 k 是偶数，l 是奇数，$l\leqslant\dfrac{k}{2}+1$ 时，$I(V_{k,l}, I_p)\geqslant k$.

证　据（一）知，在情形 1°, $H^*(V_{k,l}, I_p)=H^*$ 相当于 $S^{2k-3}\times\cdots\times S^{2(k-l)+1}$ 的上同调，因此 $H^0=I_p$, $H^1=\cdots=H^{2(k-l)}=0$, 由(1)，有正合序列

$$H_d^0\to H^0\to H_s^0\to H_d^1\to H^1\to\cdots\to H^{2(k-l)}\to H_s^{2(k-l)}\to H_d^{2(k-l)+1},$$
$$H_s^0\to H^0\to H_d^0\to H_s^1\to H^1\to\cdots\to H^{2(k-l)}\to H_d^{2(k-l)}\to H_s^{2(k-l)+1},$$

因 $V_{k,l}$ 弧连通，每点取值为 1 的 0 维闭上链 z^0 是 d 闭上链，也是 S 闭上链，而且生成 $H_d^0=H_s^0=H^0=I_p$, 而 λ_s^*: $H^0\to H_s^0$, λ_d^*: $H^0\to H_d^0$ 是 0 同态，因此 $H_d^0\approx H_s^1\approx\cdots\approx H_d^{2(k-l)}$, 又因 $0=H^{2(k-l)}\to H_d^{2(k-l)}\to H_s^{2(k-l)+1}$ 正合，所以 μ: $H_d^{2(k-l)}\to H_s^{2(k-l)+1}$ 是内射，从而 $\mu_{d,2(k-l)+1}$: $H_d^0\to H_s^{2(k-l)+1}$ 是内射，故 $A^{2(k-l)+1}(V_{k,l}, I_p)=\mu_{d,2(k-l)+1}z^0\neq 0$, $I(V_{k,l}, I_p)\geqslant 2(k-l+1)$.

在情形 2°. $H^*(V_{k,l}, I_p)=H^*$ 相当于 $S^{2k-5}\times\cdots\times S^{2(k-l)+1}\times S^{k-1}$ 的上同调，$l\geqslant\dfrac{k}{2}+1$, 就有 $2(k-l)+1\leqslant 2\left(k-\dfrac{k}{2}-1\right)+1=k-1$, 所以 $H^0=I_p$, $H^1=\cdots=H^{2(k-l)}=0$, 与 1° 同理，$I(V_{k,l}, I_p)\geqslant 2(k-l+1)$.

在情形 3°, $H^*(V_{k,l}, I_p)=H^*$ 相当于 $S^{2k-5}\times\cdots\times S^{2(k-l)+1}\times S^{k-1}$ 的上同调，$l\leqslant\dfrac{k}{2}+1$, 所以 $2(k-l)+1\geqslant 2\left(k-\dfrac{k}{2}-1\right)+1=k-1$, 因此 $H^0=I_p$, $H^1=\cdots=H^{k-2}=0$, 与 1° 同理，$\mu_{d,k-1}$: $H_d^0\to H_s^{k-1}$ 是单同态，$A^{k-1}(V_{k,l}, I_p)=\mu_{d,k-1}z^0\neq 0$, $I(V_{k,l}, I_p)\geqslant k$.

命题 8　若 n 是偶数，则 $V_{k,l}$ 上周期为 n 的无定点周期变换的指数 $I(V_{k,l}, I_2)\geqslant k-l+1$.

证　由(二)知 $H^*(V_{k,l}, I_2)$ 有生成元简单系 $h_{k-l}, \cdots, h_{k-1}$，而 h_i 的维数是 i，因此 $H^0=I_2$, $H^1=\cdots=H^{k-l-1}=0$，与命题 7 的证明同理，$I(V_{k,l}, I_2)\geqslant k-l+1$.

§4. 定理与证明

现在我们把单位球面 S^{k-1} 上的点与 R^k 中的单位向量视为等同. 对于

对应的有

$$f\colon S^{k-1}\to R^m,\ u_1, \cdots, u_n\in S^{k-1},$$

$$\tilde{f}\colon V'_{k,n}(u_1, \cdots, u_n)\to R^{mn},$$

$$\tilde{f}(r\langle u_1, \cdots, u_n\rangle)=(f(ru_1), \cdots, f(ru_n)).$$

若没有一个旋转 r，使得

$$f(ru_1)=\cdots=f(ru_n),$$

那末

$$\tilde{f}(V'_{k,n})\subset R^{mn}-\Delta^m_n,\quad \Delta^m_n=\{(x_1, \cdots, x_n)\mid x_i\in R^m,\ x_1=\cdots=x_n\},$$

令

$$\varphi\colon R^{mn}-\Delta^m_n\to\tilde{S}^{(n-1)m-1},$$

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n)=\left(x_1-\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}, \cdots, x_n-\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\times\left(x_1^2+\cdots+x_n^2-\frac{(x_1+\cdots+x_n)^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(y_1, \cdots, y_n),$$

则

$$y_1+\cdots+y_n=0,\quad |y_1|^2+\cdots+|y_n|^2=1.$$

所以 $\tilde{S}^{(n-1)m-1}$ 是 $(n-1)m-1$ 维球面，于是当没有 $f(ru_1)=\cdots=f(ru_n)$ 时，便有

$$\varphi\tilde{f}\colon V'_{k,n}(u_1, \cdots, u_n)\to\tilde{S}^{(n-1)m-1}. \tag{2}$$

定理 1　假设 $f\colon S^{k-1}\to R^m$ 连续，$u_1, \cdots, u_n\in S^{k-1}$ 作为单位向量有 $u_iu_j=u_{i+1}u_{j+1}$, $i, j\in I_n$，则当 $n=2$ 或 3, $k-1=(n-1)m$ 时，存在旋转 r，使得 $f(ru_1)=\cdots=f(ru_n)$.

证　当 $n=2$ 时，设 $S^{m-1}=\{x\mid x\in R^m,\ |x|=1\}$，令

$$\psi\colon S^{m-1}\to V'_{m+1,2}(u_1, u_2)$$

$$\psi(x)=\langle(x, \lambda)(1+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}},\quad(-x, \lambda)(1+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}\rangle=\langle v_1, v_2\rangle,\quad\lambda=\left(\frac{1+u_1u_2}{1-u_1u_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

则因 $v_1v_2=u_1u_2$，所以 $\psi(x)\in V'_{m+1,2}(u_1, u_2)$. 若定理不真，由(2)有

$$g=\varphi\tilde{f}\psi\colon S^{m-1}\to V'_{m+1,2}\to\tilde{S}^{m-1}.$$

令　$t\colon S^{m-1}\to S^{m-1}$, $t(x)=-x$,　$t\colon\tilde{S}^{m-1}\to\tilde{S}^{m-1}$, $t(y_1, y_2)=(y_2, y_1)$,

则 t 是 S^{m-1}, $\tilde{S}^{m-1}$ 上周期为 2 的无定点变换，且 $tg=gt$，即 g 关于 t 协变，因此由[3] 13 章引理 6.6, g 不同伦于 0.

另一方面，令

$$\psi_t\colon S^{m-1}\to V'_{m+1,2}(u_1, u_2),$$

$$\psi_t(x)=\langle(x(1-t)^{\frac{1}{2}}+(1, 0, \cdots, 0)t^{\frac{1}{2}}, \lambda_t)\nu_t,$$

$$(-x(1-t)^{\frac{1}{2}}-(1, 0, \cdots, 0)t^{\frac{1}{2}}, \lambda_t)\nu_t\rangle,$$

$$\lambda_t=\lambda(1+2x_1(1-t)^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}},$$

$$\nu_t=(1+2x_1(1-t)^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}+\lambda_t^2)^{-\frac{1}{2}},\quad x=(x_1,\ \cdots,\ x_n),$$

则 $\psi_0=\psi$, $\psi_1=0$, $g_t=\varphi\tilde{f}\psi_t$: $S^{m-1}\to\tilde{S}^{m-1}$ 是连结 $g=g_0$ 与 $0=g_1$ 之间的同伦，从而 g 同伦于 0, 此为矛盾，故定理为真.

当 $n=3$ 时，置

$$S^{2m-1}=\{(r,\ \theta)=(r_1\cos\theta_1,\ r_1\sin\theta_1,\ \cdots,\ r_m\cos\theta_m,\ r_m\sin\theta_m)\,|\,r_1,\ \cdots,\ r_m\geqslant 0,\ r_1^2+\cdots+r_m^2=1\},$$

令
$$\psi:\ S^{2m-1}\to V'_{2m+1,3}(u_1,\ u_2,\ u_3),$$

$$\psi(r,\ \theta)=\left\langle((r,\ \theta),\ \lambda)(1+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}},\ \left(\left(r,\ \theta+\frac{2\pi}{3}\right),\ \lambda\right)(1+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}},\ \left(\left(r,\ \theta+\frac{4\pi}{3}\right),\ \lambda\right)(1+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}\right\rangle$$

$$=\langle v_1,\ v_2,\ v_3\rangle$$

$$\lambda=\left(\frac{\frac{1}{2}+u_1u_2}{1-u_1u_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

则
$$v_iv_j=u_iu_j,\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant 3.$$

所以 $\psi(r,\ \theta)\in V'_{2m+1,3}(u_1,\ u_2,\ u_3)$, 若定理不真，由(2)有

$$g=\varphi\tilde{f}\psi:\ S^{2m-1}\to V'_{2m+1,3}\to\tilde{S}^{2m-1},$$

令
$$t:\ S^{2m-1}\to S^{2m-1},\quad t(r,\ \theta)=\left(r,\ \theta+\frac{2\pi}{3}\right),$$

则 t, t^2 是 S^{2m-1} 上的无定点变换，$t^3=1$. 令 t: $\tilde{S}^{2m-1}\to\tilde{S}^{2m-1}$, $t(y_1,\ y_2,\ y_3)=(y_2,\ y_3,\ y_1)$, 则 t, t^2 是 $\tilde{S}^{2m-1}$ 上的无定点变换，$t^3=1$, 而 $tg=gt$, 因此据[3] 13 章定理 7.6, g 不同伦于 0.

另一方面，令

$$\psi_t:\ S^{2m-1}\to V'_{2m+1,3}(u_1,\ u_2,\ u_3),$$

$$\psi_t(r,\ \theta)=\left\langle((r,\ \theta)(1-t)^{\frac{1}{2}}+(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)t^{\frac{1}{2}},\ \lambda_t)\nu_t,\right.$$

$$\left(\left(r,\ \theta+\frac{2\pi}{3}\right)(1-t)^{\frac{1}{2}}+\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \cdots,\ 0\right)t^{\frac{1}{2}},\ \lambda_t\right)\nu_t,$$

$$\left.\left(\left(r,\ \theta+\frac{4\pi}{3}\right)(1-t)^{\frac{1}{2}}+\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \cdots,\ 0\right)t^{\frac{1}{2}},\ \lambda_t\right)\nu_t\right\rangle,$$

其中
$$(r,\ \theta)=(x_1,\ \cdots,\ x_{2m}),\quad \lambda_t=(1+2x_1t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\lambda,$$

$$\nu_t=(1+2x_1t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}+\lambda_t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

则 $\psi_0=\psi$, $\psi_1=0$, $g_t=\varphi\tilde{f}\psi_t$ 是连结 $g=g_0$ 与 $0=g_1$ 之间的同伦，即 g 同伦于 0, 此为矛盾，故定理为真.

推论 (Borsuk-Ulam 定理)若 f: $S^m\to R^m$ 连续，则存在 $x\in S^m$, 使得 $f(x)=f(-x)$.

证 在定理 1 中令 $n=2$, $u_2=-u_1$ 即得

定理 2　若 f: $S^{k-1}\to R^m$ 连续，$u_1, \cdots, u_n\in S^{k-1}$ 作为单位向量有 $u_iu_j=u_{i+1}u_{j+1}$, $i, j\in I_n$, n 是奇素数，$u_1, \cdots, u_n$ 的秩数是 l, 则

1° 当 l 是偶数时，

$$k-1=\left[\frac{(n-1)m}{2}\right]+l-2;$$

2° 当 l 是奇数时，

$$l\geqslant\left[\frac{(n-1)m}{2}\right]+1,\quad k-1=\left[\frac{(n-1)m}{2}\right]+l-2;$$

3° 当 l 是奇数时，

$$l<\left[\frac{(n-1)m}{2}\right]+1,\quad k-1=(n-1)m+1$$

存在旋转 r, 使得 $f(ru_1)=\cdots=f(ru_n)$, 其中 $[*]$ 是大于 $*$ 的最小偶数.

证　若定理不真，由(2)有

$$g=\varphi\tilde{f}: V_{k,l}(u_1, \cdots, u_n)\to\tilde{S}^{(n-1)m-1}.$$

令

$$t: V_{k,l}(u_1, \cdots, u_n)\to V_{k,l}(u_1, \cdots, u_n),$$

$$t(r\langle u_1, \cdots, u_n\rangle)=r\langle u_2, \cdots, u_n, u_1\rangle,$$

由于条件 $u_iu_j=u_{i+1}u_{j+1}$, $i, j\in I_n$, $r\langle u_2, \cdots, u_n, u_1\rangle\in V_{k,l}(u_1, \cdots, u_n)$, 由于 $u_1, \cdots, u_n$ 不相同，t^i, $0<i<n$ 是无定点变换，$t^n=1$. 令

$$t: \tilde{S}^{(n-1)m-1}\to\tilde{S}^{(n-1)m-1},$$

$$t(y_1, \cdots, y_n)=(y_2, \cdots, y_n, y_1),$$

由于 n 是素数，t^i, $0<i<n$ 也是无定点变换，$t^n=1$, $tg=gt$, g 关于 t 协变，由命题 2, 3

$$(n-1)m=I(\tilde{S}^{(n-1)m-1}, I_n)\geqslant I(V_{k,l}, I_n).$$

在情形 1°, 由命题 7

$$I(V_{k,l}, I_n)\geqslant 2(k-l+1)>2\left(\frac{(n-1)m}{2}+l-1-l+1\right)=(n-1)m,$$

此为矛盾.

在情形 2°

$$l\geqslant\left[\frac{(n-1)m}{2}\right]+1,\quad k-1=\left[\frac{(n-1)m}{2}\right]+l-2,$$

所以

$$l\geqslant\left[\frac{(n-1)m}{2}\right]+1=k-l+2,$$

即

$$l\geqslant\frac{k}{2}+1,$$

由命题 7, 2°

$$I(V_{k,l}, I_n)\geqslant 2(k-l+1)>2\left(\frac{(n-1)m}{2}+l-1-l+1\right)=(n-1)m,$$

亦为矛盾.

在情形 3°

$$l<\left[\frac{(n-1)m}{2}\right]+1,\quad k-1=(n-1)m+1,$$

所以

$$l\leqslant\frac{(n-1)m}{2}+2=\frac{k}{2}+1,$$

由命题 7, 3°. $I(V_{k,l}, I_n) \geqslant (n-1)m+2$, 亦为矛盾.

由此说明在三种情形定理均告成立.

注　在 $n=3$ 的情形, 定理 1 大部分被定理 2 所包括, 定理 2 在 $n=3$, $l=2$ (即 u_1, u_2, u_3 为平面向量) m 为奇数时, $k-1=\left[\frac{(n-1)m}{2}\right]+l-2=m+1=m+n-2$, 故附合 Knaster 问题之要求.

参 考 文 献

[1] Yang, C. T., Continuous functions from spheres to Euclidean spaces, *Ann. of Math.* **62** (1955), 284—292.

[2] 吴文俊, 可剖形在欧氏空间的实现问题, 科学出版社, (1978).

[3] Bourgin, D. G., Moden algebraic topology, (1963).

[4] Borel, A., Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènues de groupes de Lie Compacts, *Ann. of Math.*, **57** (1953), 115—207.

CONTINUOUS MAPPING FROM SPHERES TO EUCLIDEAN SPACES

HE BAIHE

(*Institute of Mathematics, Jilin Universtity*)

ABSTRACT

In the forties Knaster, B., posed the following problem: Gieven a continuous mapping f of an $(m+n-2)$——sphere S^{m+n-2} into the Euclidean m——space R^m and n distinct points $u_1, \cdots, u_n$ of S^{m+n-2}; does there exist a rotation r such that $f(ru_1)=\cdots=f(ru_n)$? In this paper, the index under periodic transfromation of Stiefel manifold is applied to prove the following theorem:

Given a continuous mapping f: $S^{k-1}\to R^m$, n distinct points $u_1, \cdots, u_n \in S^{k-1}$, viewed as unit vectors satisfying $u_iu_j=u_{i+1}u_{j+1}$, $i, j \in I_n$, and suppose $u_1, \cdots, u_n$ have rank l, then in each of the following cases, there is a rotation r such that $f(ru_1)=\cdots=f(ru_n)$:

1. $n=2, 3$, $k-1=(n-1)m$;

2. n is an odd prime number, l even, $k-1=\left[\frac{(n-1)m}{2}\right]+l-2$;

3. n is an odd prime number, l odd, $l \geqslant \left[\frac{(n-1)m}{2}\right]+1$, $k-1=\left[\frac{(n-1)m}{2}\right]+l-2$;

4. n is an odd prime number, l odd, $l < \left[\frac{(n-1)m}{2}\right]+1$, $k-1=(n-1)m+1$,

where $[*]$ is the least even number $> *$.

This theorem generalizes the classical Borsuk-Ulam theorem.