数 学 年 刊
2 (2) 1981

论广义的 Канторович, Л. В. 多项式及其渐近行为

曹 家 鼎
(复旦大学)

§1. 引　　言

1962 年匈牙利著名数学家 Freud, G. 来中国讲学，作者提了一个关于非周期连续函数用线性正算子来逼近的问题，Freud, G. 说："这是他长期研究的方向。"作者解决了这个问题，研究了涉及到点 x 在给定闭区间上的位置的逼近，得到了 Freud, G. 所期待的结果[1,2]．本文发展了文[1]中的方法，研究非周期连续函数用线性正算子或线性算子来逼近，通过精巧的计算，证明了一个有趣的等式(定理 2)，定理 2 给出了函数类 W^2[3] 在 C 空间中用线性正算子来逼近的偏差的精确值．

非周期函数在 L^p 空间中的逼近是逼近论中一个重要而又困难的问题，这方面研究结果很少，例如见 M. K. Потапов[4]．Л. В. Канторович 多项式是 L^p 空间中的一个很好的逼近工具[5]，本文推广这个多项式，并通过精巧的计算，证明了二个有趣的等式(定理 6 及定理 7)，定理 7 给出了函数类 W^2L 在 L 空间中用广义的 Л. В. Канторович 多项式来逼近的偏差的精确值．定理 10 给出了 $W^2L^p(1<p<\infty)$ 在 L^p 空间中用广义的 Канторович, Л. В. 多项式来逼近的偏差的估值．

§2. 非周期连续函数在 C 空间中用线性算子来逼近

设 $f(t)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则记作 $f(t)\in C[a, b]$．设 $|f(t)|^p(1\leqslant p<\infty)$ 在 $[a, b]$ 上是勒贝格可积的，则记作 $f(t)\in L^p[a, b]$，及 $\|f\|_p=\left\{\int_a^b|f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$，我们约定 $L^\infty[a, b]\overset{\text{def}}{=\!=\!=}C[a, b]$，且 $\|f\|_\infty=\|f\|_{C[a, b]}=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|$．设 k 是自然数，设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，若 $f^{(k-1)}(t)$ 在 $[a, b]$ 上绝对连续且 $f^{(k)}(t)\in L^p[a, b]$，则记作 $f\in L_k^p[a, b]$，$L_k^1[a, b]$ 简记为 $L_k[a, b]$．

函数类 $W^kL^p=\{f: f\in L_k^p[a, b]$ 且 $\|f^{(k)}\|_p\leqslant 1\}$．

简记 $W^kL^\infty=W^k$．设函数类 $W\subset L^p[a, b]$，U_n 是映 $W\Rightarrow L^p[a, b]$ 的一列线性算子，按照 Колмогоров, A. H.[3] 定义 $\mathscr{E}_n(W, U_n)_{L^p}\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\sup\limits_{f\in W}\|U_n(f)-f\|_p$，并研究其渐近行

本文 1979 年 12 月 26 日收到.

为. 若 $W\subset C[a,\ b]$, 定义 $\mathscr{E}_n(W,\ U_n,\ x)\overset{\text{def}}{=\!=}\sup\limits_{f\in W}|U_n(f,x)-f(x)|$, 显见 $\mathscr{E}_n(W,\ U_n)_{L^\infty}=\max\limits_{a\le x\le b}\mathscr{E}_n(W,\ U_n;x)$.

引理1　设 $f(t)\in L_2[a,\ b]$, 则成立等式

$$f(t)=\frac{1}{2}\int_a^b f''(z)|t-z|dz+\left[\frac{f'(a)+f'(b)}{2}\right]t+\frac{1}{2}[f(a)+f(b)-bf'(b)-af'(a)]. \tag{2.1}$$

证　设 $f(t)\in L_2[a,\ b]$, 则

$$\begin{aligned}\int_a^b f''(z)|t-z|dz&=\int_a^t f''(z)(t-z)dz+\int_t^b f''(z)(z-t)dz\\&=f'(z)(t-z)\Big|_a^t+\int_a^t f'(z)dz+f'(z)(z-t)\Big|_t^b-\int_t^b f'(z)dz\\&=2f(t)-(f'(a)+f'(b))t+af'(a)+bf'(b)-f(a)-f(b),\end{aligned}$$

所以(2.1)成立.　　证毕.

当 $[a,\ b]=[0,\ 1]$, $f(t)\in L_2^\infty[a,\ b]$ 时(2.1)即 Бернштейн С. Н., 的等式[6].

引理2　设 $f(t)\in L_1[a,\ b]$, 则成立等式

$$f(t)=\frac{1}{2}\int_a^b f'(z)\operatorname{sgn}(t-z)dz+\frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{2.2}$$

这儿 $\operatorname{sgn} t$ 是 t 的符号函数.

证　$\displaystyle\int_a^b f'(z)\operatorname{sgn}(t-z)dz=\int_a^t f'(z)dz-\int_t^b f'(z)dz$

$$=f(t)-f(a)-f(b)+f(t)=2f(t)-f(a)-f(b),$$

所以(2.2)成立.　　证毕.

定理1　设 A_n 是一列 $C[a,\ b]\Rightarrow C[a,\ b]$ 的线性连续算子, 设 $A_n(1,\ x)=1$, 则当 $f\in L_2[a,\ b]$ 时有

$$A_n(f(t),\ x)-f(x)-f'(x)\cdot(A_n(t,\ x)-x)=\frac{1}{2}\int_a^b f''(z)D_n(x,\ z)dz, \tag{2.3}$$

这儿

$$D_n(x,\ z)\overset{\text{def}}{=\!=}A_n(|t-z|,\ x)-|x-z|-(A_n(t,\ x)-x)\cdot\operatorname{sgn}(x-z), \tag{2.4}$$

此外

$$\mathscr{E}_n(W^2;\ x)\overset{\text{def}}{=\!=}\sup_{f\in W^2}|A_n(f(t),\ x)-f(x)-f'(x)\cdot(A_n(t,\ x)-x)|=\frac{1}{2}\int_a^b|D_n(x,\ z)|dz. \tag{2.5}$$

证　因为 $A_n(f)$ 是线性连续算子, 所以固定一点 $x\in[a,\ b]$, $A_n(f(t),\ x)$ 是 $C[a,\ b]$ 上的线性连续泛函, 当 $f(t)\in L_2[a,\ b]$ 时由等式(2.1)知

$$A_n(f(t),\ x)=\frac{1}{2}\int_a^b f''(z)A_n(|t-z|,\ x)dz+\frac{[f'(a)+f'(b)]}{2}A_n(t,\ x)+\frac{1}{2}[f(a)+f(b)-bf'(b)-af'(a)]A_n(1,\ x), \tag{2.6}$$

因为 $A_n(1,\ x)=1$, 从引理1知

$$A_n(f(t),\ x)-f(x)=\frac{1}{2}\int_a^b f''(z)[A_n(|t-z|,\ x)-|x-z|]dz$$
$$+\left[\frac{f'(a)+f'(b)}{2}\right]\cdot[A_n(t,\ x)-x], \tag{2.7}$$

用引理2知

$$f'(x)=\frac{1}{2}\int_a^b f''(z)\operatorname{sgn}(x-z)dz+\frac{[f'(a)+f'(b)]}{2}, \tag{2.8}$$

从而

$$f'(x)\cdot(A_n(t,\ x)-x=\frac{1}{2}\int_a^b f''(z)(A_n(t,\ x)-x)\operatorname{sgn}(x-z)dz$$
$$+\frac{1}{2}(A_n(t,\ x)-x)(f'(a)+f'(b)), \tag{2.9}$$

综合上述二式

$$A_n(f(t),\ x)-f(x)-f'(x)\cdot(A_n(t,\ x)-x)$$
$$=\frac{1}{2}\int_a^b f''(z)[A_n(|t-z|,\ x)-|x-z|-(A_n(t,\ x)-x)\operatorname{sgn}(x-z)]dz \tag{2.10}$$
$$=\frac{1}{2}\int_a^b f''(z)D_n(x,\ z)dz, \tag{2.11}$$

所以

$$\mathscr{E}_n(W^2;\ x)=\sup_{f\in W^2}|A_n(f(t),\ x)-f(x)-f'(x)\cdot(A_n(t,\ x)-x)|$$
$$=\frac{1}{2}\int_a^b|D_n(x,\ z)|dz. \tag{2.12}$$

证毕.

§3. 非周期连续函数在 C 空间中用线性正算子来逼近

定理2 设 A_n 是一列 $C[a,\ b]\Rightarrow C[a,\ b]$ 的线性正算子, 设 $A_n(1,\ x)=1$, 则当 $x\in[a,\ b]$ 和 $z\in[a,\ b]$ 时有

$$D_n(x,\ z)\geqslant 0, \tag{3.1}$$

此外

$$\mathscr{E}_n(W^2;\ x)=\frac{1}{2}A_n((t-x)^2,\ x). \tag{3.2}$$

证　设 H 是 $C[a,\ b]\Rightarrow C[a,\ b]$ 的线性正算子, $g(t)\in C[a,\ b]$, 从 $-\|g(t)\|_\infty\leqslant g(t)\leqslant\|g(t)\|_\infty$ 知

$$-\|g\|_\infty\cdot H(1,\ x)=H(-\|g\|_\infty,\ x)\leqslant H(g(t),\ x)\leqslant H(\|g\|_\infty,\ x)$$
$$=H(1,\ x)\cdot\|g\|_\infty,$$
$$\|H(g(t),\ x)\|_\infty\leqslant\|H(1,\ x)\|_\infty\cdot\|g\|_\infty,$$

H 是线性连续算子, 所以从定理假设知对 A_n 有(2.3)成立. 当 $x=z$ 时 $\operatorname{sgn}(x-z)=0$, 所以

$$D_n(x,\ x)=A_n(|t-x|,\ x)\geqslant 0. \tag{3.3}$$

当 $x>z$ 时 $\operatorname{sgn}(x-z)=1$, 因 $A_n(1,\ x)=1$, 所以

$$D_n(x,\ z)=A_n(|z-t|+z-t,\ x)=2A_n(\max(z-t,\ 0),\ x)\geqslant 0. \tag{3.4}$$

当 $x<z$ 时 $\operatorname{sgn}(x-z)=-1$, 因 $A_n(1, x)=1$, 所以

$$D_n(x, z)=A_n(|t-z|+t-z, x)=2A_n(\max(t-z, 0), x)\geqslant 0, \tag{3.5}$$

从定理1知

$$\mathscr{E}_n(W^2; x)=\frac{1}{2}\int_a^b |D_n(x, z)|dz=\frac{1}{2}\int_a^b D_n(x, z)dz, \tag{3.6}$$

在(2.3)中, 令 $f(t)=t^2$ 得到

$$A_n(t^2, x)-x^2-2x\cdot(A_n(t, x)-x)=\int_a^b D_n(x, z)dz, \tag{3.7}$$

而

$$A_n((t-x)^2, x)=A_n(t^2, x)-2x\cdot A_n(t, x)+x^2 \tag{3.8}$$

$$=A_n(t^2, x)-x^2-2x\cdot(A_n(t, x)-x) \tag{3.9}$$

$$=\int_a^b D_n(x, z)dz, \tag{3.10}$$

从(3.6), (3.10)知

$$\mathscr{E}_n(W^2; x)=\frac{1}{2}A_n((t-x)^2, x).$$

证毕.

定理3 设 A_n 是一列 $C[a, b]\Rightarrow C[a, b]$ 的线性正算子, 设 $A_n(1, x)=1$ 及 $A_n(t, x)=x$, 则

$$\mathscr{E}_n(W^2; x)=\sup_{f\in W^2}|A_n(f(t), x)-f(x)|=\frac{1}{2}(A_n(t^2, x)-x^2).$$

证 因 $A_n(1, x)=1$ 及 $A_n(t, x)=x$, 从(3.9)知

$$A_n((t-x)^2, x)=A_n(t^2, x)-x^2,$$

从定理2得到定理3.

证毕.

§4. Бернштейн, С. Н. 多项式的迭合

设 $F(u)\in C(0, 1]$, Бернштейн, С. Н. 多项式[7, 8]为

$$B_n(F, x)=\sum_{\nu=0}^{n}F\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}, \tag{4.1}$$

我们研究 Бернштейн, С. Н. 多项式的迭合(参见 Micchelli,[9] C. C.): 设 $B_n^{[1]}(F)=B_n(F)$, $B_n^{[k+1]}(F)=B_n(B_n^{[k]}(F))$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$.

定理4 设 k 是自然数, 对 $B_n^{[k]}(F, x)$ 有

$$B_n^{[k]}(t^2, x)\equiv x^2+a_n^{(k)}x(1-x), \tag{4.2}$$

这儿 $a_n^{(k)}=1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^k$ 它具有性质:

① $a_n^{(k)}$ 对 n 严格单调下降;

② $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a_n^{(k)}=k$;

③ $a_n^{(k)}-\dfrac{k}{n}=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

证 用数学归纳法, 首先[8]

$$B_n^{[1]}(t^2,\ x)\equiv x^2+\frac{x(1-x)}{n}\equiv x^2+a_n^{(1)}x(1-x),$$

设(4.2)对自然数 k 成立，则

$$B_n^{[k+1]}(t^2,\ x)\equiv B_n(B_n^{[k]}(t^2,\ u),\ x) \tag{4.3}$$

$$\equiv B_n(u^2+a_n^{(k)}u(1-u),\ x) \tag{4.4}$$

$$\equiv B_n(u^2,\ x)+a_n^{(k)}\cdot B_n(u,\ x)-a_n^{(k)}\cdot B_n(u^2,\ x)$$

$$\equiv x^2+\frac{x(1-x)}{n}+a_n^{(k)}x-a_n^{(k)}\left[x^2+\frac{x(1-x)}{n}\right]$$

$$\equiv x^2+x(1-x)\left[\frac{1}{n}+a_n^{(k)}-\frac{a_n^{(k)}}{n}\right]$$

$$\equiv x^2+x(1-x)\left[\frac{1}{n}+\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\equiv x^2+\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1}\right)x(1-x)$$

$$\equiv x^2+a_n^{(k+1)}x(1-x), \tag{4.5}$$

所以(4.2)成立，显然 $a_n^{(k)}$ 对 n 严格单调减少，用 Hospital, L'. 法则知

$$\lim_{x\to+0}\frac{1-(1-x)^k}{x}=\lim_{x\to+0}k\cdot(1-x)^{k-1}=k,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}n\cdot a_n^{(k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k}{\frac{1}{n}}=k.$$

此外
$$a_k^{(k)}=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=1-\left(1-\frac{k}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{k}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

证毕。

下面诸数 $M_i(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 都是绝对常数。

定理 5　设 k 是自然数，对 $B_n^{[k]}(F,\ x)$ 有

$$\mathscr{E}_n(W^2;\ x)=\sup_{F\in W^2}|B_n^{[k]}(F,\ x)-F(x)|=\frac{1}{2}a_n^{(k)}x(1-x) \tag{4.6}$$

及

$$\mathscr{E}_n(W^2)_c=\frac{1}{8}a_n^{(k)}. \tag{4.7}$$

此外对 $F\in C(0,\ 1]$ 有

$$|B_n^{[k]}(F,\ x)-F(x)|\leqslant M_1\cdot\omega_2\left(F,\ \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}}\right),\quad x\in[0,\ 1], \tag{4.8}$$

这儿

$$\omega_2(F,\ \delta)=\sup_{\substack{0\leqslant h\leqslant\delta\\ 0\leqslant x\pm h\leqslant 1}}|F(x+h)+F(x-h)-2F(x)|. \tag{4.9}$$

证　用数学归纳法容易证明 ($k=1$ 时见[8])

$$B_n^{[k]}(1,\ x)\equiv 1,\quad B_n^{[k]}(t,\ x)\equiv x \tag{4.10}$$

及对 $F\in C[0,\ 1]$ 有

$$B_n^{[k]}(F,\ 0)=F(0),\quad B_n^{[k]}(F,\ 1)=F(1), \tag{4.11}$$

因为 $B_n^{[k]}(F)$ 是线性正算子，用定理 3 及定理 4 知

$$\mathscr{E}_n(W^2;x)=\sup_{F\in W^2}|B_n^{[k]}(F,x)-F(x)|$$

$$=\frac{1}{2}[B_n^{[k]}(t^2,x)-x^2]=\frac{1}{2}a_n^{(k)}x(1-x), \tag{4.12}$$

及

$$\mathscr{E}_n(W^2)_c=\frac{1}{2}a_n^{(k)}\cdot\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\{x(1-x)\}=\frac{1}{8}a_n^{(k)}. \tag{4.13}$$

用定理 4 性质 2 知

$$\mathscr{E}_n(W^2;x)=\frac{1}{2}\cdot a_n^{(k)}x(1-x)\leqslant M_2\cdot\frac{k}{n}\cdot x(1-x). \tag{4.14}$$

从文[1]知对 $0<x<1$ 有(4.8)成立，从(4.11)知对 $0\leqslant x\leqslant 1$ 有(4.8)成立.

(4.8)在 $k=1$ 时见文[1]. (4.8)是 Devore, R. A. 书中[10](42 页)结果的推广.

§5. 广义的 Канторович, Л. В. 多项式

设 H_n 是次数不超过 n 的代数多项式全体，B_n 是 $C[a,b]\Rightarrow H_n$ 的一列线性算子. 设

$$f(t)\in L[a,b],\quad F(u)=\int_a^u f(t)dt,$$

作出

$$A_n(f(t),x)=\frac{d}{dx}B_{n+1}(F(u),x),$$

再设 B_n 满足条件

$$B_n(1,x)\equiv 1, \tag{5.1}$$

$$B_n(t,x)\equiv x \tag{5.2}$$

及满足端点条件：对 $g(u)\in C[a,b]$ 有

$$B_n(g(u),a)=g(a)\quad 及\quad B_n(g(u),b)=g(b), \tag{5.3}$$

则称 $A_n(f)$ 为广义的 Канторович, Л. В. 多项式. 特别设 $B_n(F)$ 有形式(4.1)，此时(5.1)(5.2)(5.3)满足(参见 § 4)，对应的 $A_n(f)=P_n(f)$[5]，$P_n(f)$ 是 Канторович, Л. В. 多项式. 此外[5]

$$P_n(f(t),x)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}\cdot(n+1)\cdot\int_{\frac{\nu}{n+1}}^{\frac{\nu+1}{n+1}}f(t)dt. \tag{5.4}$$

定理 6 设广义的 Канторович, Л. В. 多项式 $A_n(f(t),x)$ 是一列线性正算子，设

$$R_n(z)_L=\frac{1}{2}\int_a^b|D_n(x,z)|dx,$$

则

$$R_n(z)_L=\frac{1}{2}[B_{n+1}(u^2,z)-z^2). \tag{5.5}$$

证 从条件(5.1)，(5.2)知

$$A_n(1,x)\equiv\frac{d}{dx}B_{n+1}(u-a,x)\equiv\frac{d}{dx}B_{n+1}(u,x)-a\cdot\frac{d}{dx}B_{n+1}(1,x)\equiv\frac{dx}{dx}\equiv 1. \tag{5.6}$$

因为 A_n 是线性正算子，用定理 2 知

$$D_n(x, z) \geqslant 0, \tag{5.7}$$

所以

$$R_n(z)_L = \frac{1}{2}\int_a^b |D_n(x, z)|\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b D_n(x, z)\,dx, \tag{5.8}$$

设

$$I = \int_a^b D_n(x, z)\,dx = \int_a^z D_n(x, z)\,dx + \int_z^b D_n(x, z)\,dx = I_1 + I_2, \tag{5.9}$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^z [A_n(|t-z|, x) - (z-x) + A_n(t, x) - x]\,dx \\ &= \int_a^z [A_n(|t-z|, x) + A_n(t, x) - z\cdot A_n(1, x)]\,dx \\ &= \int_a^z [A_n(|t-z| + t - z, x)]\,dx \\ &= 2\cdot\int_a^z A_n(\max(t-z, 0), x)\,dx, \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_z^b [A_n(|t-z|, x) - (x-z) - (A_n(t, x) - x)]\,dx \\ &= \int_z^b [A_n(|t-z|, x) + z\cdot A_n(1, x) - A_n(t, x)]\,dx \\ &= \int_z^b [A_n(|z-t| + z - t, x)]\,dx \\ &= 2\cdot\int_z^b A_n(\max(z-t, 0), x)\,dx, \end{aligned} \tag{5.11}$$

因为

$$\max(t-z, 0) = t - z + \max(z-t, 0), \tag{5.12}$$

所以

$$\begin{aligned} I &= 2\cdot\int_a^z A_n(\max(t-z, 0), x)\,dx + 2\cdot\int_z^b A_n(\max(z-t, 0), x)\,dx \\ &= 2\cdot\int_a^z A_n(\max(z-t, 0), x)\,dx + 2\cdot\int_z^b A_n(\max(z-t, 0), x)\,dx \\ &\quad + 2\cdot\int_a^z A_n(t-z, x)\,dx \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$= 2\cdot\int_a^b A_n(\max(z-t, 0), x)\,dx + 2\cdot\int_a^z A_n(t, x)\,dx - 2z\cdot\int_a^z A_n(1, x)\,dx, \tag{5.14}$$

从(5.6)知

$$\int_a^z A_n(1, x)\,dx = \int_a^z dx = z - a. \tag{5.15}$$

因为
$$A_n(t, x) = \frac{d}{dx}B_{n+1}\left(\int_a^u t\,dt, x\right) = \frac{d}{dx}B_{n+1}\left(\frac{u^2-a^2}{2}, x\right),$$

此外用端点条件(5.3)知

$$B_{n+1}\left(\frac{u^2-a^2}{2}, a\right) = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} 2\cdot\int_a^z A_n(t, x)\,dx &= 2\cdot\left[B_{n+1}\left(\frac{u^2-a^2}{2}, z\right) - B_{n+1}\left(\frac{u^2-a^2}{2}, a\right)\right] \\ &= B_{n+1}(u^2-a^2, z) = B_{n+1}(u^2, z) - a^2\cdot B_{n+1}(1, z) \\ &= B_{n+1}(u^2, z) - a^2, \end{aligned} \tag{5.16}$$

因为

$$A_n(\max(z-t,\ 0),\ x)=\frac{d}{dx}B_{n+1}\left[\int_a^u \max(z-t,\ 0)dt,\ x\right], \tag{5.17}$$

用端点条件(5.3)知

$$\begin{aligned}&\int_a^b A_n(\max(z-t,\ 0),\ x)dx\\&=B_{n+1}\left[\int_a^u \max(z-t,\ 0)dt,\ b\right]-B_{n+1}\left[\int_a^u \max(z-t,\ 0)dt,\ a\right]\\&=\int_a^b \max(z-t,\ 0)dt\\&=\frac{z^2}{2}-az+\frac{a^2}{2}.\end{aligned} \tag{5.18}$$

结合(5.14),(5.15),(5.16),(5.18)得到

$$\begin{aligned}I&=2\cdot\left(\frac{z^2}{2}-az+\frac{a^2}{2}\right)+B_{n+1}(u^2,\ z)-a^2-2z\cdot(z-a)\\&=z^2-2az+a^2+B_{n+1}(u^2,\ z)-a^2-2z^2+2az\\&=B_{n+1}(u^2,\ z)-z^2,\end{aligned} \tag{5.19}$$

所以

$$R_n(z)_L=\frac{1}{2}[B_{n+1}(u^2,\ z)-z^2].$$

证毕.

§6. 函数类 W^2L 在 L 空间中用广义的 Канторович, Л. В. 多项式来逼近

引理 3　设 $K(x,\ t)$ 在 $\left[\begin{matrix}a\leqslant t\leqslant b\\ a\leqslant x\leqslant b\end{matrix}\right]$ 上二元可测,设给出积分算子 $H(f=H\varphi)$

$$f(x)=\int_a^b K(x,\ t)\varphi(t)dt, \tag{6.1}$$

则 H 是 $L[a,\ b]\Rightarrow L[a,\ b]$ 的线性有界算子的充要条件是

$$D=\operatorname*{Vraisup}_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b |K(x,\ t)|dx<+\infty, \tag{6.2}$$

且算子模

$$\|H\|_{L\to L}=\sup_{\|\varphi\|_{L[a,b]}\leqslant 1}\|H\varphi\|_{L[a,\ b]}=D. \tag{6.3}$$

这个引理的证明参见书[11](中译本、下册.第八章, §3, 3.16).

定理 7　设广义的 Канторович, Л. В. 多项式 $A_n(f(t),\ x)$ 是一列线性正算子,则

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_n(W^2L)_L&\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\sup_{f\in W^2L}\int_a^b |A_n(f(t),\ x)-f(x)-f'(x)(A_n(t,\ x)-x)|dx\\&=\frac{1}{2}\|B_{n+1}(u^2,\ z)-z^2\|_{C[a,\ b]}.\end{aligned} \tag{6.4}$$

证　设 $f\in L_2[a,\ b]$,令 $\varphi(z)=f''(z)$,则 $\varphi(z)\in L[a,\ b]$,从(5.6)知 $A_n(1,\ x)\equiv 1$,因为线性正算子 $A_n(f)$ 一定是线性连续算子(参见定理 2 的证明),用定理 1 的(2.3)知

$$
\begin{aligned}
&A_n(f(t),\ x)-f(x)-f'(x)\cdot(A_n(t,\ x)-x)\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b f''(z)D_n(x,\ z)dz\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b \varphi(z)D_n(x,\ z)dz
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

用引理 3 知

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_n(W^2L)_L&=\frac{1}{2}\sup_{\|\varphi\|_L\le 1}\int_a^b\left|\int_a^b\varphi(z)D_n(x,\ z)dz\right|dx\\
&=\frac{1}{2}\operatorname*{Vraisup}_{a\le z\le b}\int_a^b|D_n(x,\ z)|dx.
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

因为广义的 Канторович, Л. В. 多项式 $A_n(f(t),\ x)$是一列线性正算子,用定理 6 知

$$\frac{1}{2}\int_a^b|D_n(x,\ z)|dx=\frac{1}{2}[B_{n+1}(u^2,\ z)-z^2]\geqslant 0,$$

所以

$$\frac{1}{2}\operatorname*{Vraisup}_{a\le z\le b}\int_a^b|D_n(x,\ z)|dx=\frac{1}{2}\operatorname*{Vraisup}_{a\le z\le b}|B_{n+1}(u^2,\ z)-z^2| \tag{6.7}$$

$$=\frac{1}{2}\|B_{n+1}(u^2,\ z)-z^2\|_{C[a,\ b]}. \tag{6.8}$$

证毕.

设 k 是自然数, $f(t)\in L[0,\ 1]$, 定义

$$P_n^{[k]}(f(t),\ x)=\frac{d}{dx}B_{n+1}^{[k]}\left(\int_0^u f(t)dt,\ x\right). \tag{6.9}$$

定理 8 设 k 是自然数,则 $P_n^{[k]}(f)$ 是 $P_n(f)$ 的 k 次迭合: 即

$$P_n^{[1]}(f)=P_n(f),\quad P_n^{[k+1]}(f)=P_n(P_n^{[k]}(f))\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots). \tag{6.10}$$

证　显见 $P_n^{[1]}(f)=P_n(f)$, 从 $P_n^{[k]}(f(t),\ x)$的定义及(4.11)知

$$
\begin{aligned}
\int_0^x P_n^{[k]}(f(t),\ x)dx&=B_{n+1}^{[k]}\left(\int_0^u f(t)dt,\ x\right)-B_{n+1}^{[k]}\left(\int_0^u f(t)dt,\ 0\right)\\
&=B_{n+1}^{[k]}\left(\int_0^u f(t)dt,\ x\right).
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
P_n^{[k+1]}(f(t),\ x)&=\frac{d}{dx}B_{n+1}^{[k+1]}\left(\int_0^u f(t)dt,\ x\right)=\frac{d}{dx}B_{n+1}\left[B_{n+1}^{[k]}\left(\int_0^u f(t)dt,\ v\right),\ x\right]\\
&=\frac{d}{dx}B_{n+1}\left[\int_0^v P_n^{[k]}(f(t),\ v)dv,\ x\right]\\
&=P_n(P_n^{[k]}(f(t),\ v),\ x)=P_n(P_n^{[k]}(f)).
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

证毕.

定理 9 设 k 是自然数,对 $P_n^{[k]}(f,\ x)$ 有

$$\mathscr{E}_n(W^2L)_L\overset{\text{def}}{=\!=}\sup_{f\in W^2L}\int_0^1\left|P_n^{[k]}(f(t),\ x)-f(x)-f'(x)\cdot\frac{a_{n+1}^{(k)}}{2}(1-2x)\right|dx=\frac{1}{8}a_{n+1}^{(k)}. \tag{6.13}$$

证　从 $P_n^{[k]}(f)$ 的定义及(4.10),(4.11)知 $P_n^{[k]}(f)$是广义的 Л. В. Канторович 多项式,从(5.4)知 $P_n(f)$是线性正算子,从定理 8 知 $P_n^{[k]}(f)$是线性正算子. 此外用定理 4 知

$$B_{n+1}^{[k]}(u^2,\ z)-z^2=a_{n+1}^{(k)}z(1-z) \tag{6.14}$$

及

$$P_n^{[k]}(t,\ x)=\frac{d}{dx}\ B_{n+1}^{[k]}\left(\frac{t^2}{2},\ x\right)=\frac{1}{2}\ \frac{d}{dx}[x^2+a_{n+1}^{(k)}(x-x^2)]$$
$$=x+\frac{a_{n+1}^{(k)}}{2}(1-2x), \tag{6.15}$$

用定理7知

$$\mathscr{E}_n(W^2L)_L=\sup_{f\in W^2L}\int_0^1|P_n^{[k]}(f(t),\ x)-f(x)-f'(x)\cdot(P_n^{[k]}(t,\ x)-x)|dx$$
$$=\sup_{f\in W^2L}\int_0^1\left|P_n^{[k]}(f(t),\ x)-f(x)-f'(x)\frac{a_{n+1}^{(k)}}{2}\cdot(1-2x)\right|dx$$
$$=\frac{1}{2}\max_{0\leqslant z\leqslant 1}|B_{n+1}(u^2,\ z)-z^2|=\frac{a_{n+1}^{(k)}}{2}\cdot\max_{0\leqslant z\leqslant 1}|z(1-z)|=\frac{a_{n+1}^{(k)}}{8} \tag{6.16}$$

证毕.

§7. 函数类 $W^2L^p(1<p<\infty)$ 在 L^p 空间中用广义的 Канторович, Л. В. 多项式来逼近

设 H 是 $L^p[a,\ b]\Rightarrow L^p[a,\ b]$ 的线性有界算子，用 $\|H\|_{L^p\to L^p}$ 记其算子模.

引理4 设 $K(x,\ t)$ 在 $\begin{bmatrix} a\leqslant x\leqslant b \\ a\leqslant t\leqslant b\end{bmatrix}$ 上二元可测，设给出积分算子

$$H(f=H\varphi):\ f(x)=\int_a^b K(x,\ t)\varphi(t)dt, \tag{7.1}$$

如

$$\operatorname*{Vraisup}_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^b|K(x,\ t)|dt=M, \tag{7.2}$$

$$\operatorname*{Vraisup}_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b|K(x,\ t)|dx=N, \tag{7.3}$$

则 H 是 $L^p[a,\ b]\Rightarrow L^p[a,\ b]\ (1\leqslant p<\infty)$ 的线性算子，且算子模

$$\|H\|_{L^p\to L^p}\leqslant M^{1-\frac{1}{p}}\cdot N^{\frac{1}{p}}. \tag{7.4}$$

证 引理4在情况 $p=1$ 时参见引理3, 引理4是 Riesz, M.-Thorin, G. 凸性定理的特殊情况(参见书[12], 卷 II, 95 页, 或参见 Крейн, С. Г. 的书[13], 54 页). 证毕.

定理10 设广义的 Канторович, Л. В. 多项式 $A_n(f(t),\ x)$ 是一列线性正算子，令

$$g_n=\frac{1}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}A_n((t-x)^2,\ x), \tag{7.5}$$

$$h_n=\frac{1}{2}\max_{a\leqslant z\leqslant b}[B_{n+1}(u^2,\ z)-z^2], \tag{7.6}$$

设 $1<p<\infty$, 则

$$\mathscr{E}_n(W^2L^p)_{L^p}\overset{\text{def}}{=\!=}\sup_{f\in W^2L^p}\|A_n(f(t),\ x)-f(x)-f'(x)\cdot(A_n(t,\ x)-x)\|_p$$
$$\leqslant g_n^{1-\frac{1}{p}}\cdot h_n^{\frac{1}{p}}. \tag{7.7}$$

证 从(5.6)知 $A_n(1,\ x)\equiv 1$, 设 $f(z)\in L_2[a,\ b]$, 令 $\varphi(z)=f''(z)$, 则 $\varphi(z)\in L[a,b]$, 因为线性正算子 $A_n(f)$ 一定是线性连续算子，从(2.3)知

$$A_n(f(t),\ x)-f(x)-f'(x)\cdot(A_n(t,\ x)-x)=\frac{1}{2}\int_a^b\varphi(z)D_n(x,\ z)dz, \tag{7.8}$$

因 A_n 是线性正算子，从定理 2 的证明知

$$\frac{1}{2}\max_{a\le x\le b}\int_a^b|D_n(x,\ z)|dz=\frac{1}{2}\max_{a\le x\le b}A_n((t-x)^2,\ x)=g_n, \tag{7.9}$$

从定理 6 知

$$\frac{1}{2}\max_{a\le z\le b}\int_a^b|D_n(x,\ z)|dx=\frac{1}{2}\max_{a\le z\le b}[B_{n+1}(u^2,\ z)-z^2]=h_n, \tag{7.10}$$

从(7.8)及引理 4 知

$$\mathscr{E}_n(W^2L^p)_{L^p}=\sup_{\|\varphi\|_p\le 1}\left\{\int_a^b|A_n(f(t),\ x)-f(x)-f'(x)\cdot(A_n(t,\ x)-x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\le g_n^{1-\frac{1}{p}}\cdot h_n^{\frac{1}{p}}. \tag{7.11}$$

证毕.

定理 11　对 Канторович, Л. В. 多项式 $P_n(f,\ x)$ 有

$$\mathscr{E}_n(W^2;\ x)=\frac{1}{2}P_n((t-x)^2,\ x)=\frac{n-1}{2(n+1)^2}x(1-x)+\frac{1}{6}\frac{1}{(n+1)^2}, \tag{7.12}$$

$$\mathscr{E}_n(W^2)_c=\frac{3n+1}{24(n+1)^2}. \tag{7.13}$$

证　从(5.4)知

$$P_n((t-x)^2,\ x)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}\cdot(n+1)\cdot\int_{\frac{\nu}{n+1}}^{\frac{\nu+1}{n+1}}(t^2-2tx+x^2)dt \tag{7.14}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n}\left[\frac{\nu^2}{(n+1)^2}+\frac{\nu}{(n+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}\right]\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}$$
$$-2x\cdot\sum_{\nu=0}^{n}\left[\frac{\nu}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)}\right]\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}$$
$$+x^2\cdot\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}, \tag{7.11}$$

利用等式[8]

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}\equiv 1,\quad \sum_{\nu=0}^{n}\frac{\nu}{n}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}\equiv x, \tag{7.16}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\nu^2}{n^2}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}\equiv x^2+\frac{x(1-x)}{n}, \tag{7.17}$$

我们得到

$$P_n((t-x)^2,\ x)=\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\left[x^2+\frac{x(1-x)}{n}\right]+\frac{n}{(n+1)^2}\cdot x$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}-2x^2\cdot\frac{n}{n+1}-\frac{x}{n+1}+x^2$$
$$=\left[\frac{n^2}{(n+1)^2}-\frac{2n}{n+1}+1\right]x^2+\left[\frac{n}{(n+1)^2}-\frac{1}{n+1}\right]x$$
$$+\frac{n}{(n+1)^2}x(1-x)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$=\frac{n-1}{(n+1)^2}x(1-x)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}. \tag{7.18}$$

从(5.4)知 $P_n(f, x)$ 是线性正算子及 $P_n(1, x)\equiv 1$, 用定理2知

$$\mathscr{E}_n(W^2; x)=\frac{1}{2}P_n((t-x)^2, x)=\frac{n-1}{2(n+1)^2}x(1-x)+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}, \tag{7.19}$$

因为 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{x(1-x)\}=\frac{1}{4}$, 所以

$$\mathscr{E}_n(W^2)_c=\frac{1}{2}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}P_n((t-x)^2, x)=\frac{n-1}{8(n+1)^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{3n+1}{24(n+1)^2}.$$

证毕.

附注1 显见

$$\mathscr{E}_n(W^2; x)=\frac{x(1-x)}{2(n+1)}+O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right). \tag{7.20}$$

$$\mathscr{E}_n(W^2)_c=\frac{1}{8(n+1)}-\frac{1}{12(n+1)^2}=\frac{1}{8(n+1)}+O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right). \tag{7.21}$$

定理12 设 $1<p<\infty$, 对 Канторович, Л. В. 多项式 $P_n(f(t), x)$ 有

$$\mathscr{E}_n(W^2L^p)_{L^p}<\frac{1}{8(n+1)}. \tag{7.22}$$

证 从定理11知

$$g_n=\frac{1}{2}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}P_n((t-x)^2, x)=\frac{3n+1}{24(n+1)^2},$$

从定理4知

$$h_n=\frac{1}{2}\max_{0\leqslant z\leqslant 1}[B_{n+1}(u^2, z)-z^2]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\max_{0\leqslant z\leqslant 1}\{z(1-z)\}=\frac{1}{8(n+1)}.$$

而 $\frac{3n+1}{24(n+1)^2}<\frac{1}{8(n+1)}$, 用定理10知对 $1<p<\infty$ 有

$$\mathscr{E}_n(W^2L^p)_{L^p}\leqslant\left(\frac{3n+1}{24(n+1)^2}\right)^{1-\frac{1}{p}}\cdot\left(\frac{1}{8(n+1)}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{7.23}$$

$$<\frac{1}{8(n+1)}. \tag{7.24}$$

证毕.

附记 Berens, H. 和 Devore, R. 1978 年研究了 $f\in L^p[a, b]$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 用线性正算子 $L_n(f)$ 逼近的阶, 设

$$\lambda_n=\max(\|L_n(1)-1\|_p,\ \|L_n(t)-x\|_p,\ \|L_n(t^2)-x^2\|_p),$$

他们用 λ_n 来估计 $\|L_n(f)-f\|_p$ 的阶, 而本文 (3.2), (6.4) 式给出了逼近偏差的精确值。本文摘要发表在科学通报, **25**: 9(1980), 430.

参 考 文 献

[1] 曹家鼎，关于线性逼近方法，复旦大学学报(自然科学)，**9**:1 (1964)，43—52，(II)，**10**:1 (1965)，19—32 (Ржмат (1966)，3б 152).

[2] Freud, G., On approximation by positive linear methods, I and II, *Studia Sci. Math. Hung.*, **2** (1967), 63—66, **3** (1968), 365—370.

[3] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, Москва, 1960.

[4] Потапов, М. К., Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, сборник статей, Москва, 1961.

[5] Lorentz, G. G., Bernstein polynomials, Toronto, 1953.

[6] Бернштейн, С. Н., Об интерполирование, Собрание сочи нений, Т1, стр 5—7.

[7] Натансон, И. П., 函数构造论，科学出版社，1965.

[8] Коровкин, П. П., 线性算子与逼近论，高等教育出版社，1960.

[9] Micchelli, C. C., The saturation class and iterates of the Bernstein polynomials, *Journal of Approximation Theory*, **8** (1973), 1—18.

[10] Devore, R. A., The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators, Springer-Verlag, 1972.

[11] Канторович, Л. В., Вулих, Б. З., Пинскер, А. Г., 半序空间泛函分析，高等教育出版社，1958—1959.

[12] Zygmund, A., Trigonometric Series, Cambridge 1959.

[13] Крейн, С. Г. Функциональный анализ, Справочная Математическая Библиотека, Москва, 1964.

[14] Berens, H., Devore, R., Quantitative Korovkin theorems for positive linear operators on L_p spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **245** (1978), 349—361.

ON THE GENERALIZED POLYNOMIALS OF L. V. KANTOROVITCH AND THEIR ASYMPTOTIC BEHAVIORS

CAO JIADING
(*Fudan University*)

ABSTRACT

In this article we generalize the polynomials of Kantorovitch $P_n(f)$. Let B_n be a sequence of linear operators from $C[a, b]$ into H_n, if $f(t)\in L[a, b]$, $F(u)=\int_a^u f(t)dt$, $A_n(f(t), x)=\frac{d}{dx}B_{n+1}(F(u), x)$, here B_n satisfy (a): $B_n(1, x)\equiv 1$, $B_n(u, x)\equiv x$, and (b): for $g(u)\in C[a, b]$ we have $B_n(g(u), a)=g(a)$, $B_n(g(u), b)=g(b)$, we call such $A_n(f)$ generalized polynomials of Kantorovitch (denoted by $A_n(f)\in K$). Let

$$\mathscr{E}_n(W^2;\ x)\xlongequal{\text{def}}\sup_{f\in W^2}|A_n(f(t),\ x)-f(x)-f'(x)\cdot(A_n(t,x)-x)|,$$

$$\mathscr{E}_n(W^2L^p)_{L^p}\xlongequal{\text{def}}\sup_{f\in W^2L^p}\|A_n(f(t),\ x)-f(x)-f'(x)\cdot(A_n(t,\ x)-x)\|_p.$$

We have proved the following results:

Let A_n be a sequence of linear continuous operators of type $C[a, b]\Rightarrow C[a, b]$, $D_n(x, z)\xlongequal{\text{def}}A_n(|t-z|, x)-|x-z|-(A_n(t, x)-x)\cdot\operatorname{Sgn}(x-z)$, $A_n(1, x)=1$, then ①: $\mathscr{E}_n(W^2: x)=\frac{1}{2}\int_a^b|D_n(x, z)|dz$, ②: Moreover, if A_n be a sequence of linear positive operators, then for $\begin{bmatrix} a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant z\leqslant b\end{bmatrix}$ we have $D_n(x, z)\geqslant 0$, and $\mathscr{E}_n(W^2; x)=\frac{1}{2}A_n((t-x)^2, x)$.

Let $A_n(f)\in K$ be a sequence of linear positive operators

$$R_n(z)_L=\frac{1}{2}\int_a^b|D_n(x,\ z)|dx,$$

then $R_n(z)_L=\frac{1}{2}[B_{n+1}(u^2, z)-z^2]$ and $\mathscr{E}_n(W^2L)_L=\frac{1}{2}\|B_{n+1}(u^2, z)-z^2\|_c$,

let $g_n=\frac{1}{2}\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}A_n(t-x)^2, x)$, $h_n=\frac{1}{2}\max\limits_{a\leqslant z\leqslant b}[B_{n+1}(u^2, z)-z^2]$,

then $\mathscr{E}_n(W^2L^p)_{L^p}\leqslant g_n^{1-\frac{1}{p}}\cdot h_n^{\frac{1}{p}}\quad(1<p<\infty)$.