数学年刊
2 (2) 1981

关于半鞅随机微分方程解的存在性和唯一性

聂赞坎
(西北大学)

(一) 预备、半鞅分解

这节简述本文所需有关半鞅分解的结果.

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ 是完备概率空间, $\mathscr{F}$ 的子 σ-域族 $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 满足通常条件(单调上升, 右连续, $\mathscr{F}_0$ 包含 $\mathscr{F}$ 的全体零测集). $\mathscr{M}$, $\mathscr{O}$, $\mathscr{P}$ 分别表示循序可测 σ-域, 可选 σ-域, 可料 σ-域.

(1) 设 M 是一维半鞅, 按其跳可定义取非负整数值的随机测度 $\widetilde{P}(\omega, \cdot)$,

$$\widetilde{P}(\omega, B\times\Gamma)\triangleq\sum_{S} I_{(S,\Delta M_s(\omega)\in B\times\Gamma)},\quad B\in\mathscr{B}_{[0,\infty[},\ \Gamma\in\mathscr{B}(R_0)$$

$$\widetilde{P}(\omega, [0, t]\times R_0)=\int_0^t\int_{R_0}\widetilde{P}(\omega, ds, du),$$

其中, $\mathscr{B}_{[0,\infty[}$ 是半直线 $[0, \infty[$ 上的 Borel 域, $R_0=R^1\setminus\{0\}$, O 是原点, $\mathscr{B}(R_0)$ 是 R_0 上 Borel 域.

根据[3, 4]存在随机测度 $\lambda(\omega, \cdot)$ 是 $\widetilde{P}(\omega, \cdot)$ 的可料对偶投影, 使得 $\widetilde{P}-\lambda$ 是局部平方可积鞅测度, 而且除了某个 $\mathbf{P}$ 不足道集外, 对一切 (ω, t) 有

$$0\leqslant\lambda(\omega, \{t\}\times R_0)\leqslant 1.$$

令 $\quad J=\{(\omega, t): \lambda(\omega, \{t\}\times R_0)>0\},\quad J^c=\Omega\times[0, \infty[\setminus J;$

J, J^c 都是可料集.

(2) 约定

$$\varphi\cdot\mu_r^t=\int_r^t\int_{R_0}\varphi(\omega, s, u)\mu(ds, du),\quad 0\leqslant r\leqslant t<\infty,$$

$$f\cdot m_t^r=\int_r^t f(s)\,dm_s,$$

$$\varphi\cdot\mu_t=\varphi\cdot\mu_0^t,\quad f\cdot m_t=f\cdot m_0^t,\quad f\cdot m_0=0.$$

若 $\varphi\in\mathscr{M}\times\mathscr{B}(R_0)$, 积分 $\varphi\cdot\widetilde{P}_t$ 被理解为和 $\sum\limits_{0<s\leqslant t}\varphi(s, \Delta M_s)I_{|\Delta M_s|\neq 0}$, 只要由此和确定的过程在区间 $[0, t]\,(t<\infty)$ 上是 a, s 有限变差.

(3) 由[3, 4]知, 若 $\varphi\in\mathscr{P}\times\mathscr{B}(R_0)$, 且使得过程 $\beta_t(\varphi)\in\mathscr{J}_{\mathrm{loc}}$(局部可积变差过程全体)

本文1979年12月31日收到, 1980年5月15日修改.
本文写作过程中得到中国科学院数学研究所严加安同志的指导和帮助, 致谢.

$$\beta_t(\varphi)\triangleq\varphi^2 I_{J^c}\cdot\lambda_t+\sum_{s\leq t}I_J(s)\left[\int_{R_0}\varphi^2\lambda(\{s\},du)-\left(\int_{R_0}\varphi\lambda(\{s\},du)\right)^2\right]$$

那么，$\varphi\cdot(\widetilde{P}-\lambda)_t$ 被定义，而且具有性质：

（i） $\varphi\cdot(\widetilde{P}-\lambda)\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{2,d}$（纯断局部平方可积鞅空间），

(ii) $\Delta_t\varphi\cdot(\widetilde{P}-\lambda)=\varphi(t,\Delta M_t)I_{\Delta M_t\neq0}-\int_{R_0}\varphi(t,u)\lambda(\{t\},du)$

$$=\int_{R_0}\varphi(t,u)(\widetilde{P}-\lambda)(\{t\},du),$$

(iii) $\langle\varphi\cdot(\widetilde{P}-\lambda)\rangle_t=\beta_t(\varphi)$,

$\langle\varphi\cdot(\widetilde{P}-\lambda)\rangle$ 是与 $\varphi\cdot(\widetilde{P}-\lambda)$ 相联系的可料增过程.

我们再引入过程

$$\Pi_t(\varphi)\triangleq\sum_{s\leq t}\left[\int_{R_0}\varphi(s,u)\widetilde{P}(\{s\},du)-\int_{R_0}\varphi(s,u)\lambda(\{s\},du)\right]^2$$

可以证明，若 $\Pi_t(\varphi)\in\mathscr{J}_{\mathrm{loc}}$，那么 $\Pi_t(\varphi)$ 的可料对偶投影等于 $\beta_t(\varphi)\in\mathscr{J}_{\mathrm{loc}}$，从而可定义 $\varphi\cdot(\widetilde{P}-\lambda)$，而且 $\Pi_t(\varphi)$ 是与 $\varphi\cdot(\widetilde{P}-\lambda)$ 相联系的二次变差增过程，即

$$\Pi_t(\varphi)=[\varphi\cdot(\widetilde{P}-\lambda),\ \varphi\cdot(\widetilde{P}-\lambda)].$$

必须指出，利用[1]（二）第九章的方法可以证明，只要 $\sqrt{\Pi_t(\varphi)}\in\mathscr{J}_{\mathrm{loc}}$，就可以定义 $\varphi\cdot(\widetilde{P}-\lambda)\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$（零初值局部鞅空间），而且上面等式成立.

(4) 根据[2]定理1，若 M 是取值于 R^d（我们取 $d=1$）的半鞅，那么存在过程 $a\in\mathscr{P}\cap\mathscr{J}_{\mathrm{loc}}$ 和 $m\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{2,c}$（轨道连续局部平方可积鞅空间）使得

$$M=a+m+U\cdot(\widetilde{P}-\lambda)+V\cdot\widetilde{P},$$

其中
$$U=uI_{|u|\leq1},\quad V=uI_{|u|>1},$$

显然，这种分解是唯一的.

下面再说明几个记号.

$\mathscr{X}$：轨道右连续左极限存在（简称右连左极）适应过程全体.

$\mathscr{S}^p$：$\{x:\ x\in\mathscr{O},\ \|x^*\|_{L^p}<\infty,\ x^*=\sup\limits_{t\geq0}|x_t|\}$.

在 $\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$ 中赋以范数 $\|x\|_{S^p}\triangleq\|x^*\|_{L^p}$，则 $\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$ 是 Banach 空间 $(1\leq p\leq\infty)$.

$$\mathscr{H}^p:\ \{M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}},\ \|M\|_{H^p}<\infty\}\quad 1\leq p<\infty$$

其中
$$\|M\|_{H^p}\triangleq(E(\sqrt{[M,M]_\infty})^p)^{\frac{1}{p}}=\|[M,M]_\infty^{1/2}\|_{L^p}.$$

（二） 随机微分方程

我们将研究如下随机微分方程解的存在唯一性.

$$x_t=\Phi(x)_t+\int_0^t f(x)_s da_s+\int_0^t g(x)_s dm_s+\int_0^t\int_{|u|\leq1}h(x,u,s)(\widetilde{P}-\lambda)(ds,du)$$
$$+\int_0^t\int_{|u|>1}k(x,u,s)\widetilde{P}(ds,du) \tag{1}$$

由于以 $I_{|u|\leq1}h(x,u,s)$，$I_{|u|>1}k(x,u,s)$ 分别取代 $h(x,u,s)$，$k(x,u,s)$ 不影响(1)中的积分值，不妨假设

$$h(x,\ u,\ s)=I_{|u|\leqslant 1}h(x,\ u,\ s);$$
$$k(x,\ u,\ s)=I_{|u|>1}k(x,\ u,\ s);$$

从而可将方程(1)写成

$$x=\Phi(x)+f(x)\cdot a+g(x)\cdot m+h(x)\cdot(\widetilde{P}-\lambda)+k(x)\cdot\widetilde{P} \tag{1}$$

方程(1)中各种符号说明如下:

1. $a,\ m,\ \widetilde{P},\ \widetilde{P}-\lambda$ 是半鞅 M 分解式中的过程和随机测度.

2. $\Phi(x)$ 是由 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{X}$ 的映象, 满足:

(i) $\forall x\in\mathscr{X}$, $\forall$ 停时 T,

$$\Phi(x)I_{[[0,T[[}=\Phi(x^{T-})I_{[[0,T[[},$$

(ii) $\forall x,\ y\in\mathscr{X}$,

$$\|\Phi(x)-\Phi(y)\|_{S^p}\leqslant\beta\|x-y\|_{S^p}\quad(0\leqslant\beta<1)$$

满足(i), (ii)的映象 Φ 全体记为 $\mathscr{C}^p(\beta)$.

3. 映象 $f(x,\ t,\ \omega)$, $g(x,\ t,\ \omega)$, $h(x,\ u,\ t,\ \omega)$, $k(x,\ u,\ t,\omega)$(有时把它们写成 $f(x)$, $g(x)$, $h(x,\ u)$或 $f(x)_s$ 等等)满足下面各条件.

(L_0) (i) $\forall x\in\mathscr{X}$; $f(x)$, $f(x)\in\mathscr{P}$

(ii) $\forall x\in\mathscr{X}$; $h(x,\ \cdot,\ \cdot)$是在 $R_0\times[0,\ \infty[\times\Omega$ 上定义, 而限于$(R_0\cap(|u|\leqslant 1))\times[0,\infty[\times\Omega$ 上是 $\mathscr{B}(R_0\cap(|u|\leqslant 1))\times\mathscr{P}$ 可测的, 简记为

$$h(x,\ \cdot,\ \cdot)\in\mathscr{B}(R_0\cap(|u|\leqslant 1))\times\mathscr{P}$$

(iii) 类似于(ii)理解如下记号

$$\forall x\in\mathscr{X},\ k(x,\ \cdot,\ \cdot)\in\mathscr{B}(R_0\cap(|u|>1))\times\Pi$$

(iv) $\forall x\in\mathscr{X}$, $\forall$ 停时 T,

$$f(x)I_{]]0,T]]}=f(x^{T-})I_{]]0,T]]}$$

$g(x)$, $h(x,\ u)$, $k(x,\ u)$具有同样性质.

(L_1) 存在 $1\leqslant p<\infty$ 和适应增过程 A 使得 $\forall x,\ y\in\mathscr{X}$, $\forall$ 停时 $S\leqslant T$ 有,

(i) $\left\|\int_S^{T-}|f(x)-f(y)|\,|da|\right\|_{L^p}\leqslant\|A_{T-}-A_S\|_{L^\infty}\|x-y\|_{S^p}$,

(ii) $\left\|\sqrt{\int_S^T(g(x)-g(y))^2d\langle m\rangle}\right\|_{L^p}\leqslant\|\sqrt{A_{T-}-A_S}\|_{L^\infty}\|x-y\|_{S^p}$,

(iii) $\left\|\sqrt{\int_S^{T-}d\Pi_t(h(x)-h(y))}\right\|_{L^p}\leqslant\|\sqrt{A_{T-}-A_S}\|_{L^\infty}\|x-y\|_{S^p}$,

(L_2) (i) $|f_0|\cdot|a|_t<\infty$, $g_0^2\cdot\langle m\rangle_t<\infty$, $\Pi_t(h_0)<\infty$, $\forall t<\infty$, a. s.

(ii) $\forall x\in\mathscr{X}$, $\sqrt{\Pi_t(h(x))}\in\mathscr{J}_{\mathrm{loc}}$.

其中, $f_0=f(0)$, $g_0=g(0)$, $h_0=h(0)$.

定义 1 满足上述条件的映象 $f,\ g,\ h,\ k$ 称为满足条件 $\mathscr{L}_M^p(A)$, 记为 $f,\ g,\ h,\ k\in\mathscr{L}_M^p(A)$.

定义 2 称 $f,\ g,\ h,\ k$ 满足条件 $\mathscr{L}_M^{p,\varepsilon}(A)$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$, 若$(L_2)$被下面条件代替.

$(L_2)^0$ (i) $|f_0|\cdot|a|_\infty\leqslant\varepsilon$, $g_0^2\cdot\langle m\rangle_\infty\leqslant\varepsilon^2$, $\Pi_\infty(h_0)\leqslant\varepsilon^2$;

(ii) $\forall x\in\mathscr{X}$, $\sqrt{\Pi_t(h(x))}\in\mathscr{J}_{\mathrm{loc}}$;

(iii) $\|A_\infty\|_{L^\infty}\leqslant\varepsilon,\ A_\infty\triangleq A_{\infty-}$.

易知，若$h(x,u,s,\omega)$，$k(x,u,s,\omega)$满足(L_0)，那么固定$x\in\mathscr{X}$，$h(x,\Delta M_s,s,\omega)\in\mathscr{O}$，$k(x,\Delta M_s,s,\omega)\in\mathscr{P}$；

在叙述本文主要定理之前，先证几个引理.

引理1 设$f,g,h,k\in\mathscr{L}^p_M(A)$，那么$\forall x\in\mathscr{X}$，方程(1)中所有积分有定义.

证 1° 令：$T_n=\inf\{t:\ |x_t|\geqslant n\}$，

$$S_n=\inf\{t:\ |f_0|\cdot|a|_t\geqslant n\text{ 或 }A_t\geqslant n\}$$

显然，$S_n\wedge T_n\uparrow\infty$，$\|x^{T_n-}\|_{S^p}\leqslant n$，$\|A_{S_n-}\|_{L^\infty}\leqslant n$ 所以

$$E\int_0^{(S_n\wedge T_n)-}|f(x)|\cdot|da|\leqslant E\int_0^{S_n-}|f_0|\cdot|da|+E\int_0^{(S_n\wedge T_n)}I_{]]0,T_n]]}|f(x^{T_n-}_u)-f(0)|\cdot|da|$$

$$\leqslant n+E\int_0^{S_n-}|f(x^{T_n-})-f(0)|\cdot|da|$$

$$\leqslant n+\|A_{S_n-}\|_{L^\infty}\|x^{T_n-}\|_{S^p}\leqslant n+n^2<\infty$$

故$f\cdot a$有定义.

2° 类似于1°可以证明，$\forall x\in\mathscr{X}$，$\sqrt{f(x)^2\cdot\langle m\rangle_t}\in\mathscr{J}_{\text{loc}}$，故可定义$g(x)\cdot m\in\mathscr{M}^2_{\text{loc}}$.

3° 由$\sqrt{\Pi_t(h(x))}\in\mathscr{J}_{\text{loc}}$直接得到$h(x)\cdot(\widetilde{P}-\lambda)$存在

4° $k\cdot\widetilde{P}$存在是显然的. 证毕.

引理2 设M是半鞅，$\Phi\in\mathscr{C}^p(\beta)$，$\Phi(0)\in\mathscr{S}^p$；$f,g,h\in\mathscr{L}^{p,\varepsilon}_M(A)$；$1\leqslant p<\infty$，$0<\varepsilon<1$，$\beta+\varepsilon+2c_p\sqrt{\varepsilon}<1$；$c_p$是Davis-Burkholder不等式中的常数，那么方程

$$x=\Phi(x)+f(x)\cdot a+g(x)\cdot m+h(x)\cdot(\widetilde{P}-\lambda)\tag{2}$$

在$\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$中存在唯一解.

证 在$\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$中引入算子$W$

$$W(x)\triangleq\Phi(x)+f(x)\cdot a+g(x)\cdot m+h(x)\cdot(\widetilde{P}-\lambda)$$

往证，(a) $\|W(x)\|_{S^p}<\infty$，

(b) $\|W(x)-W(y)\|_{S^p}\leqslant\alpha\|x-y\|_{S^p}$，$0<\alpha<1$.

因为
$$\|f_0\cdot a\|_{S^p}\leqslant\left\|\int_0^\infty|f_0|\cdot|da|\right\|_{L^p}\leqslant\varepsilon.$$

根据Davis-Burkholder不等式和条件$(L_2)^0$有

$$\|g_0\cdot m\|_{S^p}\leqslant c_p\|g_0\cdot m\|_{H^p}=c_p\left\|\sqrt{\int_0^\infty g_0^2d\langle m\rangle}\right\|_{L^p}\leqslant c_p\varepsilon,$$

$$\|h_0\cdot(\widetilde{P}-\lambda)\|_{S^p}\leqslant c_p\|h_0\cdot(\widetilde{P}-\lambda)\|_{H^p}=c_p\|\sqrt{\Pi_\infty(h_0)}\|_{L^p}\leqslant c_p\varepsilon,$$

所以
$$\|W(0)\|_{S^p}\leqslant\|\Phi(0)\|_{S^p}+(1+2c_p)\varepsilon<\infty.$$

从而，若(b)成立，则有

$$\|W(x)\|_{S^p}\leqslant\|W(0)\|_{S^p}+\alpha\|x\|_{S^p}<\infty.$$

往证(b)，由条件(L_1)，$(L_2)^0$和Davis-Burkholder不等式得

$$\|(f(x)-f(y))\cdot a\|_{S^p}\leqslant\left\|\int_0^\infty|f(x)-f(y)|\cdot|da|\right\|_{L^p}$$

$$\leqslant\|A_{\infty-}\|_{L^\infty}\|x-y\|_{S^p}\leqslant\varepsilon\|x-y\|_{S^p},$$

$$\|(g(x)-g(y))\cdot m\|_{S^p}\leqslant c_p\|g(x)-g(y))\cdot m\|_{H^p}$$
$$=c_p\left\|\sqrt{\int_0^\infty (g(x)-g(y))^2 d\langle m\rangle}\right\|_{L^p}$$
$$\leqslant c_p\|\sqrt{A_{\infty-}}\|_{L^\infty}\|x-y\|_{S^p}\leqslant\sqrt{\varepsilon}\,c_p\|x-y\|_{S^p},$$
$$\|(h(x)-h(y))\cdot(\widetilde{P}-\lambda)\|_{S^p}\leqslant c_p\|(h(x)-h(y))\cdot(\widetilde{P}-\lambda)\|_{H^p}$$
$$=c_p\|\sqrt{\Pi_\infty(h(x)-h(y))}\|_{L^p}\leqslant c_p\sqrt{\varepsilon}\,\|x-y\|_{S^p},$$
$$\|W(x)-W(y)\|_{S^p}\leqslant(\beta+\varepsilon+2\sqrt{\varepsilon}\,c_p)\|x-y\|_{S^p}\triangleq\alpha\|x-y\|_{S^p}.$$

$W(x)$是把$\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$映入$\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$的压缩算子，根据不动点原理存在唯一的$x\in\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$使：$x=W(x)$，即方程(2)在$\mathscr{S}^p\cap\mathscr{X}$中存在唯一解.　　证毕.

为简化符号，我们把方程(2)表成

$$x=\Phi(x)+I(a,\ m,\ \widetilde{P}-\lambda,\ x),\tag{2)'}$$

其中　$I(a,\ m,\ \widetilde{P}-\lambda;\ x)\triangleq f(x)\cdot a+g(x)\cdot m+h(x)\cdot(\widetilde{P}-\lambda)$.

因为在我们的讨论过程中映象$f,\ g,\ h$保持不变，故在上述记号中被省去.

易知：$\forall$ 停时T有

$$I(a^T,\ m^T,\ (\widetilde{P}-\lambda)^T;\ x^T)=I(a,\ m,\ \widetilde{P}-\lambda;\ x)^T=I(a,\ m,\ \widetilde{P}-\lambda;\ x^{T-})^T,$$
$$I(a^{T-},\ m^{T-},\ (\widetilde{P}-\lambda)^{T-};\ x^{T-})=I(a,\ m,\ \widetilde{P}-\lambda;\ x)^{T-}=I(a,\ m,\ \widetilde{P}-\lambda;\ x^{T-})^{T-}.$$

采用上述记号，利用[I](二)引理13.11的证法可得：

引理3　设M是半鞅，$\Phi\in\mathscr{C}^p(\beta)$；$f,\ g,\ h\in\mathscr{L}_M^{p,\varepsilon}(A)$，$0<\varepsilon<1$，$\beta+\varepsilon+2\sqrt{\varepsilon}\,c_p<1$，$1\leqslant p<\infty$，常数$c_p$见引理2；那么方程(2)′在$\mathscr{X}$中存在唯一解.

定理1　设M是半鞅，$\Phi\in\mathscr{C}^p(\beta)$；$f,\ g,\ h,\ k\in\mathscr{L}_M^p(A)$，$1\leqslant p<\infty$，$0\leqslant\beta<1$，$A$是适应增过程，那么方程(1)在$\mathscr{X}$中存在唯一解.

证　(I) 仍不考虑$k\cdot\widetilde{P}$，而考查(2)′形式的方程

$$x=\Phi(x)+I(\overline{M};\ x),\tag{2)'}$$

其中
$$\overline{M}\triangleq a+m+U\cdot(\widetilde{P}-\lambda),$$
$$I(\overline{M};\ x)\triangleq I(a,\ m,\ \widetilde{P}-\lambda;\ x),$$

取ε满足，　$0<\varepsilon<(\sqrt{1-\beta+c_p^2}-c_p)^2$,

常数c_p见引理2，令

$$T_0=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$T_{n+1}=\inf\{t>T_n:\ A_t-A_{T_n}\geqslant\varepsilon\ \text{或}\ |f_0|\cdot|a|_{T_n}^t\geqslant\varepsilon$$
$$\text{或}\ g_0^2\cdot\langle m\rangle_{T_n}^t\geqslant\varepsilon^2\ \text{或}\ \Pi_t(h_0)-\Pi_{T_n}(h_0)\geqslant\varepsilon^2\}.$$

显然，$T_n\uparrow\infty$, a. s. 令

$$\Phi^{(1)}(x)=\Phi(x)^{T_1-},\quad \overline{M}^{(1)}=\overline{M}^{T_1-},\quad A^{(1)}=A^{T_1-}.$$

考查方程

$$x=\Phi^{(1)}(x)+I(\overline{M}^{(1)};\ x),\tag{3}$$

易验证，$\Phi^{(1)}\in\mathscr{C}^p(\beta)$；$f,\ g,\ h\in\mathscr{L}_{M^{(1)}}^{p,\varepsilon}(A^{(1)})$.

根据引理3，方程(3)在$\mathscr{X}$中有唯一解$x^{(1)}$.

设已知$x^{(n)}$满足方程

$$x^{(n)}=\Phi(x^{(n)})^{T_n-}+I(\overline{M}^{T_n-};\ x^{(n)}).\tag{4}$$

令 $$A^{(n+1)}=A^{T_{n+1}-}-A^{T_n},\quad \overline{M}^{(n+1)}=\overline{M}^{T_{n+1}-}-\overline{M}^{T_n},$$
相应地 $$a^{(n+1)}=a^{T_{n+1}-}-a^{T_n},\quad m^{(n+1)}=m^{T_{n+1}-}-m^{T_n},$$
$$(\widetilde{P}-\lambda)^{(n+1)}=(\widetilde{P}-\lambda)^{T_{n+1}-}-(\widetilde{P}-\lambda)^{T_n},$$
再令 $$\Phi^{(n+1)}(x)=\Phi(x)^{T_{n+1}-}+I(\overline{M}^{T_n};\ x^{(n)})^{T_n}=\Phi(x)^{T_{n+1}-}+I(\overline{M};\ x^{(n)})^{T_n}.$$

考查方程
$$x^{(n+1)}=\Phi^{(n+1)}(x^{(n+1)})+I(\overline{M}^{(n+1)};x^{(n+1)}).\tag{5}$$

易知，$\Phi^{(n+1)}\in\mathscr{C}^p(\beta)$，下面验证 $f,\ g,\ h\in\mathscr{L}^{p,\varepsilon}_{\overline{M}^{(n+1)}}(A^{(n+1)})$.

由 $\{T_n\}$ 的定义知(L_0)，(L_2)成立，只验证(L_1)成立.

先注意，对一切停时 $S\leqslant T$ 有
$$A^{(n+1)}_{T-}-A^{(n+1)}_S=\int_S^{T-}dA^{(n+1)}=\int_T^{T-}I_{]T_n,T_{n+1}[}dA=\int_{(S\vee T_n)\wedge T\wedge T_{n+1}}^{(T\wedge T_{n+1})-}dA$$
$$=A_{(T\wedge T_{n+1})-}-A_{(S\vee T_n)\wedge T\wedge T_{n+1}},$$
$$\langle m^{(n+1)}\rangle=\langle m\rangle^{T_{n+1}-}-\langle m\rangle^{T_n},$$
$$\Pi^{(n+1)}(h(x))=(\Pi(h(x)))^{T_{n+1}-}-(\Pi(h(x)))^{T_n},$$
其中，$\Pi^{(n+1)}(h(x))$是与$h(x)\cdot(\widetilde{P}-\lambda)^{(n+1)}$相联系的二次变差增过程，作了这些说明后我们有
$$(L_1)(\mathrm{i})\quad\left\|\int_S^{T-}|f(x)-f(y)|\,|da^{(n+1)}|\right\|_{L^p}=\left\|\int_{(S\vee T_n)\wedge T\wedge T_{n+1}}^{(T\wedge T_{n+1})-}|f(x)-f(y)|\,|da|\right\|_{L^p}$$
$$\leqslant\|A_{(T\wedge T_{n+1})-}-A_{(S\vee T_n)\wedge T\wedge T_{n+1}}\|_{L^\infty}\|x-y\|_{S^p}$$
$$=\|A^{(n+1)}_{T-}-A^{(n+1)}_S\|_{L^\infty}\|x-y\|_{S^p}.$$

同理可验证(L_1)(ii)，(iii)成立.

根据引理3，方程(5)在$\mathscr{X}$中有唯一解$x^{(n+1)}$.

余下仿照[1](二)定理13.13的证明，用归纳法可得方程(2)′在$\mathscr{X}$中存在唯一解。

(II) 现来考查方程(1)，我们把它表成
$$x=\Phi(x)+I(M;\ x)\tag{1}$$
或 $$x=\Phi(x)+I(\overline{M};\ x)+k\cdot\widetilde{P}.$$

令：$T'_0=0$

…………

$T'_{n+1}=\inf\{t>T'_n,\ |\Delta_t M|>1\}$，$T'_n\uparrow\infty$，

考查方程
$$x=\Phi(x)^{T'_1-}+I(M^{T'_1-};\ x).\tag{6}$$

由于 $M^{T'_1-}=\overline{M}^{T'_1-}$，故方程(6)具有(2)′的形式，并且易知 $f,\ g,\ h\in\mathscr{L}^p_{M^{T'_1-}}(A)$，由(I)所得结果，方程(6)在$\mathscr{X}$中有唯一解$x^{(1)}$；余下如同(I)一样地进行讨论即可，我们仅指出一点需要注意.

若令 $$\Phi^{(n+1)}(x)=\Phi(x)^{T'_{n+1}-}+I(M^{T'_n};\ x^{(n)}),$$
$$M^{(n+1)}=M^{T'_{n+1}-}-M^{T'_n},\quad A^{(n+1)}\equiv A,$$
由于 $$k\cdot\widetilde{P}^{T'_{n+1}-}-k\cdot\widetilde{P}^{T'_n}=0,\quad M^{(n+1)}=\overline{M}^{(n+1)}.$$

从而方程

$$x=\Phi^{(n+1)}(x)+I(M^{(n+1)};\ x),$$

仍具有(2)′的形式，而且 $f,\ g,\ h\in\mathscr{L}^p_{M^{(n+1)}}(A)$.

事实上，∀ 停时 $S\leqslant T$ 有

$$\begin{aligned}(L_1)(\mathrm{i})\quad &\left\|\int_S^{T-}|f(x)-f(y)|\,|da^{(n+1)}|\right\|_{L^p}\\ &=\left\|\int_{(S\vee T'_n)\wedge T\wedge T'_{n+1}}^{(T\wedge T'_{n+1})-}|f(x)-f(y)|\,|da|\right\|_{L^p}\\ &\leqslant\left\|\int_S^{T-}|f(x)-f(y)|\,|da|\right\|_{L^p}\\ &\leqslant\|A_{T-}-A_S\|_{L^\infty}\|x-y\|_{S^p}.\end{aligned}$$

同理(L_1)(ii), (iii)成立.　　证毕.

注　容易看出上面证明中的两步可合为一步，只要令：$T''_n=T_n\wedge T'_n$ 即可；分为两步是为了简化下面定理 1′ 的证明.

为了推出 [2] Гальчук 的结果，我们叙述并简单证明下面定理.

定理 1′　设 M 是半鞅，$\Phi\in\mathscr{C}^2(\beta)$, $f,\ g,\ h,\ k$ 满足如下条件：

$(L_0)'$ 同(L_0)

$(L_1)'$ 存在可料增过程 B 使

$\forall x,\ y\in\mathscr{X}$, ∀ 可料时 $S\leqslant T$ 有：

(i) $\left\|\int_S^{T-}|f(x)-f(y)|\,|da|\right\|_{L^2}\leqslant\|B_{T-}-B_S\|_{L^\infty}\|x-y\|_{S^2}$;

(ii) $\left\|\sqrt{\int_S^{T}(g(x)-g(y))^2d\langle m\rangle}\right\|_{L^2}\leqslant\|\sqrt{B_{T-}-B_S}\|_{L^\infty}\|x-y\|_{S^2}$;

(iii) $\left\|\sqrt{\int_S^{T-}d\beta_S(h(x)-h(y))}\right\|_{L^2}\leqslant\|\sqrt{B_{T-}-B_S}\|_{L^\infty}\|x-y\|_{S^2}$;

$(L_2)'$(i), (ii)与(L_2)(i), (ii)相同.

(iii)$\beta_t(h_0)<\infty$, $\forall t<\infty$, $a.s.$ 成立，那么，方程(1)在 $\mathscr{X}$ 中存在唯一解.

证　我们可以按获得定理 1 的步骤来证，下面仅指出几点加以说明.

(1) 由于 $\beta_t(\cdot)$是 $\Pi_t(\cdot)$的可料对偶投影，当 $p=2$ 时，可用 $\beta_t(\cdot)$取代 $\Pi_t(\cdot)$.

(2) 关于引理 1 的证明 3° 需作如下补充. 由于 $\beta_t(\cdot)$ 是可料过程，下面几个概念等价.

$$\text{①}\ \sqrt{\beta_t(\cdot)}\ \text{准局部可积}\Rightarrow\text{②}\ \beta_t(\cdot)<\infty,\ \forall t<\infty,\ a.s.\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\text{③}\ \beta_t(\cdot)\in\mathscr{J}_{\mathrm{loc}}\Rightarrow\text{④}\ \sqrt{\beta_t(\cdot)}\in\mathscr{J}_{\mathrm{loc}}\Rightarrow\text{①}.$$

易知，由 $\beta_t(h_0)<\infty$, $\forall t<\infty$, $a\cdot s$ 成立，通过条件$(L_1)'$(iii) 可推出，$\forall x\in\mathscr{X}$, $\sqrt{\beta_t(h(x))}$是准局部可积，从而 $\beta_t(h(x))\in\mathscr{J}_{\mathrm{loc}}$, $h(x)\cdot(\widetilde{P}-\lambda)$ 有定义.

(3) 引理 2 的证明不变，但用到 D–B 不等式的地方可换用 Doob 不等式.

(4) 引用定理 1 的证明时，只须注意在第(I)步中由于 A_t 和 $\Pi_t(h_0)$分别被可料过程 B_t 和 $\beta_t(h_0)$取代，$\{T_n\}$ 是可料时，因而可用那儿的方法验证 $(L_1)'$ 成立. 第(II)步证明不变.　　证毕.

作为定理 1 和定理 1′ 的推论，我们分别得到[1](二)定理 13.13 和[2]的结果.

定理 2　(即[1](二)定理 13.13)，设方程为

$$x=\Phi(x)+F(x)\cdot M. \tag{7}$$

若存在 $1\leqslant p<\infty$, $0\leqslant\beta<1$, $c>0$ 使得:

1 $\Phi(x)\in\mathscr{C}^p(\beta)$,

2 (i) $\forall x\in\mathscr{X}$, $F(x)\in\mathscr{P}$, 而且 $\forall$ 停时 T 有

$$F(x)I_{]\!]0,T]\!]}=F(x^{T-})I_{]\!]0,T]\!]};$$

(ii) $\forall x, y\in\mathscr{X}$; $\|F(x)-F(y)\|_{S^p}\leqslant c\|x-y\|_{S^p}$;

(iii) $F(0)\in\mathscr{P}(M)$(关于 M 可积的可料过程全体), 那么, 方程(7)在 $\mathscr{X}$ 中存在唯一解.

证(I), 先假设 $F(0)=0$.

因为右连左极适应过程是准局部有界的, 从而是准局部 $\mathscr{S}^p$ 过程($1\leqslant p<\infty$), 再由条件2(i), (ii)推出, $\forall x\in\mathscr{X}$, $F(x)$是局部 $\mathscr{S}^p$ 可料过程. 根据[1](二)引理13.7, $F(x)$对任意半鞅可积, 特别对 a, m, $U\cdot(\widetilde{P}-\lambda)$, $V\cdot\widetilde{P}$ 可积, 从而可将方程(7)写成

$$x=\Phi(x)+F(x)\cdot a+F(x)\cdot m+F(x)U\cdot(\widetilde{P}-\lambda)+F(x)V\cdot\widetilde{P}, \tag{8}$$

令
$$f(x)=g(x)=F(x),\quad h(x,u)=F(x)U,\quad k(x,u)=F(x)V,$$
$$f_0=g_0=F(0),\quad h_0=F(0)U,$$

那么, 方程(8)就是方程(1)的特殊形式.

下面验证定理1的条件被满足; (L_0), (L_2)显然成立, 只须验证(L_1)成立.

(L_1) $\forall x, y\in\mathscr{X}$, $\forall$ 停时 $S\leqslant T$:

(i) $$\left\|\int_S^{T-}|f(x)-f(y)|\,|da|\right\|_{L^p}=\left\|\int_S^{T-}|F(x)-F(y)|\,|da|\right\|_{L^p}$$
$$\leqslant\left\|(F(x)-F(y))^*\int_S^{T-}|da|\right\|_{L^p}\leqslant\left\|\int_S^{T-}|da|\right\|_{L^\infty}\|F(x)-F(y)\|_{S^p}$$
$$\leqslant c\left\|\int_S^{T-}|da|\right\|_{L^\infty}\|x-y\|_{S^p}. \tag{9}$$

类似的计算可得

(ii) $$\left\|\sqrt{\int_S^T(g(x)-g(y))^2d\langle m\rangle}\right\|_{L^p}\leqslant c\|\sqrt{\langle m\rangle_T-\langle m\rangle_S}\|_{L^\infty}\|x-y\|_{S^p}, \tag{10}$$

(iii) 因为 $\int_S^{T-}d\Pi_t((F(x)-F(y))U\cdot(\widetilde{P}-\lambda))$

$$=\sum_{S<r<T}[\Delta_r((F(x)-F(y)(uI_{|u|\leqslant1}\cdot(\widetilde{P}-\lambda))]^2$$
$$=\sum_{S<r<T}(F(x)-F(y))_r^2\left[\int_{|u|\leqslant1}u\widetilde{P}(\{r\},du)-\int_{|u|\leqslant1}u\lambda(\{r\},du)\right]^2$$
$$\leqslant2(F(x)-F(y)^{*2}\sum_{S<r<T}\left[\int_{|u|\leqslant1}u^2\widetilde{P}(\{r\},du)+\int_{|u|\leqslant1}u^2\lambda(\{r\},du)\right]$$
$$\left(\text{因为}\left(\int_{|u|\leqslant1}u\widetilde{P}(\{r\},du)\right)^2=\int_{|u|\leqslant1}u^2\widetilde{P}(\{r\},du),\right.$$
$$\left(\int_{|u|\leqslant1}u\lambda(\{r\},du)\right)^2\leqslant\int_{|u|\leqslant1}u^2\lambda(\{r\},du)\cdot\int_{|u|\leqslant1}\lambda(\{r\},du)$$
$$\left.\leqslant\int_{|u|\leqslant1}u^2\lambda(\{r\},du)\right),$$

令
$$\tilde{\lambda}_t=\int_0^t\int_{|u|\leqslant 1} u^2(\tilde{P}(dr,\ du)+\lambda(dr,\ du)),$$

由[3]引理 3 知 $\tilde{\lambda}_t$ 是增过程. 所以

$$\left\|\sqrt{\int_S^{T-} d\Pi_t(F(x)-F(y))U\cdot(\tilde{P}-\lambda)}\right\|_{L^p}\leqslant\sqrt{2}\,\|(F(x)-F(y))^*\sqrt{\tilde{\lambda}_{T-}-\tilde{\lambda}_S}\,\|_{L^p}$$
$$\leqslant\sqrt{2}\,c\,\|\sqrt{\tilde{\lambda}_{T-}-\tilde{\lambda}_S}\,\|_{L^p}\|x-y\|_{S^p}. \tag{11}$$

由(9), (10), (11)知, 只要取
$$A_t=c\int_0^t|da|+c^2\langle m\rangle_t+2c^2\tilde{\lambda}_t$$
就可以使得(L_1)成立. $F(0)=0$ 的情形得证.

(II) 一般情形, 只须令
$$G(x)=F(x)-F(0),\quad \Psi(x)=\Phi(x)+F(0)\cdot M.$$
考虑与(7)等价的方程
$$x=\Psi(x)+G(x)\cdot M,$$
则化为(I)的情形.　　　　证毕.

注　定理 1 的条件(L_1), (L_2)不仅同 f, g, h 联系着, 还与半鞅 M 联系着, 对于给定的映象 f, g, h 关于半鞅 M 可能存在 $1\leqslant p<\infty$ 和适应增过程 A 使得 $f,\ g,\ h\in\mathscr{L}_M^p(A)$, 但对另一个半鞅 M' 可能不存在相应的 p' 和 A' 使得 $f,\ g,\ h\in\mathscr{L}_{M'}^{p'}(A')$. 然而在定理 2 的条件下, 对任意半鞅$M$总存在相应的适应增过程 $A_t\triangleq C\int_0^t|da|+C^2\langle m\rangle_t+2C^2\tilde{\lambda}_t$ 使得 $f,\ g,\ h\in\mathscr{L}_M^p(A)$, 因此定理 2 的条件是很强的.

定理 3 (见[2]基本定理); 设方程为
$$\begin{aligned}x_t=N_t&+\int_0^t f(x_{S-},\ s)da_S+\int_0^t g(x_{S-},\ s)dm_S\\&+\int_0^t\int_{|u|\leqslant 1} h(x_{S-},\ u,\ s)(\tilde{P}-\lambda)(ds,\ du)\\&+\int_0^t\int_{|u|>1} k(x_{S-},\ u,\ s)\tilde{P}(ds,\ du),\end{aligned}\tag{12}$$
其中 N_t 是已知的右连左极适应过程.

若 f, g, h, k 满足下面条件, 则方程(12)在 $\mathscr{X}$ 中有唯一解.

$(\bar{L}_0)$ $f(x,\ t,\ \omega),\ g(x,\ t,\ \omega)\in\mathscr{B}(R^1)\times\mathscr{P}$

$h(x,\ u,\ t,\ \omega)\in\mathscr{B}(R^1)\times\mathscr{B}(R_0\cap(|u|\leqslant 1))\times\mathscr{P}$;

$k(x,\ u,\ t,\ \omega)\in\mathscr{B}(R^1)\times\mathscr{B}(R_0\cap(|u|>1))\times\mathscr{T}$;

$(\bar{L}_1)$ 存在正函数 $F(s,\ \omega)$, $G(s,\ \omega)$, $H(u,\ s,\ \omega)$ 使得

(i) $F,\ G\in\mathscr{P}$; $H\in\mathscr{B}(R_0\cap(|u|\leqslant 1))\times\mathscr{P}$;

(ii) $F\cdot|a|_t<\infty$, $G\cdot\langle m\rangle_t<\infty$, $H\cdot\lambda_t<\infty$, $\forall t<\infty$, a.s.;

(iii) $\forall x,\ y\in R^1$,
$$|f(x,\ s,\ \omega)-f(y,\ s,\ \omega)|\leqslant F(s,\ \omega)|x-y|$$
$$(g(x,\ s,\ \omega)-g(y,\ s,\ \omega))^2\leqslant G(s,\ \omega)|x-y|^2,$$
$$(h(x,\ u,\ s,\ \omega)-h(y,\ u,\ s,\ \omega))^2\leqslant H(u,\ s,\ \omega)|x-y|^2,$$

$(\bar{L}_2)$ $|f_0|\cdot|a|_t<\infty$, $g_0^2\cdot\langle m\rangle_t<\infty$, $h_0^2\cdot\lambda_t<\infty$, $\forall t<\infty$, a. s.

其中　$f_0=f(0,\ s,\ \omega)$, $g_0=g(0,\ s,\ \omega)$, $h_0=h(0,\ u,\ s,\ \omega)$;

证 定义映象 $\Phi, \bar{f}, \bar{g}, \bar{h}, \bar{k}$ 如下

$$\Phi(x)\equiv N,\quad \bar{f}(x, s, \omega)=f(x_{s-}, s, \omega),\quad \bar{g}(x, s, \omega)=g(x_{s-}, s, \omega),$$
$$\bar{h}(x, u, s, \omega)=h(x_{s-}, u, s, \omega)I_{|u|\leqslant 1},$$
$$\bar{k}(x, u, s, \omega)=k(x_{s-}, u, s, \omega)I_{|u|>1},$$

取
$$B_t=\int_0^t F(s, \omega)|da_s|+\int_0^t G(s, \omega)\langle m\rangle_s+\int_0^t\int_{|u|\leqslant 1} H(u, s, \omega)\lambda(ds, du),$$

显然，B_t 是可料增过程，$\Phi\in\mathscr{C}^2(0)$，$\beta=0$.

我们来验证条件$(\bar{L}_0)$, $(\bar{L}_1)$, $(\bar{L}_2)$足以保证$\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}, \bar{k}$ 满足定理 1′ 的条件 $(L_0)'$, $(L_1)'$, $(L_2)'$.

首先，由本文(一)(3)款知：若 $\varphi\in\mathscr{B}(R_0)\times\mathscr{P}$，则对任意 $0\leqslant s<t<\infty$ 有

$$\int_s^{t-} d\beta_r(\varphi)=\beta_{t-}(\varphi)-\beta_s(\varphi)\leqslant\varphi^2\cdot\lambda_s^{t-}. \tag{13}$$

定理 1′ 的条件$(L_0)'$, $(L_2)'$ 显然成立，往证$(L_1)'$ 成立.

$(L_1)'$(iii) $\forall x, y\in\mathscr{X}$, $\forall$ 可料时 $S\leqslant T$ 有

$$E\int_S^{T-} d\beta_t(\bar{h}(x)-\bar{h}(y))=E\int_S^{T-} d\beta_t((h(x_{s-}, u, s, \omega)-h(y_{s-}, u, s, \omega))I_{|u|\leqslant 1}),$$

因为
$$I_{]\!]S, T[\![}(h(x_{s-}, u, s, \omega)-h(y_{s-}, u, s, \omega))I_{|u|\leqslant 1}, \in\mathscr{B}(R_0)\times\mathscr{P}$$

由(13)得

$$\begin{aligned}
\text{上式}&\leqslant E\int_S^{T-}\int_{|u|\leqslant 1}(h(x_{s-}, u, s, \omega)-h(y_{s-}, u, s, \omega))^2\lambda(ds, du)\\
&\leqslant E\int_S^{T-}\int_{|u|\leqslant 1}(x_{s-}-y_{s-})^2 H(u, s, \omega)\lambda(ds, du)\\
&\leqslant E(x-y)^{*2}\int_S^{T-}\int_{|u|\leqslant 1} H(u, s, \omega)\lambda(ds, du)\\
&\leqslant E(x-y)^{*2}(B_{T-}-B_S)\\
&\leqslant \operatorname{ess\,sup}(B_{T-}-B_S)E(x-y)^{*2},
\end{aligned}$$

所以
$$\left\|\sqrt{\int_S^{T-} d\beta_t(\bar{h}(x)-\bar{h}(y))}\right\|_{L^2}\leqslant\|\sqrt{B_{T-}-B_S}\|_{L^\infty}\|x-y\|_{S^2}.$$

同理可验证$(L_1)'$(i), (ii)成立.

由定理 1′ 推知定理 3 成立. 证毕.

注 文献[2]的结果是对取值于 d-维欧氏空间的半鞅而陈述的. 为简单起见我们只讨论了 $d=1$ 的情形；参考文献[2]不难把我们的讨论推广到 $d>1$ 的情形，除了带来记号上的复杂性外，不增加任何实质性的困难.

参考文献

[1] 严加安，现代鞅论导引(一)、(二)，中国科学院数学研究所，1979.

[2] Гальчук, Л. И. Существований, и единственности решения для стохастческих уравнений по полумартингалам. *Теория Вероятн, И ее примен* **23**:4 (1978).

[3] Гальчук, Л. И. Общение теоремы Гирсанова О замене меры на случай полумар-тингалов со скачками. *Теория Вероятн, И ее примен*, **22**:2 (1977).

[4] Jacod, J., Multivariate point process, predictable projection, Radon-Nikodym derivatives representation of martingales. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw, Geb* **31**:3 (1975)

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RESPECT TO SEMIMARTINGALES

NIE ZAHKAN
(*Xibei University*)

ABSTRACT

Papers [1, 2] deal with the problem of the existence and uniqueness of the solutions of two different stochastic differential equations with respect to semimartingales. The equation discussed in this paper unifies the equations in papers [1, 2]. This paper gives us the sufficient conditions for the existence and uniqueness of its solutions, so that the results in papers [1, 2] can be obtained by theorem 1 and theorem 1' of this paper respectively.